IX vežba

Relativno i oscilatorno kretanje me (dinamičke) tačke

- Relativno kretanje materijalne (dinamičke) tačke po površi Zemlje – Uticaj sopstvene rotacije Zemlje
- Foucault- ovo klatno
- Oscilatorno kretanje materijalne (dinamičke) tačke: Slobodne oscilacije, uticaj otporene sile proporcionalne brzini na slobodne oscilacije, prinudno oscilatorno kretanje, rezonancija.
- Vektori momenata inercije masa i momenti inercije mase

Zadatak 1. Uticaj obratnja Zemlj oko sopstvene ose na kretanje materijalne tačke. (Vidi predavanja VIII)

Zadatak 2. Foucault- ovo klatno. (Vidi predavanja VIII)

Zadatak 3. Oscilatorio kretanje materijalne (dinamičke) tačke :

-Slobodne oscilacije materijalne tačke ,

-uticaj otporne sile proporcionalne brzini na slobodne oscilacije materijalne tačke ,

- prinudno oscilatorno kretanje materijalne tačke. Pojam rezonancije.

Pozivaju se zainteresovani studenti da urade i rečima, jednačinama i grafičkim prikazima da urade ove teorijske zadateke. Prvih šest studenta koji nastavniku ili saradniku donesu na disketi u WORD.DOC tehnici donesu uradjene ove zadatke mogu osvojiti po 5 poena koji se pridodaju za domaci rad.

Zadatak 4. Vektor momenta inercije mase materijalnog tela i aksijalni momenti inercije mase nekih krutih homogenih tela .

Vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O je:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \iiint_V [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm = \iiint_V \rho[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dV$$

Vektor *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O*, možemo razložiti u dve komponente, jednu* J_{On} *u pravcu ose* $\vec{n}$ *i drugu* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *upravnu na tu osu, a obe u devijacionoj ravni, koju čine vektori* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *i* $\vec{n}$ *i to možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$$

Sada se pomoću definisane matrice tenzora inercije materijalnog sistema može napisati prethodna relacija u sledećem obliku:

$$\left\{\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = \mathbf{J_O}\{n\}$$

te je aksijalni moment inercije mase sistema materijalnih tačaka za osu $\vec{n}$ koja prolazi kroz koordinatni početak O jednak:

$$J_{On} = (n)\left\{\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})}\right\} = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma) \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = (n)\mathbf{J_O}\{n\}$$

Devijacioni moment mase sistema materijalnih tačaka za dve upravne ose $\vec{n}$ i $\vec{u}$ koje se seku u koordinatnom početku O je:

$$D_{Onu} = (u)\left\{\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})}\right\} = (\cos\alpha_u \quad \cos\beta_u \quad \cos\gamma_u) \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = (u)\mathbf{J_O}\{n\}$$

Steiner-ova teorema: *Vektor momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O *jednak zbiru vektora sopstvenog momenta inercije mase* $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* C *u središtu sistema i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz središte sistema* C *i pložajnog* $\left[\vec{r}_C,\left[\vec{n},\vec{r}_C\right]\right]M$ *u odnosu na središte sistema.*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \vec{J}_C^{(\vec{n})} + \left[\vec{r}_C,\left[\vec{n},\vec{r}_C\right]\right]M$$

Aksijalni i devijacioni deo vektora momenta inercije mase. Glavne ose inercije.

$$\begin{vmatrix} J_{Ox}-J_{On_s} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy}-J_{On_s} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz}-J_{On_s} \end{vmatrix} = 0$$

iz koje odredjujemo glavne momente inercije masa materijalnog sistema: $J_{On_s}, s=1,2=3$,kao korene jednačine trećeg reda koju dobijamo razvijanjem prethodne determinante:

$$P_3\left(J_{On_s}\right) = -\left[\left(J_{On_s}\right)^3 - \mathrm{J}_1\left(J_{On_s}\right)^2 + \mathrm{J}_2\left(J_{On_s}\right) - \mathrm{J}_3\right] = 0$$

u kojoj su J_1, J_2 i J_3 skalari, redom prvi, drugi i treći, matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

* J_1 je prvi scalar i jednak je zbiru elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_1 = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} = J_{On} + J_{Ou} + J_{Ow} = J_{On_1} + J_{On_2} + J_{On_3}$$

* J_2 je drugi scalar i jednak je zbiru minora elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_2 = \begin{vmatrix} J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{(yz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Ozx} \\ D_{(xz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} \\ D_{(xy} & J_{Oy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_2} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_2} \end{vmatrix}$$

* J_3 je treći scalar i jednak je determinanti matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_3 = \det\left|\mathbf{J_O}\right| = \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_1} & & \\ & J_{On_2} & \\ & & J_{On_3} \end{vmatrix} = J_{On_1}\cdot J_{On_2}\cdot J_{On_3}$$

Kosinuse smerova glavnih pravaca momenata inercije masa materijalnog sistema za neki pol O odredjujemo kao odnose:

$$\frac{\cos\alpha_s}{K_{31}^{(s)}} = \frac{\cos\beta_s}{K_{32}^{(s)}} = \frac{\cos\gamma_s}{K_{33}^{(s)}} = C_s$$

gde su $K_{3k}^{(s)}, k=1,2,3$, $s=1,2,3$ kofaktori elemenata treće vrste I odgvarajuće k'te kolohe za odgivarajući s-ti koren $J_{On_s}, s=1,2=3$ sekularne jednačine:

$$K_{31}^{(s)} = \begin{vmatrix} D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ J_{Oy}-J_{On_s} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{32}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox}-J_{On_s} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{33}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox}-J_{On_s} & D_{Oyx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy}-J_{On_s} \end{vmatrix}$$

Kosinusi smerova glavnog pravca momenata inercije masa moraju da zadaovoljavaju uslov da je zbir kvadrata kosinusa uglova glavnih pravaca jednak jedinici:

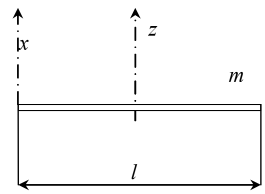
$$\cos^2\alpha_s + \cos^2\beta_s + \cos^2\gamma_s = 1$$

Odakle odredjuemo nepoznate konstante C_s:

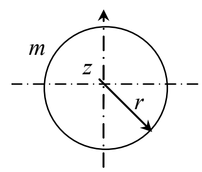
$$C_s = \frac{1}{\sqrt{\left(K_{31}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{32}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{33}^{(s)}\right)^2}}$$

Može se dokazati da u svakoj tački prostora u kome je materijalni sistem postoje uvek tri ortogonalana glavna pravca inercije $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ za koje su vektori momenata inercije masa materijalnog sistema bez devijacionih svojstava, tj. postoje samo aksijalni momenti inercije mase z ate pravce.

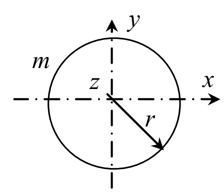
PRIMERI:



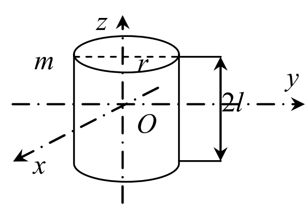
Tanki pravolinijski štap dužine l, mase m ima aksijalni moment inercije mase za težišnu osu z oblika $J_z = \dfrac{ml^2}{12}$, za osu kroz kraj štapa koristeći Štajner-ovu teoremu imamo $J_x = j_z + m\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{ml^2}{3}$.



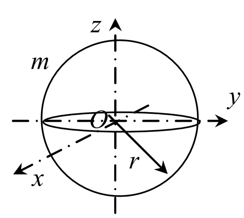
Prstren (materijalni krug) poluprečnika r, mase m ima alsijalni moment inercije mase za težišnu osu z oblika $J_z = mr^2$,



Tanki kružni disk poluprečnika r, mase m ima aksijalne momente inercije mase za težišne ose x, y, z oblika $J_x = J_y = \dfrac{mr^2}{4}$, i $J_z = \dfrac{mr^2}{2}$



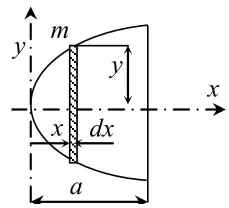
Kružni cilindar poluprečnika r, mase m, visine $2l$ ima aksijalni moment inercije mase za težišne ose x, y, z oblika $J_x = J_y = \dfrac{m}{12}\left(3r^2 + 4l^2\right)$, i $J_z = \dfrac{mr^2}{2}$



Kugla poluprečnika r, mase m ima aksijalni moment inercije mase za težišne ose x, y, z oblika $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2mr^2}{5}$.

Zadatak 5. Izračunati aksijalni moment inercije tanke homogene ploče oblika parabole $y^2 = 4x$, mase m, za osu y. Osnova ploče paralelna je osi y i od nje je na rastojanju a.

Rešenje:



Povucimo na ploči dve prave, paralelne y i i od nje na rastojanju x i $x + dx$.
Izračunajmo aksijalni monemnt inercije mase pločice za y osu površi šrafirana na slici ograničenu ovim pravim i paraboiličnom konturom pločice: aksijalni moment inercije elementarne mase pločicee u vidu pravougaione trake paralelne Oy osi za tu osu je: $dJ_y = x^2 dm$, gde je elementarna masa šrafirane površi pločice $dm = \rho'' dA$, gde je ρ'' površinska gustina ploče, dA - veličina šrafirane površi $dA = 2ydx$. Sada imamo:

$$dm = 2\rho'' ydx \text{ pa je :}$$

$$dJ_y = 2\rho'' x^2 ydx$$

kako je $y^2 = 4x$ tj. $y = 2\sqrt{x}$ sledi:

$$dJ_y = 4\rho'' x^2 \sqrt{x} dx$$

Aksijalni monemnt inercije mase ploče za y osu biće:

$$J_y = \int_A dJ_y = \int_0^a 4\rho'' x^2 \sqrt{x} dx = \frac{8}{7}\rho'' a^3 \sqrt{a}\,.$$

Kako je masa ploče $m = \rho'' A$, gde je površina ploče:

$$A = \int_0^a 2ydx = 4\int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{8}{3} a\sqrt{a}$$

onda je:

$$m = \frac{8}{3}\rho'' a\sqrt{a}\ ,$$

sledi da je ρ'' površinska gustina ploče:

$$\rho'' = \frac{m}{a\sqrt{a}}\frac{3}{8}$$

pa je moment inercije ploče za y osu oblika:

$$J_y = \frac{3}{7} ma^2\,.$$

Zadatak 6. Izračunati aksijalne momente inercije masa za ose x, y i z homogenog kružnog konusa, mase m, visine h, čiji je poluprečnik osnove r.

Rešenje:

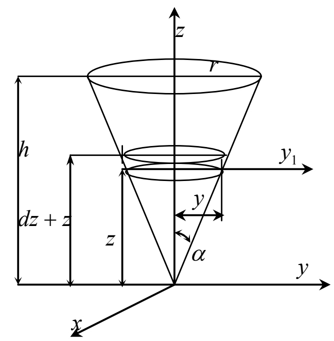
Zamislimo da smo presekli konus dvema ravnima, paralelnim xy ravni i od nje na rastojanju z i $z + dz$.
Izračunajmo aksijalni monemnt inercije elementarne mase sadržane u elementarnoj zapremini ograničenoj tim ravnimai i bočnom površi konusa.

Diferencijal zapremine odredićemo kao zapreminu kružong cilindra poluprečnika osnove y i visine dz, tj. $dV = \pi y^2 dz$, pa je masa izdvojenog dela zapremine jednaka:

$dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dz$, gde je ρ gustina materijala kupe.

Aksijalni monemnt inercije mase sadržane u uočenoj zapremini za osu z izračunavamo po formuli za aksijani moment inercije mase cilindra:

$$dJ_z = \frac{y^2 dm}{2} = \frac{\pi\rho}{2} y^4 dz .$$



Ako sa α označimo polovinu ugla pri vrhu konusa onda je

$$y = z\, tg\alpha ,$$

pa je :

$$dJ_z = \frac{\pi\rho}{2} z^4 tg^4\alpha\, dz ,$$

pa je moment inercije konusa za osu z jednak:

$$J_z = \int_V dJ_z = \frac{\pi\rho tg^4\alpha}{2}\int_0^h z^4\, dz = \frac{\pi\rho tg^4\alpha}{5} h^5 .$$

Imajući u vidu da je zapremina konusa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 ctg\,\alpha ,$$

gustina materijala konusa biće:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi r^3 ctg\alpha},$$

pa je aksijalni moment inercije mase konusa za njegovu osu simetrije:

$$J_z = \frac{3}{10} m r^3 .$$

Jasno da iz simetrije proizilazi da su: $J_x = J_y$.

Da bi izračunali J_y odredimo aksijalni momement inercije mase smeštene u u uočenoj elementarnoj zapremini za osu y. Povucimo zato osu y_1 kroz težište C paralelnu osi y. Koristeći se formulom za aksijalni moment inercije mase diska za osu, biće:

$$dJ_{y_1} = \frac{dmr^2}{4} .$$

Prema Šteiner-ovoj teoremi nalazimo:

$$dJ_y = dJ_{y_1} + z^2 dm = dm\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right),$$

kako je $dm = \rho\pi y^2 dz$ sledi:

$$dJ_y = \rho\pi y^2\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz = \rho\pi tg^2\alpha\left(\frac{tg^2\alpha}{4} + 1\right)z^4 dz ,$$

jer je $y = z\, tg\alpha$.

Aksijalni monemnt inercije mase konusa za y osu biće:

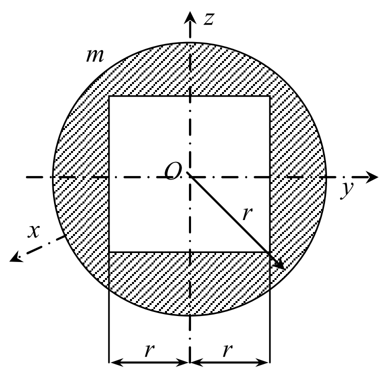
$$J_y = \int_V dJ_y = \int_0^h \rho\pi tg^2\alpha\left(\frac{tg^2\alpha}{4}+1\right)z^4dz = \rho\pi tg^2\alpha\left(\frac{tg^2\alpha}{4}+1\right)\frac{h^5}{5}.$$

Pa kako su: $\rho = \dfrac{3m}{\pi r^3 ctg\alpha}$ i $r = h\,tg\alpha$ to dobijamo:

$$J_y = J_x = \frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right).$$

Zadatak 7. Izračunati aksijalne momente inercije masa za ose x, y i z tanke homogene kružne ploče, poluprečnika r, iz koje je izrezan kvadrat stranice r. Centri kvadrata i kruga se poklapaju. Masa m je masa ploče bez izreza.

Rešenje:



Aksijalni moment inercije mase ploče sa izrezom za neku osu jednak je razlici momenata inercije kruga $J^{(1)}$ i kvadrata $J^{(2)}$ za istu tu osu, tj.:

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)},$$
$$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)},$$
$$J_z = J_z^{(1)} - J_z^{(2)}.$$

Zbog simetrije sledi da je: $J_y = J_z$. Koristeći se formulama:

$$J_x^{(1)} = \frac{mr^2}{2},\ J_y = J_z = \frac{mr^2}{4},\ J_x^{(2)} = \frac{m^{(2)}r^2}{6},\ J_y^{(2)} = J_z^{(2)} = \frac{m^{(2)}r^2}{12},$$

gde je masa izrezanog kvadrata:

$$m^{(2)} = \rho'' r^2 = \frac{m}{\pi r^2}r^2 = \frac{m}{\pi}.$$

Prema tome, dobijamo:

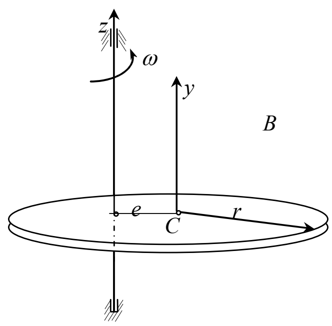
$$J_x^{(2)} = \frac{mr^2}{6\pi},\ J_y^{(2)} = J_z^{(2)} = \frac{mr^2}{12\pi},$$

pa su traženi aksijalni momenti inercije masa pločice za ose x, y i z:

$$J_x = \frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2}{6\pi} = \frac{3\pi-1}{6\pi}mr^2 = 0{,}446mr^2$$

$$J_y = J_z = \frac{mr^2}{4} - \frac{mr^2}{12\pi} = \frac{3\pi-1}{12\pi}mr^2 = 0{,}223mr^2.$$

Zadatak 8. Izračunati glavni moment količine kretanja za obrtnu osu diska , mase m, poluprečnika r, ekscentrično nasađenog na obrtnu osu, oko koje se obrće ugaonom brzinom ω. Ravan diska upravna je na obrtnu osu, ekscentricitet je jednak polovini poluprečnika $e=\frac{r}{2}$.



Rešenje:

Usmerimo osu z duž obrtne ose. Glavni moment količine kretanja krutog tela za obrtnu osu je $L_z = J_z\omega_z$ gde je J_z aksijalni moment inercije mase krutog tela za obrtnu osu da bi smo ga izračunali primenimo Štajner-ovu teoremu.

$J_z = J_y + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2}{4} = \frac{3mr^2}{4}$, pa je glavni moment količine kretanja diska za obrtnu osu je: $L_z = \frac{3mr^2}{4}\omega_z$. Proveri rešenenje. (vredi 5 poena sa dokazom i tehničkom obradom)

Zadatak 9. Odrediti vektor momenta inercije mase diska, mase m, poluprečnika r, ekscentrično nasađenog na obrtnu osu, za tu osu oko koje se obrće ugaonom brzinom ω. Ravan diska upravna je na obrtnu osu, ekscentricitet je jednak polovini poluprečnika $e=\frac{r}{2}$. Dati grafičku interpretaciju. (vredi 6 poena sa dokazom i tehničkom obradom)