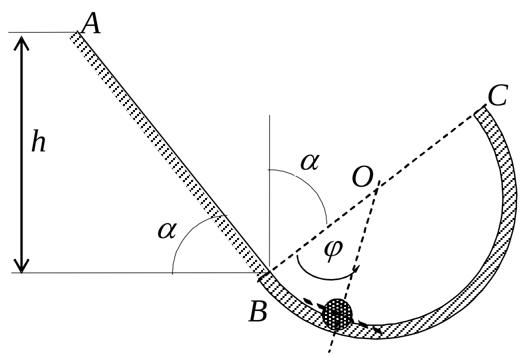
VIII vežba

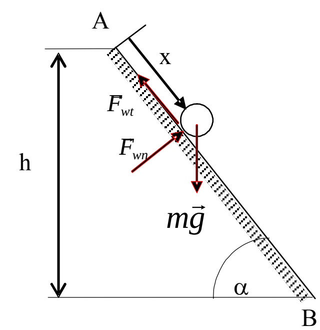
Principi mehanike

- Prinudno kretanje materijalne (dinamičke) tačke u polju nekonzervativnih sila;
- Relativno kretanje materihalne (dinamičke) tačke, teorema o promeni kinetičke energije materijalne (dinamičke) tačke pri relativnom kretanju.

Zadatak 1. Kojom početnom brzinom treba pustiti tešku tačku mase m iz vrha strme ravni AB, visine $h = 5[m]$, nagibnog ugla $\alpha = 60^0$ da bi stigla u tačku C glatkog kružnog luka, središnjeg ugla 3α, poluprečnika $R = h$, ako je koeficijent trenja klizanja $\mu = 0.1$.



Slika 1



Slika 1a

Rešenje:

Iz principa dinamičke ravnoteže za materijalnu (dinamičku) tačku koja se kreće pod dejstvom sule Zemljine teže, po hrapavoj strmoj ravni dobijamo dve skalarne jednačine:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{wt}$$

$$0 = -mg\cos\alpha + F_{wn}$$

Iz prve jednačine sledi:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

odnosno

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\,,$$

te posle razdvajanja promenljivih i integraljanja sledi:

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = gx\sin\alpha - \mu gx\cos\alpha + C_1\,.$$

Integraciona konstanta C_1 se određuje iz početnih uslova kretanja materijalne tačke koja je u početnom položaju imala početnu brzunu:

$$t = 0;\quad \dot{x} = v_A;\quad \mathrm{x} = 0$$

pa je $C_1 = \frac{1}{2}v_A^2$.

Sada imamo:

$$(\dot{x})^2 = 2gx(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + v_A^2$$

Iz uslova da u pložaju B tačka ima brzinu $\dot{x} = v_B$; i pređe put $\mathrm{x} = L$; duž strme ravni dobijamo:

$$v_B^2 = 2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + v_A^2$$

Kako za kretanje tačke iz položaja A u položaj B važi integral energije to se ovaj izraz za brzinu može dobiti i ovako:

$$E_{kB} - E_{kA} = A_{AB} \ ,$$

gde je A_{AB} rad aktivnih sila i sila otpora veze na putu između položaja A i B odnosno:

$$\frac{1}{2} m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = mgL\sin\alpha - \mu mgL\cos\alpha$$

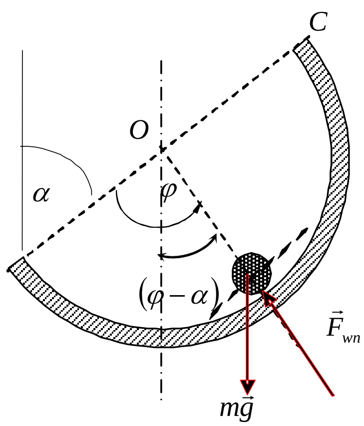
odakle je:

$$v_A^2 = v_B^2 - 2gL\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

Iz vektorske jednačine dinamičke ravnoteže za kretanje materijalne tačke po kružnici i njenog projektovanja u dva ortogonalna pravca - pravac tangene i pravac normale na putanju*, slika 1b*., sledi:

$$\vec{T}: \qquad mR\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi - \alpha)$$

$$\vec{N}: \qquad mR\dot{\varphi}^2 = F_{wn} - mg\cos(\varphi - \alpha)$$



Slika 1 b

Iz prve jednačine nakon razdvajanja promenljivih sledi:

$$mR\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -mg\sin(\varphi - \alpha)\,,$$

a posle integraljenja:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\cos(\varphi - \alpha) + C_2$$

dok integracionu konstantu C_2 određujemo iz početnih uslova:

$$t = 0; \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_B}{R}; \qquad \varphi = 0$$

pa je:

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_B}{R}\right)^2 - \frac{g}{R}\cos\alpha$$

tako da je:

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{R}\cos(\varphi - \alpha) + \left(\frac{v_B}{R}\right)^2 - 2\frac{g}{R}\cos\alpha$$

Sada iz druge jednačine određujemo normalnu komponentu sile otpora veze:

$$F_{wn} = F_n = 2mg\cos(\varphi - \alpha) + m\frac{v_B^2}{R} - 2mg\cos\alpha + mg\cos(\varphi - \alpha)$$

odnosno:

$$F_n = 3mg\cos(\varphi - \alpha) + m\left(\frac{v_B^2}{R}\right) - 2mg\cos\alpha \quad .$$

Uslov da materijalna (dinamička) tačka stigne do položaja C matematički se može napisati kao:

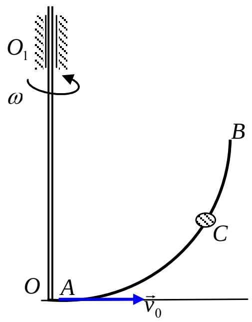
$$F_n = 0;$$

a pošto je $\varphi = 180^0 = 3\alpha;$ onda se dobija brzina u tački B

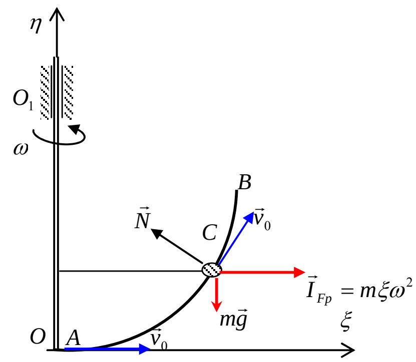
$$v_B^2 = \frac{5}{2} gR.$$

Sada je tražena početna brzina materijalne tačke: $v_A^2 = \frac{5}{2} gR - 2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 42.3\left[\frac{m^2}{s^2}\right].$

Zadatak 2. Za vertikalni štap OO_1, *slika 2a*., koji se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω učvršćena je žica AB, koja leži u vertikalnoj ravni. Na žici se nalazi gladak prsten C mase m. Ako se prsten C u početnom trenutku nalazi u položaju A i ako mu je saopštena početna brizna v_0 duž žice, odrediti kakav oblik treba da ima žica (jednačinu krive AB), pa da se prsten za sve vreme kreće u odnosu na žicu sa konstantnom brzinom.



Slika 2a.



Slika 2b.

Rešenje:

Primenimo teoremu o promeni kinetičke energije materijalne (dinamičke) tačke pri relativnom kretanju:

$$\frac{1}{2} m\left(v_r^2 - v_{r0}^2\right) = \sum_{k=1}^{n} A^{\vec{F}_k} + A^{\vec{I}_{Fp}},$$

gde je $A^{\vec{I}_{Fp}}$ rad inercijone sile prenosnog kretanja, dok je rad Coriolis-ove sile inercije pri relativnom kretanju jednak nuli pošto je Coriolis-ovo ubrzanje uvek normalno na vektor relativne brzine $\vec{I}_{F_{cor}} \perp \vec{v}_r$.

Kako je kriva glatka, reakcija veze ne vrši rad. Na materijalnu (dinamičku) tačku još osim ove sile dejstvuje i težina prstena $m\vec{g}$. Rad ove sile ne zavisi od oblika krive pošto je sila konzervativna i ima potencijal:

$$A^{m\vec{g}} = -mg\eta,$$

rad inercijone sile prenosnog kretanja $A^{\vec{I}_{Fp}}$ iznosi:

$$A^{\vec{I}_{Fp}} = \int_0^{\xi} m\xi\omega^2 d\xi = \frac{m\xi^2\omega^2}{2}$$

pa sada imamo:

$$\frac{1}{2} m\left(v_r^2 - v_{r0}^2\right) = -mg\eta + \frac{m\xi^2\omega^2}{2},$$

kako relativna brzina duž krive AB treba da bude konstantna $v_r = v_{r0}$, to iz ove jednačine integrala kinetičke energije odmah dobijamo putanju u obliku:

$$0 = -mg\eta + \frac{m\xi^2\omega^2}{2}$$

odnosno

$$\eta = \frac{\omega^2}{2g}\xi^2$$

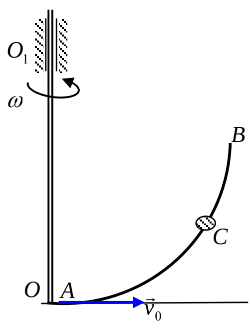
što je jednačina parabole.

Zadatak 3. Glatka žica savijena u obliku parabole, čija je jednačina $y^2 = 2px$, obrće se oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω. Na žicu je nametnut prsten koji može da se kreće po glatkoj žici.

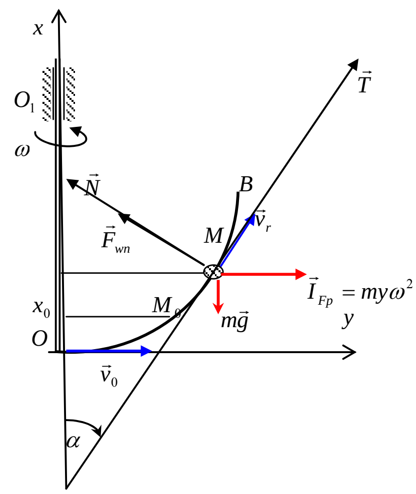
Odrediti:

a) brzinu prstena u odnosu na žicu ako se on u početnom trenutku nalazio u miru u položaju M_0 sa apscisom x_0.

b) do koje će se tačke podići prsten ako se u početnom trenutku nalazio u koordinatnom početku i ako mu je saopštena početna brizna v_0 usmerena po horizontali udesno.



Slika 4a.



Slika 4b.

Rešenje:

Na prsten dejstvuju sledće sile: sila težine prstena $\vec{G} = mg\,\vec{i}$; $\vec{F}_{wn}$-normalna reakcija žice, prenosna sila inercije je: $\vec{I}_{F_p} = m\omega^2 y\left(\sin\alpha\vec{T} - \cos\alpha\vec{N}\right)$, smer joj je prikazan na *slici 4b* , gde smo sa α ozbačili ugao koji pravac tangente na putanju u proizvoljnoj tački gradi sa x osom i jasno je da je $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$, odnosno $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ i $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, i Coriolis-ova inerciona sila:

$$\vec{I}_{Fcor} = -2m\omega\dot{y}\,\vec{k} = -2m\omega v_r \sin\alpha\,\vec{k} \text{ jer je}$$

Coriolis-ovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega & 0 & 0 \\ v_r\cos\alpha & v_r\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_r \sin\alpha \cdot \vec{k}$$

Pa projektovanjem vektorske jednačine dinamičke ravnoteže ovih sila na pravac tangente na putanju u proizvoljnoj tački imamo:

$$m\frac{dv_r}{dt} = -mg\cos\alpha + my\omega^2\sin\alpha$$

odnosno

$$\frac{dv_r}{dt} = -g\cos\alpha + y\omega^2\sin\alpha\,,$$

razdvajanjem promenljivih možemo rešiti ovu diferencijalnu jednačinu vodeći računa da je:

$$\frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{dv_r}{ds},$$

odnosno imamo jednačinu:

$$v_r dv_r = -g dx + y\omega^2 dy,$$

što posle integraljenja daje:

$$v_r^2 = -2gx + y^2\omega^2 + C$$

odnosno

$$v_r^2 = 2\left(p\omega^2 - g\right)x + C,$$

s obzirom da je $y^2 = 2px$. Integraciona konstanta C se određuje iz početnih uslova i za zadatak pod a) biće:

$$t = 0 \Rightarrow \qquad x = x_0, \qquad v_r = 0$$

odakle je integraciona konstanta

$$C = -2\left(p\omega^2 - g\right)x_0$$

pa je :

$$v_r^2 = 2\left(p\omega^2 - g\right)\left(x - x_0\right)$$

odnosno zakon promene relativne brzine je:

$$v_r = \sqrt{2\left(p\omega^2 - g\right)\left(x - x_0\right)}.$$

Odavde možemo izvesti i zaključke u vezi sa smerom kretanja prstena u odnosu na ugaonu brzinu obrtanja žice. Da bi se tačka kretala naviše tj. $x > x_0$, da bi potkorena veličina bila pozitivna mora biti:

$$p\omega^2 - g > 0 \text{ odnosno } \omega^2 > \frac{g}{p},$$

ukoliko pak bude $\omega^2 < \dfrac{g}{p}$ tačka će se kretati naniže, a ako je $\omega^2 = \dfrac{g}{p}$ sledi da je $v_r = v_0 = 0$ da će prsten relativno mirovati.

Rešenje pod b) bilo bi iz iste diferencijalne jednačine

$$v_r^2 = 2\left(p\omega^2 - g\right)x + C$$

samo bi se integraciona konstanta C određivala iz početnih uslova i za zadatak pod b) koji su:

$$t = 0 \Rightarrow \qquad x = 0, \quad v_r = v_0 \text{ o}$$

dakle je integraciona konstanta $C = v_0^2$ pa je :

$$v_r^2 = 2\left(p\omega^2 - g\right)x + v_0^2 .$$

U trenutku kada tačka dostigne krajnji položaj relativno se zaustavi tj. $v_r = 0$ odakle se dobija maksimalno:

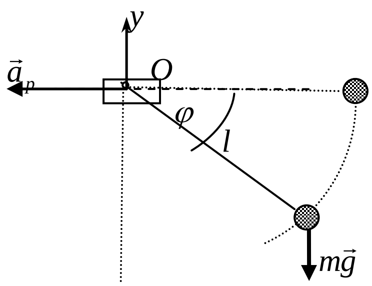
$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2\left(g - p\omega^2\right)} \text{ i } y_{\max} = \sqrt{2px_{\max}} = \sqrt{\frac{pv_0^2}{\left(g - p\omega^2\right)}}$$

Da bi prsten uopšte mogao stići u ovaj položaj mora biti $g - p\omega^2 > 0$ odnosno $\omega^2 < \dfrac{g}{p}$.

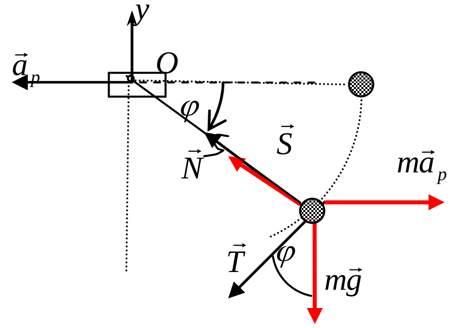
Ukoliko pak bude $\omega^2 > \dfrac{g}{p}$ onda ne može biti zadovoljen uslov da je $v_r = 0$ što praktično znaći da će se prsten neograničeno penjati uz žicu.

Za $\omega^2 = \dfrac{g}{p}$ dobijemo $v_r = v_0 = const$, što znaći da se prsten kreće konstantnom brzinom po paraboli.

Zadatak 4. Tačka vešanja O matematičkog klatna mase m i dužine l ima konstantno horizontalno ubrzanje a_p, *slika 4a.*, Ako se klatno pusti iz horizontalnog položaja u kome je bilo u miru, relativno u odnosu na pokretni koordinatni sistem, izvesti izraz za silu u koncu u funkciji ugla nagiba φ.



Slika 4a.



Slika 4b.

Rešenje:

Kretanje tačke vešanja je prenosno kretanje, ubrzanjem a_p, a klaćenje je relativno kretanje klatna. Sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Za generalisanu koordinatu izaberemo ugao φ. Na materijalnu tačku dejstvuje aktivna sila teđine koja je konzervativna sila. Otpor veze je sila u koncu. Osim težine $m\vec{g}$ na klatno dejstvuje i prenosna sila inercije $m\vec{a}_p$.Osnovna vektorska jednačina dinamičke ravnoteže relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = m(\vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN}) = \vec{G} + \vec{S} + (-m\vec{a}_p)$$

te projektovanjem iste na tangencijaljni i normalni pravac na putanju tačke dobijamo:

‘ $$ml\ddot{\varphi} = mg\cos\varphi - ma_p\sin\varphi,$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = -mg\cdot\sin\varphi - ma_p\cos\varphi + S$$

Množenjem prve jednačine sa $d\varphi$, vodeći računa da je $\ddot{\varphi}d\varphi = \dot{\varphi}d\dot{\varphi}$, posle integraljenja dobijamo:

$$ml\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = mg\sin\varphi + ma_p\cos\varphi + C$$

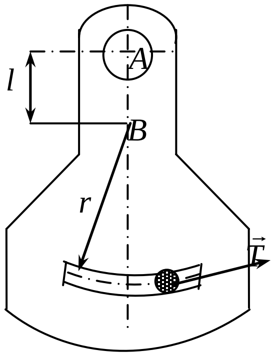
Kako je u trenutku $t = 0;\quad \dot{\varphi} = 0;\quad \varphi = 0$ to je $C = -ma_p$ pa je:

$$ml\dot{\varphi}^2 = 2mg\sin\varphi + 2ma_p(\cos\varphi - 1)$$

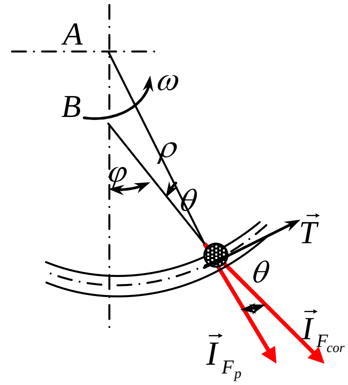
zamenimo ovaj izraz u diferencijalnu jednačinu dinamičke ravnoteže za pravac normale na putanju i dobijamo traženu silu u koncu:

$$S = mg\cdot\left(3\sin\varphi + \frac{a_p}{g}(3\cos\varphi - 2)\right).$$

Zadatak 5. Radi amortizovanja oscilacija kolenastog vratila avionskog motora izradi se u protivtegu žleb oblika kružnog luka poluprečnika r sa središtem u tački B, koja je za $AB = l$ pomerena u odnosu na ose obrtanja vratila, *slika 5a*. Duž žljeba može slobodno da se kreće dopunski protiv teg koga možemo smatrati materijalnom (dinamičkom) tačkom. Ugaona brzina vratila jednaka je ω. Odrediti kružnu frekvenciju malih oscilacija dopunskog protiv tega. Uticaj sile teže zanemariti.



Slika 5a.



Slika 5b.

Rešenje:

Na materijalnu (dinamičku) tačku koja vrši relativno kretanje po žljebu javljaju se samo samo inercione sile jer nema nikakvih aktivnih sila. Prenosna sila inercije je

$$I_{F_p} = \rho\omega^2 m$$

gde je $\rho = \overline{AM}$. Smer ove sile je suprotan od smera normalnog ubrzanja, *slika 4b*. Coriolis-ovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

i intenzitet ovog ubrzanja je

$$a_c = 2\omega v_r \sin\frac{\pi}{2} = 2\omega v_r \ ,$$

a njegov pravac i smer su prikazani na *slici 4b*. Prema tome Coriolis-ova inerciona sila ima pravac normale na relativnu trajektoriju, odnosno, na žljeb po kome se kreće materijalna tačka, pa nema projekciju u pravcu tangente na žleb.

Odresimo projekcije svih sila na radijalni i cirkularni pravac, tj. samo inercionu silu prenosnog kretanja u pravcu tangente na žleb, pa će skalarna projekcija vekltorske jednačine dinamičke ravnoteže u pravcu tangente biti:

$$mr\ddot{\varphi} = -m\rho\omega^2\cdot\sin\theta$$

Iz trougla ABM , slika 4b., prema sinusnoj teoremni biće:

$$\frac{\rho}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{l}{\sin\theta}$$

Odnosno,

$$\sin\theta = \frac{l}{\rho}\sin\varphi$$

Iz istog trougla i kosinusne teoreme imamo:

$$\rho = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos(\pi-\varphi)}$$

Ako pretpostavimo da su uglovi φ i θ mali dobijamo:

$$\theta = \frac{l}{\rho}\varphi \ \text{ i } \ \rho = r + l \ .$$

Sada diferencijalna jednačina kretanja postaje:

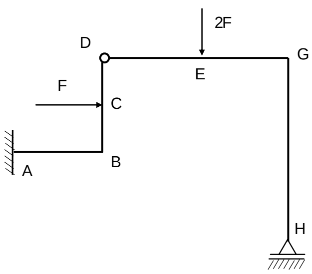
$$\ddot{\theta} + \frac{l}{r}\omega^2\theta = 0$$

odakle vidimo da materijalna (dinamička) tačka mase m vrši male oscilacije, čija je kružna frekvancija:

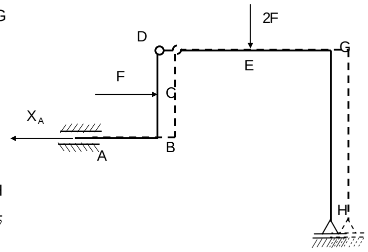
$$\omega_m = \omega\sqrt{\frac{l}{r}} \ .$$

Zadatak 6. Okvirni nosač je utački A uklješten a u H slobodno oslonjen. Koristeći Lagranžev princip virtualni pomeranja (princip najmanjeg dejstva, princip rada) odrediti reakcije veze uklještenja A.

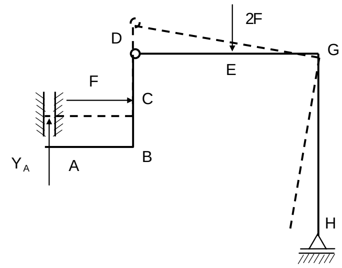
Naka je zadato: $HG = 2EG = 2ED = 2AB = 4CB = 4CD = 4R$



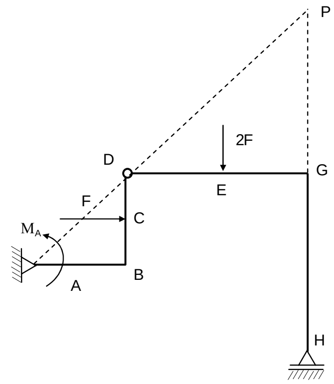
Slika 6a.



Slika 6b.



Slika 6c.



Slika 6d.

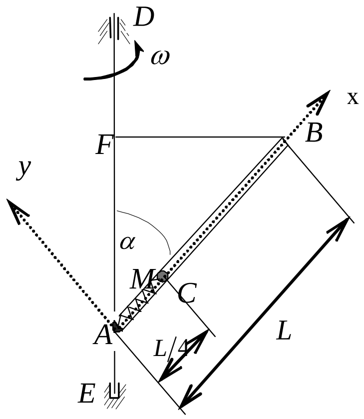
Rešenje:

$$-X_A\delta x + F\delta x = 0$$
$$X_A = F$$

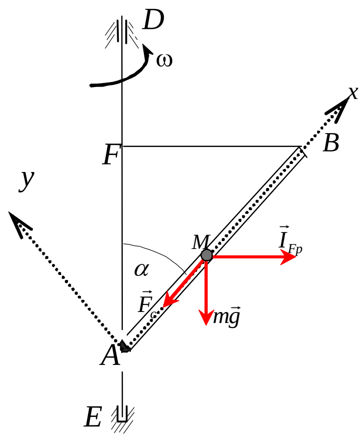
$$Y_A\delta y - 2F\frac{\delta y}{2} = 0$$
$$Y_A = F$$

$$M_A\delta\varphi - FR\delta\varphi - 2F\,2R\frac{\delta\varphi}{2} = 0$$
$$M_A = 3FR$$

Zadatak 7. Materijalna (dinamička) tačka M, mase m, može da se kreće po idealno glatkom cilindričnom žlebu koji se nalazi u cevi AB, dužine L, koja je vezana štapom BF pod uglom α u odnosu na vertikalnu osu DE oko koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω, *slika 6a*. Tačka M vezana je za oprugu krutosti $c = \dfrac{2mg\cos\alpha}{L}$ čiji je drugi kraj vezan za tačku A cevi. Dužina opruge u nenapregnutom stanju je $\dfrac{L}{2}$. U početnom trenutku materijalna tačka se nalazila u položaju C na $x = \dfrac{L}{4}$ i imala je brzinu $v_0 = \dfrac{Lk}{2}$ ($k^2 = \dfrac{2g\cos\alpha}{L} - \omega^2\sin^2\alpha = const.$) u pozitivnom smeru x-ose. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja materijalne tačke M.



Slika 7a.



Slika 7b.

Rešenje:

Kako na materijalnu (dinamičku) tačku dejstvuju sile: sila težine, sila u opruzi, reakcija veze , prenosna sila inercije i Coriolis-ova sila inercije to je osnovna vektorska jednačina dinamičke ravnoteže relativnog kretanja oblika:

$$m\vec{a}_r = \vec{G} + \vec{F}_c + \vec{F}_w + \vec{I}_{Fp} + \vec{I}_{Fcor}$$

Kako sile imaju projekcije u odnosu na izabrani koordinatni sistem:

$m\vec{a}_r = m\ddot{x}\vec{i}$ -inerciona sila relativnog kretanja;

$\vec{G} = -mg\cos\alpha\vec{i} - mg\sin\alpha\vec{j}$ - sila težine;

$\vec{F}_c = -c\left(x - \frac{L}{2}\right)\vec{i}$ -sila u opruzi;

Vektor prenosnog ubrzanja je vektor ubrzanja tačke tela koje se obrće oko nepomične ose konstantnom ugaonom brzinom i ima samo normalnu komponentu ubrzanja :

$$\vec{a}_p = -x\sin\alpha\cdot\omega^2\sin\alpha\cdot\vec{i} + x\sin\alpha\cdot\omega^2\cos\alpha\cdot\vec{j}$$

pa je inerciona sila prenosnog kretanja:

$$\vec{I}_{Fp} = mx\omega^2\sin^2\alpha\cdot\vec{i} - mx\omega^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j}\;;$$

Coriolis-ovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega\cos\alpha & \omega\sin\alpha & 0 \\ \dot{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\omega\dot{x}\sin\alpha\cdot\vec{k}\;,$$

pa je Coriolis-ova inerciona sila:

$$\vec{I}_{Fcor} = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha\vec{k}\;;$$

Sila reakcije (otpora) glatke veze je:

$$\vec{F}_w = F_{wy}\vec{j} + F_{wz}\vec{k}\;.$$

Sada je projekcija osnovne vektorske jednačine dinamičke ravnoteže relativnog kretanja u pravcu relativnog kretanja, definisanog ortom $\vec{i}$, oblika:

$$m\ddot{x} = mx\omega^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha - c\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

odnosno ako uvrstimo zadatkom zadati podatak za koeficijent krutosti opruge $c = \frac{2mg\cos\alpha}{L}$ i preporućenu smenu:

$$k^2 = \frac{2g\cos\alpha}{L} - \omega^2\sin^2\alpha = const.$$

$$\ddot{x} + k^2x = -g\cos\alpha + \frac{c}{m}\frac{L}{2}$$

odnosno

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

rešenje ove diferencijalne jednačine drugog reda je:

$$x = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt),$$

a njegov prvi izvod je:

$$\dot{x} = -C_1k\sin(kt) + C_2k\cos(kt).$$

Integracione konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova

$$t = 0\,,\; x = \frac{L}{4} \text{ i } v_0 = \dot{x}_0 = \frac{Lk}{2}$$

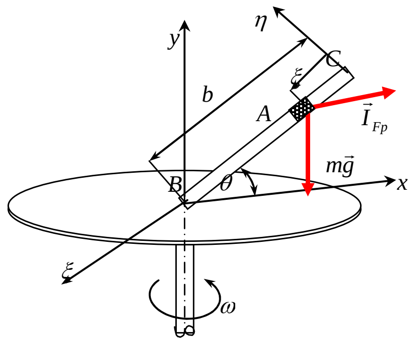
odakle su:

$$C_1 = \frac{L}{4} \text{ i } C_2 = \frac{L}{2} \; ,$$

pa je zakon relativnog kretanja oblika :

$$x(t) = \frac{L}{4}\cos(kt) + \frac{L}{2}\sin(kt).$$

Zadatak 8. Materijalna (dinamička) tačka A, mase m, puštena je iz mira (relativno u odnosu na disk) iz položaja C i klizi bez trenja niz nagnutu cev, pod uglom θ u odnosu na disk, dok se disk zajedno sa cevi okreće oko vertikalne ose, konstantnom ugaonom brzinom ω, slika 8a. Naći vreme za koje će tačka preći put od tačke C do tačke B.



Slika 8a.

Rešenje:

Coriolis-ovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ \dot{\xi}\cos\theta & \dot{\xi}\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -2\omega\dot{\xi}\cos\theta \cdot \vec{k}$$

pa je prema tome Coriolis-ova inerciona sila:

$$\vec{I}_{Fcor} = 2m\omega\dot{\xi}\cos\theta\,\vec{k}$$

Prenosna sila inercije je intenziteta:

$$\vec{I}_{F_p} = m\omega^2(b-\xi)\cos\theta\left(-\cos\theta\vec{\xi} - \sin\theta\vec{\eta}\right),$$

smer joj je prikazan na *slici 8a*, na dinamičku tačku dejstvuje još i sila težine, pa projektovanjem ovih dveju sila na pravac cevi, koji smo usvojili za pravac ose ξ, pravac relativnog kretanja imamo:

$$m\ddot{\xi} = mg\sin\theta - m\omega^2(b-\xi)\cos^2\theta$$

odnosno

$$\ddot{\xi} - \omega^2\xi\cos^2\theta = g\sin\theta - b\omega^2\cos^2\theta$$

Ova nehomogena diferencijalna jednačina drugoga reda ima jedno partikularno rešenje oblika:

$$\xi_p = b - \frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta}$$

Kako je rešenje homogenog dela oblika:

$$\xi_h = C_1 e^{\omega t\cos\theta} + C_2 e^{-\omega t\cos\theta}$$

To je opšte rešenje oblika:

$$\xi = b - \frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta} + C_1 e^{\omega t\cos\theta} + C_2 e^{-\omega t\cos\theta}$$

Određivanje integracionih konstanti C_1 i C_2 iz početnih uslova

$$t = 0\,,\ \xi = 0 \text{ i } \dot{\xi} = 0\,,\ C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta} - b\right)$$

nalazimo da je kretanje tačke dato u obliku:

$$\xi = b - \frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta} + \left(\frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta} - b\right) ch(\omega t\cos\theta), \text{ gde je}$$

$$ch(\omega t\cos\theta) = \frac{e^{\omega t\cos\theta} - e^{-\omega t\cos\theta}}{2}.$$

Za $\xi = b$ nalazimo da je:

$$t = \frac{1}{\omega\cos\theta} arcch\frac{1}{1-k}, \text{ gde je:}$$

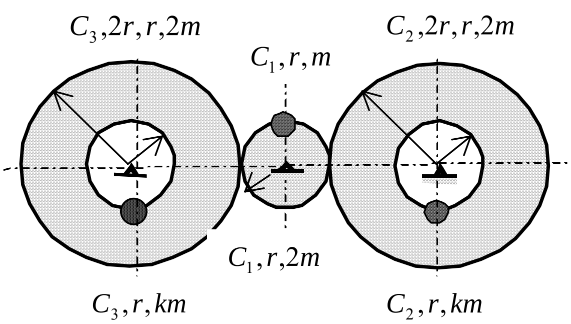
$$k = \frac{b\omega^2\cos^2\theta}{g\sin\theta}.$$

Da bi ovaj odgovor imao smisla mora da je $1-k>0$ odakle dobijamo da ugaona brzina mora da zadovoljava relaciju:

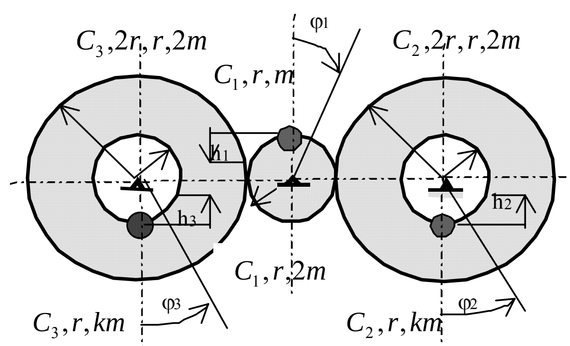
$$\omega^2 < \frac{g\sin\theta}{b\cos^2\theta}.$$

Ako ova nejednakost nije zadovoljena tačka se uopšte neće kretati naniže.

Zadatak 9. Na *slici br.9* prikazan je sistem, koji leži u vertikalnoj ravni, i koji se sastoji od tri teška zupčanika, dva u obliku kružno-prstenastih homogenih diskova, poluprečnika r i $2r$, masa po $2m$, koji mogu u zahvatu da se okreću oko osa kroz C_2, odnosno C_3, a nose na rastojanjima r od osa obrtanja zavarene materijalne tačke masa po $m_2 = km$ i zupčanika u obliku homogenog diska, poluprečnika r, mase $2m$, koji nosi materijalnu tačku mase m na rastojanju r od centra i koji može da se obrće oko ose kroz njegov centar masa C_1, i koji je u zahvatu sa prethodna dva zupčanika. Jedan od položaja ravnoteže sistema je prikazan na slici. Odrediti sve moguće položaje ravnoteže sistema, kao i sve moguće stabilne položaje ravnoteže. Za slučaj da parametar $k \in N$ pripada skupu celih brojeva odrediti sopstvene kružne frekvencije malih oscilacija sistema oko položaja stabilne ravnoteže za najmanju vrednost tog parametra. Koja je najmanja vrednost parametra $k \in N$ za koji je naznačeni na *slici br9* položaj ravnoteže stabilan, a koja za drugi mogući stabilan položaj ravnoteže, različit od položaja koji je prikazan na *slici br. 9*? Za oba slučaja odredi sopstvene kružne frekvencije malih oscilacija sistema.



Slika 9a.



Slika 9b.

Rešenje:

Površina i gustina materijala obruča su:

$$A = 4r^2\pi - r^2\pi = 3r^2\pi;$$

$$M = 2m = \rho A = 3\rho r^2\pi \Rightarrow \rho = \frac{2m}{3r^2\pi}.$$

Generealisana koordinata je ugao φ_1 pa su :

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1 .$$

Momenti inercije masa obruča za ose kroz centare C_2 i C_3 su:

$$J_{C3} = J_{C2} = \rho\left(\frac{(2r)^2\pi}{2} - \frac{r^4\pi}{2}\right) = 5mr^2 ,$$

a moment inercije mase diska za osu kroz cenar C_1 je:

$$J_{C1} = \frac{2mr^2}{2} = mr^2 .$$

Izraz za kinetičku energjiu sistema je:

$$2E_k = J_{C1}\dot{\varphi}_1^2 + J_{C2}\dot{\varphi}_2^2 + J_{C3}\dot{\varphi}_3^2 + km(r\dot{\varphi}_3)^2 + km(r\dot{\varphi}_2)^2 + m(r\dot{\varphi}_1)^2 ;$$

$$2E_k = mr^2\dot{\varphi}_1^2 + 2\cdot 5mr^2\frac{\dot{\varphi}_1^2}{4} + kmr^2\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + mr^2\dot{\varphi}_1^2 \Rightarrow$$

$$2E_k = \frac{mr^2}{2}(9+k)\dot{\varphi}_1^2 .$$

Promena potencijalne enrgije sisitema je:

$$E_p = kmgr(1-\cos\varphi_3) + kmgr(1-\cos\varphi_2) - mgr(1-\cos\varphi_1) = 2kmgr\left(1-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right) - mgr(1-\cos\varphi_1):$$

$$E_p = mgr\left\{2k\left(1-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right) - (1-\cos\varphi_1)\right\}:$$

$$E_p \approx mgr\left\{2k\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2\right\} \Rightarrow$$

$$E_p \approx \frac{mgr}{4}(k-2)\varphi_1^2 \Rightarrow \ \mathrm{k}>2.$$

Lagrange- ova jednačina druge vrste je:

$$\frac{mr^2}{2}(9+k)\ddot{\varphi}_1 + \frac{mgr}{2}(k-2)\varphi_1 = 0,$$

pošto je

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{g(k-2)}{r(9+k)} .$$

Izvod potencijalne energije po koordinati je:

$$\frac{dE_p}{d\varphi_1} = mgr\left(2k\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2} - \sin\varphi_1\right) = 0$$

$$k\sin\frac{\varphi_1}{2} - 2\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sin\frac{\varphi_1}{2} = 0 \Rightarrow \quad \varphi_1 = 2n\pi; \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

Oko položaja ravnoteže:

$$\varphi_1 = \pm 2\arccos\frac{k}{2} + 4n\pi \qquad \text{za} \quad \mathrm{k}<2;$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 = \pm\arccos\frac{k}{2} + n\pi \qquad \text{za} \quad \mathrm{k}<2.$$

$$\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1} = mgr\left(k\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\varphi_1\right) = 0 ,$$

pa je

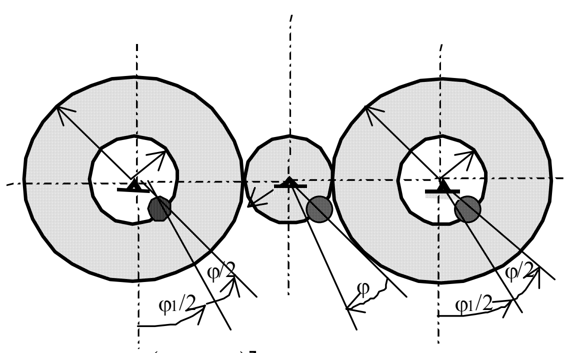
$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=2n\pi\\ k>2}} = mgr\left(k\frac{1}{2}(-1)^n-1\right)=0\,;$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=2p\pi\\ k>2}} > 0\text{, položaj stabilne ravnoteže } E_{p\min}\,,$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=2(2p+1)\pi\\ k>2}} < 0\text{, nestabilan položaj } \quad E_{p\max}\,,$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=2n\pi\\ k<2}} < 0\text{, nestabilan položaj } \quad E_{p\max}\,,$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=\pm 2\arccos\frac{k}{2}+4n\pi\\ k<2}} > 0\text{, položaj stabilne ravnoteže } E_{p\min}\,,$$



$$h_1 = r[\cos\varphi_1 - \cos(\varphi_1+\varphi)] =$$
$$= r[\cos\varphi_1(1-\cos\varphi) - \sin\varphi_1\sin\varphi]$$

$$h_1 \approx r\left[\cos\varphi_1\frac{\varphi^2}{2} - \sin\varphi_1\varphi\right]$$

$$h_3 = h_2 = r\left[\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right] =$$

$$= r\left[\cos\frac{\varphi_1}{2}\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right]$$

$h_3 = h_2 \approx r\left[\cos\frac{\varphi_1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\right]$, pa je izraz za potencijalnu energiju:

$E_p = -mgh_1 + 2kmgh_2 \Rightarrow$

$2E_p = mgr\left(\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\varphi_1\right)\varphi^2 + 2\varphi mgr\left(\sin\varphi_1 - k\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$, drugi sabirak ovog iztraza je približno jednak nuli.

$2E_p = mgr\left(\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\varphi_1\right)\varphi^2$, kako je :

$\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\varphi_1 = \frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - 2\cos^2\frac{\varphi_1}{2} + 1 = \frac{k}{2}\frac{k}{2} - \frac{k^2}{2} + 1 = 1 - \frac{k^2}{4}$,

sledi:

$2E_p = mgr\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)\varphi^2 \Rightarrow 4 - k^2 > 0 \Rightarrow \quad k < 2 \quad i \quad k \in (0,2)$

Lagrange- ova jednačina druge vrste je:

$\frac{mr^2}{2}(9+k)\ddot{\varphi} + \frac{mgr}{4}\left(4-k^2\right)\varphi = 0$, pošto je $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\omega^2 = \frac{g\left(4-k^2\right)}{2r(9+k)}, \quad k < 2 .$$