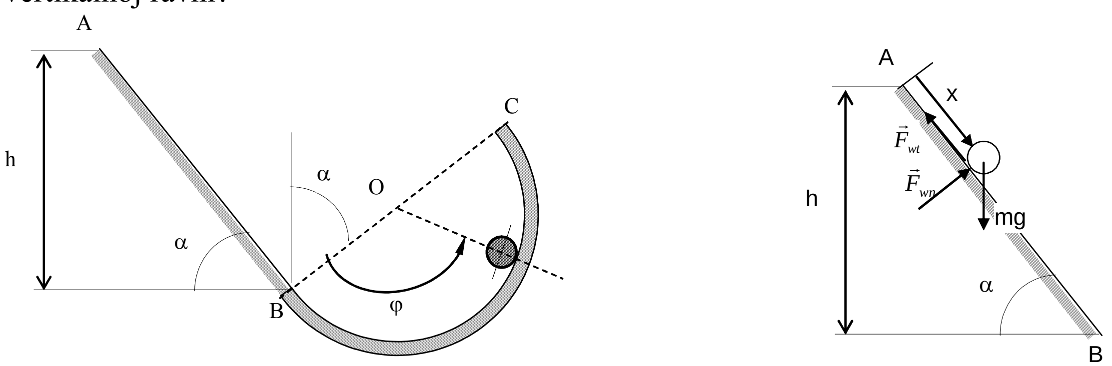
VII vežba

Teoreme mehanike

- Teoreme mehanike- teorema o promeni mehaničke energije, lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja
- Prinudno kretanje materijalne (dinamičke) tačke
- Kretanja materijalne (dinamičke) tačke u polju centralne sile - Bine-ov obrazac

Zadatak 1. Kojom početnom brzinom treba pustiti tešku materijalnu tačku mase m iz vrha hrapave strme ravni AB, koeficijenta trenja klizanja $\mu = 0.1$, visine $h = 5[m]$, nagibnog ugla $\alpha = 60^0$, da bi stigla u tačku C idealno glatkog kružnog luka, središnjeg ugla 3α, poluprečnika $R = h$, pod pretpostavkom da se kreće u vertikalnoj ravni?



Slika 1

Rešenje:

Matrijalna tačka ima jedna stepen slobode kretanja jer se prinudno kreće po liniji, koja je jednostrano yadržavajuća veza. Za generalusanu koordinatu izabraćemo koordinatu x duž strme ravni u pravcu putanje, a mereno od početnog položaja. Na materijalnu tačku dejstvuje aktivna sila težine mg u vertikalnom pravcu, sila inercije suprotno usmerena u vertikalnom pravcu naniže i dve sile otpora jednostrane neidealne veze, hrapave ravni. Jedna je normalna komponenta $\vec{F}_{wn}$ i druga je otpor trenja klizanja $\vec{F}_{wt}$.

Prvo ćemo proučiti kretanje materijalne tačke po prvom delu puta po hrapavoj strmoj ravni od A do B, a zatim po drugom delu puta po kružnom luku od B do C.

Iz principa dinamičke ravnoteže za materijalnu (dinamičku) tačku koja se kreće u vertikalnoj racvni i po hrapavoj strmoj ravni dobijamo dve skalarne jednačine:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{wt}$$

$$0 = -mg\cos\alpha + F_{wn}$$

Iz prve jednačine sledi diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke po hrapavoj, jednostranozadržavajućoj vezi:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\,,$$

odnosno,

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\,,$$

koja omogućava razdvajanje promenljivih i posle integraljenja dobijamo sledeću jednačinu:

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = gx\sin\alpha - \mu gx\cos\alpha + C_1\,.$$

Integraciona konstanta C_1 se određuje iz početnih uslova:

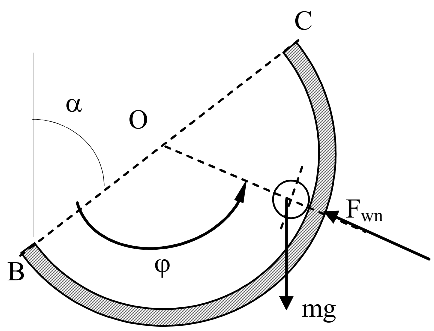
$$t = 0; \quad \dot{x} = v_A; \quad x = 0$$

pa je $C_1 = \frac{1}{2} v_A^2$. Sada imamo:

$$(\dot{x})^2 = 2gx(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + v_A^2$$

Iz uslova da u pložaju B tačka ima brzinu $\dot{x} = v_B$; i pređe put $x = L$; dobijamo: $v_B^2 = 2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + v_A^2$

Kako za kretanje materijalne tačke po strmoj ravni iz položaja A u položaj B rad sila koje dejstvuju na materijalnu tačku duž puta materijalne tačke, to se ovaj prethodni izraz za brzinu v_B materijalne tačke pri prolasku kroz položaj B može dobiti na osnovu teoreme o promeni kinetičke energije materijalne tačke i ovako:



$$E_{kB} - E_{kA} = A_{AB} ,$$

gde je A_{AB} rad aktivnih sila i sila otpora veze na putu između položaja A i B odnosno:

$$\frac{1}{2} m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = mgL\sin\alpha - \mu mgL\cos\alpha$$

odakle je:

$$v_A^2 = v_B^2 - 2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Zatim materijalna tačka sa strme ravni prelazi na polukrućnu putanju. Imajući u vidu da materijalna tačka i na ovom delu puta ima jedan stepen slobode kretanja I u da je putanja luk kružnice, najšpogodnije je ovde na ovom delu za generalisanu koordinatu kretanja materijalne tačke izabrati polarni system koordinata sa koordinatnim početkom u cenru krivine tog luka putanje s tim da za generalisanu koordinatu biramo ugao φ prikazan na slici. Jednačina jednostrane veze ‘ prinuda kretanja po liniji jednačine $r \le R$. Na materijalnu tačku kada se kreće po ovom delu putanje, po glatkoj kružnici su: aktivna sila težine mg u vertikalnom pravcu, sila inercije koja ima dve komponente $I_{FT} = -ma_T = -m\frac{dv}{dt}$ i $I_{FN} = -ma_N = -m\frac{v^2}{R}$ i otpor veze normalnu silu F_{wn}.

Jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke po luku u skalarnom obliku I u prirodnom sistemu koordinata su:

$$m\frac{dv}{dt} = F_T$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_N$$

Kako je brzina materijalne tačke $v = R\dot{\varphi}$, a aktivnu silu težine možemo razložiti u dve komponente u pravcu normale na putanju i rangencijalno na istu tako da prethodni system postaje:

$$mR\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi - \alpha)$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = F_{wn} - mg\cos(\varphi - \alpha)$$

Prva jednačina prethodnog sistema predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja po generalisanoj koordinati, a druga jednačinu iz koje se odredjuje otpor veze. Iz prve jednačine posle razdvajanja promenljivih sledi:

$$mR\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -mg\sin(\varphi - \alpha)$$

a posle integraljenja:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\cos(\varphi - \alpha) + C_2$$

integracionu konstantu C_2 određujemo iz početnih uslova, koji su zadati ugaonom koordinatom I ugaonom brzinom u početnom trenutku kretanja, a ugaona brzina u početku kretanja po ovom delu putanje se uzima iz uslova da je materijalna tačka na taj deo putanje učla preko (ili kroz) tačku B u kojoj strma raven prelazi u kružni luk, pa je brzina v_B koju smo odredili kao brzinu materijalne tačke na strmoj ravni u položaju B sada početna brzina za kretanje po kružnom luku, te su sada početni uslovi:

$$t=0; \quad \dot{\varphi}=\frac{v_B}{R}; \quad \varphi=0$$

pa je:

$$C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{V_B}{R}\right)^2-\frac{g}{R}\cos\alpha$$

tako da je:

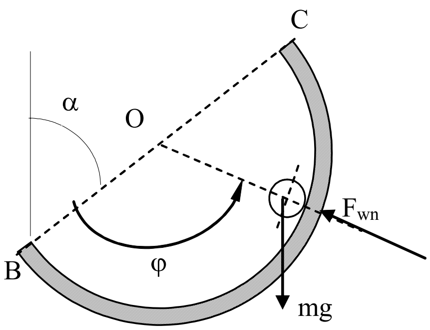
$$\dot{\varphi}^2=2\frac{g}{R}\cos(\varphi-\alpha)+\left(\frac{v_B}{R}\right)^2-2\frac{g}{R}\cos\alpha$$

Sada, iz druge jednačine dinamičke ravnoteže u pravcu normale na putanju, kružni luk, određujemo normalnu komponentu sile otpora veze F_{wn}:

$$F_{wn}=F_n=2mg\cos(\varphi-\alpha)+m\left(\frac{v_B^2}{R}\right)-2mg\cos\alpha+mg\cos(\varphi-\alpha) \text{ ??????====????}$$

odnosno:

$$F_n=3mg\cos(\varphi-\alpha)+m\left(\frac{v_B^2}{R}\right)-2mg\cos\alpha \quad .$$



Uslov da dinamička tačka stigne do položaja C matematički se može napisati kao:

$$F_{wn}\geq 0;$$

a pošto je $\varphi=180^0=3\alpha;$ onda se dobija brzina u tački B

$$v_B^2=\frac{5}{2}gR\,. \text{ ??????====????}$$

Sada je tražena početna brzina materijalne tačke:

$$v_A^2=\frac{5}{2}gR-2gL(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

Do ovog rezultata možemo doći i direktno preko teoreme o promeni kinetičke energije. Kako za kretanje materijalne tačke i po strmoj ravni iz položaja A u položaj B važi teorema o promeni kinetičke energije, kao i za kretanje po kružnom luku od položaja B do položaja C, to se ovaj prethodni izraz za brzinu v_A materijalne tačke pri prolasku kroz položaj B do C može dobiti na osnovu teoreme o promeni kinetičke energije materijalne tačke i ovako:

$$E_{kB}-E_{kA}=A_{AB}\ ,$$
$$E_{kC}-E_{kB}=A_{BC}$$

gde su A_{AB} i A_{BC} rad aktivnih sila i sila otpora veze na putu izmađu položaja A i C kroz B, odnosno:

Saberimo ove dve prethodne jednačine pa dobijamo:

$$E_{kC}-E_{kA}=A_{AB}+A_{BC}$$

Rad sila na delu AB puta po strmoj ravni već smo odredili, te ostaje da odredimmo rad sila na delu puta po kružmom luku. Kako je kružni luk idealna veza I ima samo normalnu komponentu to je ona u svakoj tački kružng luka upavna na put te je rad te sile jednak nuli na delz od položaja B do C. Aktivna sila težine vrši rad podizanja materijalne tačke sa visine koja odhovara tački B do visine u tački C, akako je sila suprotno smerna od smera kretanja po putu taj rad je negativan pa je:

$$A_{BC}=-mgR[\cos\alpha+\cos(\pi-2\alpha)]=-mgR[\cos\alpha-\cos 2\alpha]=-mgR[\cos\alpha+1-2\cos^2\alpha]$$

I sledi:

$$\frac{1}{2}m\left(v_C^2-v_A^2\right)=mgL\sin\alpha-\mu mgL\cos\alpha-mgR[\cos\alpha+\cos(\pi-2\alpha)]$$

$$v_A^2 = v_C^2 - 2g\left[L(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - R\left[\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha\right]\right]$$??????====????

Napomena: Za domaći zadatak proveriti rešenja iz ovog zadatka i provetiri pojedine izraze i pokazati da uba pristupa u rešavanju zadatka treba da daju iste rezuktate. Obrazloži nedostajuća obrazloženja!

Prva dva studenta koja donesu doradjen ovaj zadatak i ispravljen, biće odlobodjeni prvog ispitnog kolokvijuma!

Zadatak 2. Pod dejstvom centralne sile F materijalna tačka mase m se kreće po leminskati, čija je jednačina u polarnom sistemu koordinata r i φ: $r^2 = a\cos(2\varphi)$, gde je a-konstanta, r- rastojanje pokretne materijalne tačke od centra sile. U početnom trenutku $t = 0$, materijalna tačka je bila udaljena za $r = r_0$ centra sile, a dobila je brzinu jednaku v_0, tako da vektor brzine zaklapa sa pravom što spaja tačku sa centrom sile ugao α. Odrediti aktivnu silu F koja dejstvom materijalnu tačku prinušuje da se kreće po lemniskati. pod pretpostavkom da zavisi samo od rastojanja r.

Rešenje:

Materijalna tačka je slobodna i njen položaj u invarijantnoj ravni u kojoj se kreće pod dejstvom centralne sile koja zavisi samo od rastojanja r te materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja i njen položaj u svakom trenutku kretanja je odredjen dvema polarnim koordinatama $r = r(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$ poznate putanje $r^2 = a\cos(2\varphi)$. Na materijalnu tačku dejstvuje samo aktivna sila i to centralna sila $F = F(r)$. Da bi odredili taj zakon promene sile od radijusa r koristićemo Binet-ovu diferencijalnu jednačinu kretanja, kojia je je predstavljena preko $u = \dfrac{1}{r}$, a ona glasi:

$$F(r) = -mC^2u^2\left(u'' + u\right)$$

Kako imamo jednačinu putanje materijalne tačke u polarnom sistemu koordinmata to diferenciranjem nije teško doći do izraza za zakon promene aktivne centralne sile od radijusa. Koristeći smenu:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos^{-\frac{1}{2}}(2\varphi)$$

odakle su:

$$u' = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(2\varphi)\cos^{-\frac{3}{2}}(2\varphi)$$

i

$$u'' = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos^{-\frac{1}{2}}(2\varphi)\left[2 + 3\sin^2(2\varphi)\cos^{-2}(2\varphi)\right].$$

Pošto važi integral površine sledi da je:

$$C = r_0 v_{C0} = r_0 v_0 \sin\alpha$$

jer je koordinata φ ciklička koordinata.

Iz Bine-ove diferencijalne jednačine $F(r) = -mC^2u^2\left(u'' + u\right)$, posle unošenja dobijanih izvoda imamo da je:

$$F(r) = -m(r_0 v_0 \sin\alpha)^2\frac{1}{a}\cos^{-1}(2\varphi)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos^{-\frac{1}{2}}(2\varphi)\left(2 + 3\sin^2(2\varphi)\cos^{-2}(2\varphi)\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\cos^{-\frac{1}{2}}(2\varphi)\right)$$

što posle sređivanja daje:

$$F(r) = -m(r_0 v_0 \sin\alpha)^2\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\cos^{-\frac{3}{2}}(2\varphi)\left(3 + 3\sin^2(2\varphi)\cos^{-2}(2\varphi)\right)$$

odnosno:

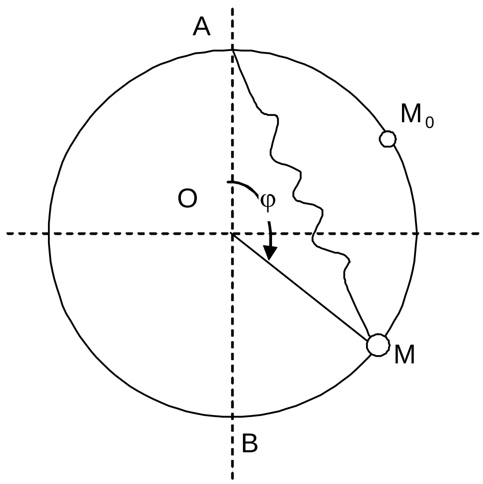
$$F(r) = -3m(r_0 v_0 \sin\alpha)^2 \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \cos^{-\frac{7}{2}}(2\varphi)$$

odnosno kako je $r^2 = a\cos(2\varphi)$ dobijamo:

$$F(r) = -\frac{3ma^2}{r^7}\left(r_0{}^2 v_0{}^2 \sin^2\alpha\right),$$

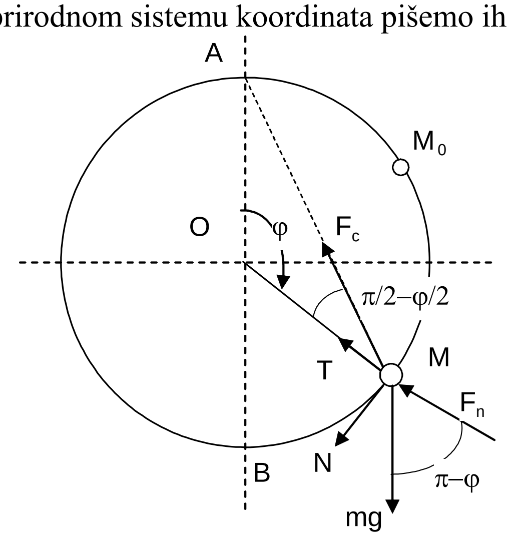
Na osnovu poslednjeg izraza zaključujemo da je centralna sila privlačna i obrnuto proporcionalna sedmom stepenu rastojanja tačke od centra sile privlačenja materijalne tačke pri njenom kretanju po lemniskati..

Zadatak 3. O najvišu tačku nepokretnog prstena poluprečnika R, koji je u vertikalnoj ravni, obešen je pomoću opruge krutosti $c = \frac{10}{7}\frac{mg}{R}$ teret M, mase m. Odrediti pritisak i brzinu tereta u najnižoj tački B prstena. U početnom položaju tereta M poznato je rastojanje $AM_0 = R$, pri čemu je opruga izdužena, a njena dužina je dva puta veća od dužine u nenapregnutom stanju, dok je početna brzina tereta jednaka nuli.



Rešenje: Materijalna tačka se kreće po obruču prinudnio, te nije slobodna več na nju dejstvuju dve veze, jedna da je u ravni obruča i druga da se kreće po obruču, što znači da materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja. Za generalisanu koordinatu biramo centralni ugao φ i polarni sistem koordinata r i φ sa koordinatnim početnom u centru kruga O, ali je jednačina veze $f(r,\varphi) = r - R = 0$, što predstavlja jednačinu kruga. Na materijalnu tačku dejstvuju sledeće sile: 1* *dve aktivne sile*: *sila težine* mg materijalne tačke usmerena vertikalno naniže, koja je konzervativna sila i ima potencijal i jedna *centralna sila* $\vec{F}_c = -c\Delta\ell$ koja zavisi od radtojanja te pokretne po obruću materijalne tačke od centra sile, koji se nalazi u tački A vezivanja opruge, jer se putem opruge ostvaruje dejstvo te centralne sile koja uvek pada u pravac MA od materijalne tačke ka centru sile; 2* jedna sile otpora veze F_n koja je otpot idealne veze oblika linije kružnice te je otpor te linije pri kretanju materijalne tačke po njoj upravan na tu liniju i uvek para u pravac koji prolazi kroz centar kruga koji je centar krivine putanje po kojoj se kreće materijalna tačka; 3* sila inercije koja ima dve komponente jednu tangencijalnu i jednu normalnu na kružnu putanju po kojoj se kreće materijalna tačka.

Imajuči u vidu analizu za izbor koordinatnog sistema za opisivanje kretanja ove materijalne tačke po liniji, analizu sila, i njihov karakter, kao i oblik putanje, to koristeći princip dinamičke ravnoteže iskazan u polarnom sistemu koordinata odnosno prirodnom sistemu koordinata pišemo ih u sledećem obliku:



$$m\frac{dv}{dt} = F_T$$
$$m\frac{v^2}{R} = F_N$$

Kako je brzina tačke $v = R\dot{\varphi}$, a sve sile, aktivne i reaktivne možemo razložiti na komponente u pravcima normale i tangente na putanju koja nam je zadata u vidu kružnice, to prethodne jednačine postaju:

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cdot \sin(\pi - \varphi) - F_C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$mR\dot{\varphi}^2 = -mg \cdot \cos(\pi - \varphi) + F_C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + F_n$$

gde smo uveli zakon promene centralne sile, koja se ostvaruje pomoću opruge čiju masu zanemarujemo, a ona je u obliku linearne zavisnosti od rastojanja materijalne tačke od centra privlačenja: $\vec{F}_c = -c\Delta\ell$ gde je c krutost opruge, a $\Delta\ell$ izduženje opruge, koje odredjujemo oz geometrijskih odnossa slike. Na osnovu toga možemo napisati:

$$F_C = c\left(2R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{R}{2}\right)$$

Posle transformacije prethodnog sistema jednačina dinamičke ravnoteže pokretne tačke, dobijamo jednu diferencijalniu jednačinu kretanja materijalne tačke i jednu ravnoteže sila. Posle sprovedenog integraljenja differencjalne jednačine

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cdot \sin(\varphi) - cR \cdot \sin(\varphi) + \frac{1}{2}cR\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

dobijamo:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos(\varphi) + \frac{c}{m}\cos(\varphi) + \frac{c}{m}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C_1$$

i integracionu konstantu odredjujemo iz poznatih uslova; $\varphi = 60^0$; $\dot{\varphi} = 0$; odakle sledi $C_1 = \frac{1}{2}\frac{g}{R} - \frac{cR}{m}$ te je

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\left(1 - 2\cos(\varphi)\right) + \frac{c}{m}\left(2\cos(\varphi) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\right)$$

Kako je potrebno odrediti kinetičke parameter u tački B to dobijamo:

$$B: \ \varphi = \pi; \ \dot{\varphi}_B^2 = \frac{1}{7}\frac{g}{R}; \ v_B^2 = \frac{1}{7}gR$$

Tražena sila otpora veze F_n u u builo kom položaju na putanju materijalne tačke u kretanju je:

$$F_n = mg\left(1 - 3\cos(\varphi)\right) + cR\left(2\cos(\varphi) - 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{5}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\right)$$

dok kada materijalna tačka dospe u položaj u tački B ima rednost:

$$B: \ \varphi = \pi; \qquad F_{nB} = -mg$$

Kako je system kretanja materijalne mačke po krugu definisan ovim zadatkom konzervativni, jer su I sila teže I centralna sila konzervativne sile i imaju funkciju sile, do rešenja se može doći I na drugi način, preko teoreme o promei kinetičke energije:

$$E_{kB} - E_{k0} = U_B - U_0$$

gde je

$$E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2; \quad E_{k0} = 0;$$

Za položaj pokretne materijalne tačke kada je ona u B možemo da napišemo:

$$m \cdot a_{nB} = m\frac{v_B^2}{R} = -mg + F_{nB} + F_{cB}$$

Funkcija konzervativnih sila je:

$$U = U^g + U^c = -mgz - \frac{1}{2}c(\Delta L)^2;$$

Jer kako smo napred rekli obadve *aktivne sile*: *sila težine* mg materijalne tačke usmerena vertikalno naniže, je konzervativna sila i ima potencijal, asko i *centralna sila* $\vec{F}_c = -c\Delta\ell$ koja zavisi od rastojanja te pokretne po obruću materijalne tačke od centra sile, koji se nalazi u tački A vezivanja opruge, jer se putem opruge ostvaruje dejstvo te centralne sile koja uvek pada u pravac MA od materijalne tačke ka centru sile

Za položaj pokretne materijalne tačke kada je ona u B možemo da napiđemo

$$z_B = 0; \quad z_0 = \frac{3}{2}R; \quad \Delta L_B = \frac{3}{2}R; \quad \Delta L_0 = \frac{1}{2}R;$$

te je:

$$U_B = -mgz_B - \frac{1}{2}c(\Delta L_B)^2 = -\frac{9}{8}cR^2$$

$$U_0 = -mgz_0 - \frac{1}{2}c(\Delta L_0)^2 = -\frac{3}{2}mgR - \frac{1}{8}cR^2$$

odakle sledi

$$v_B^2 = 3gR - 2\frac{cR^2}{m}$$

$$v_B^2 = \frac{1}{7}gR$$

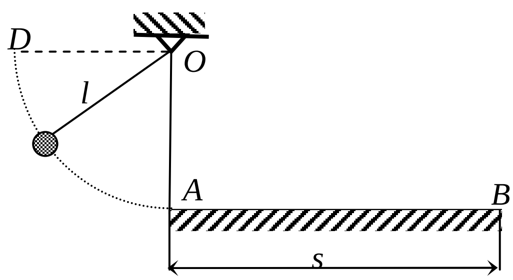
te su komponete tražene sile veze (otpora veze) ,normalna i cirkularna za položaj pokretne materijalne tačke kada je ona u B:

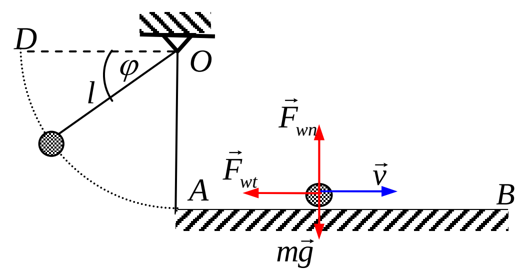
$$F_{nB} = m\frac{v_B^2}{R} + mg - F_{cB}$$

$$F_{cB} = c \cdot \Delta L_B = \frac{3}{2}cR$$

dok je njen intenzitet: $F_{nB} = -mg$.

Zadatak 4. Koliku početnu vertikalnu brzinu v_0 treba saopštiti teškoj materijalnoj (dinamičkoj) tački M ,mase m, u položaju D, obešenoj u tački O pomoću nerastegljivog konca dužine l, pa da se konac prekine u trenutku kada je vertikalan, ako se on kida pri sili $F_{\max} = 7G$? Koliko mora biti koeficijent trenja hrapave horizontalne ravni AB, $s = 9l$ dužine , po kojoj se tačka kreće dalje, pod pretpostavkom da se ne odvaja od nje, pa da odnos brzina tačke M u položajima B i A bude $\frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{2}$.





Rešenje:

Materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja jer je pod dejstvom veza koje su ostvarene koncem i izložena je dejstvu sile težine, pa se radi o sistemu na koji dejstvuje konzervativna sila te se, za prvu fazu kretanja materijalne tačke, može pronemiti teorema o promeni kinetičke energuje izražena pomoću funkcije sile (ili potencijala) bez sastavljanja diferencijalnih jednačina kretanja i njihovog rešavanja, jer je potrebno odrediti samo silu u koncu, pa je dovoljno prethopdnom pridružiti jednačinu dinamičke ravnoteže sila u tangencijalnom pravcu na kružni deo putanje kretanja materijalne tačke. Za drugu deo kretanja po hrapavoj ravni sistem ima svojstva nekonzervativnog sistema, te tada treba uključiti u račun rad sila neidealnihveza (sila trenja). Predlažem da student na osnovu teorijskih izlaganja na predavanju napravi analizu sila u ovom zadatku.

’ Od tačke D do A materijalna tačka se kreče po krugu, pa se iz intregrala energije i projekcije jednačine dinamičke ravnoteže na pravac normale u položaju A dobijaju relacije:

$$\frac{1}{2}m\left(v_A^2 - v_D^2\right) = mgl$$

$$\frac{mv_A^2}{l} = F_n - mg$$

U ternutku kada je tačka u položaju A konac se kida pri sili $F_{nA} = F_{\max} = 7mg$, pa dobijamo iz prethodnih jednačina:

$$v_A^2 = 6gl \text{ i } v_D^2 = 4gl.$$

Od položaja A pa nadalje tačka se kreće po hrapavoj ravni. Kako je:

$$F_{wn} = mg \quad \text{i} \quad F_{wt} = \mu F_{wn} = \mu mg$$

To se na osnovu integrala “žive sile” :

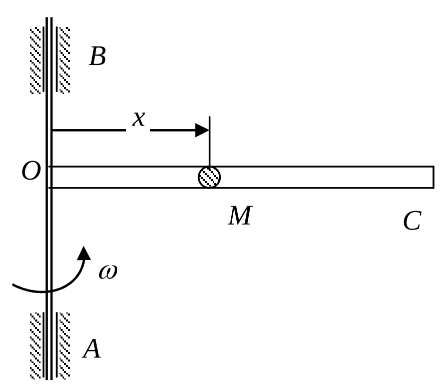
$$\frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = A_{A-B},$$

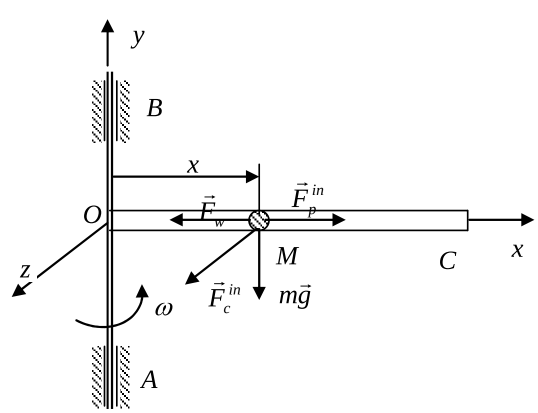
gde je A_{A-B} rad sile trenja na rastojanju AB ,dobija:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{6}{4}gl - 6gl\right) = -9\mu mgl$$

odakle sledi da je: $\mu = \frac{1}{4}$.

Zadatak 5. Horizontalna cev OC dužine l obrće se oko nepokretne ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω. U cevi se nalazi materijalna (dinamička) tačka M, mase m, na koju dejstvuje otporna sila $\vec{F} = -k\vec{v}$, gde je k konstanta, a $\vec{v}$ brzina tačke u odnosu na cev, njena relativna brzina. Ako je $\frac{k}{m} = \frac{3}{2}\omega$ odrediti zakon kretanja dinamičke tačke u cevi. U početnom trenutku materijalna tačka je bila na rastojanju $OM_0 = \frac{l}{5}$ i imala je početnu brzinu $v_0 = \frac{l\omega}{10}$ u odnosu na cev. Posle kog vremena će pokretna materijalna tačka napustit cev?





Slika 5a. *Slika 5b.*

Rešenje:

Osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_w + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in}$$

Kako su projekcije relativnog, prenosnog i Coriolis-ovog ubrzanja:

$$a_r = \ddot{x}\vec{i}\ ;\ \vec{a}_p = -x\omega^2\vec{i}\ ;\ \text{i}\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = -2\omega\dot{x}\vec{k}\ ;$$

to su onda komponente sila inercije prenosna (vodeća) i Coriolis-ova:

$$\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p = mx\omega^2\vec{i}$$

i

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_c = 2m\omega\dot{x}\vec{k}\ .$$

Sila reakcije veze je

$$\vec{F}_w = F_{wy}\vec{j} + F_{wz}\vec{k}\ ,$$

a aktivne sile-otporna sila i sila težine u zbiru daju:

$$\vec{F} = -k\dot{x}\vec{i} - mg\vec{j}\ .$$

Sada su tri projekcije osnovne jednačine dinamike relativnog kretanja u tri pravca Descares-ovog koordinatnog sistema:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - k\dot{x}$$

$$0 = -mg + F_{wy}$$

$$0 = F_{wz} + 2m\omega\dot{x}$$

odnosno rešavajući prvu jednačinu dobijamo:

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\omega\dot{x} - \omega^2 x = 0$$

ovo je obična diferencijalna jednačina drugog reda čije rešenje pretpostavljamo u obliku

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

pa dobijamo odgovarajuću karakterističnu jednačinu oblika:

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\omega\lambda - \omega^2 = 0\,,$$

čija su rešenja oblika:

$$\lambda = \frac{-\frac{3}{2}\omega \pm \sqrt{\frac{9}{4}\omega^2 + \omega^2}}{2}$$

odnosno: $\lambda_1 = \dfrac{\omega}{2}$ $\quad \lambda_2 = -2\omega$ Tako da je konačno rešenje oblika:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{\omega}{2}t} + C_2 e^{-2\omega t}\quad ,$$

a njegov prvi izvod je:

$$\dot{x} = C_1\frac{\omega}{2}e^{\frac{\omega}{2}t} - 2C_2\omega e^{-2\omega t}\ .$$

Integracione konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uslova koji kažu da je tačka u početnom trenutku bila na rastojanju $OM_0 = \dfrac{l}{5}$ i imala je početnu brzinu

$$v_0 = \frac{l\omega}{10}$$

tj.

$$t=0\begin{cases} x = x_0 = l/5 \\ \dot{x}_0 = v_0 = l\omega/10 \end{cases},$$

tako da dobijamo sistem dve algebarske jednačine po nepoznatim integracionim konstantama:

$$C_1 + C_2 = \frac{l}{5}$$

$$C_1\frac{\omega}{2} - 2C_2\omega = \frac{l\omega}{10}$$

odakle sledi :

$$C_1 = \frac{l}{5}$$

$$C_2 = 0$$

pa je konačna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke oblika:

$$x(t) = \frac{l}{5}e^{\frac{\omega}{2}t}$$

a zakon promene relativne brzine je :

$$\dot{x}(t) = \frac{l\omega}{10}e^{\frac{\omega}{2}t}.$$

Tačka će napustiti cev kada pređe celu njenu dižinu tj.

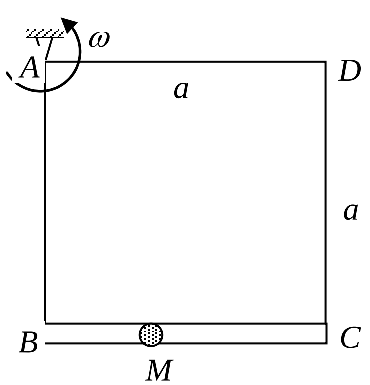
$$l = \frac{l}{5}e^{\frac{\omega}{2}t_k}$$

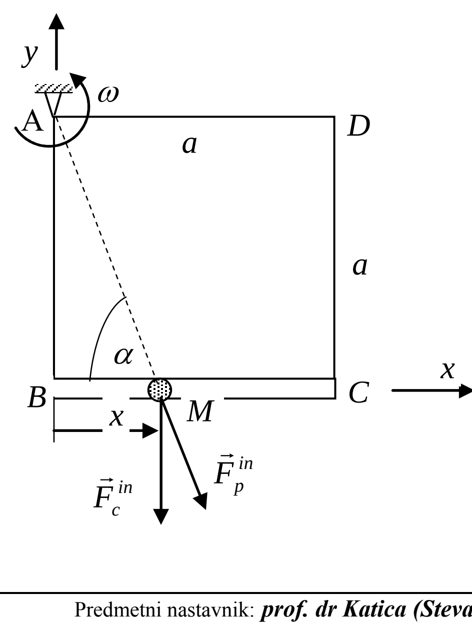
odakle dobijamo vreme za koje tačka napusti cev :

$$t_k = \frac{2}{\omega}\ln(5)$$

Zadatak 6. Kvadratna pločica $ABCD$, zanemarljive mase, stranice a, obrće se oko vertikalne ose kroz tačku A konstantnom ugaonom brzinom ω. Duž stranice BC kreće se materijalna (dinamička) tačka M, mase m. U početnom trenutku materijalna tačka M je bila u položaju B i imala je relativnu brzinu v_0. Odrediti:

a) Zakon relativnog kretanja materijalne tačke M po suportu,
b) Veličinu ugaone brzine ω prenosnog kretanja suporta da bi relativna brzina tačke M u položju C bila $2v_0$,
c) Komponente reakcije veze.





Slika 6a. *Slika 6b.*

Rešenje:

Sa *slike 6b*. jasno je da je rastojanje $\overline{AM}$: $\overline{AM}^2 = a^2 + x^2$ kao i da su :

$\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Prenosno ubrzanje materijalne tačke koja se relativno kreće po suportu je ubrzanje one tačke suporta u kojoj se ona trenutno nalazi. Suport vrši rotaciono (obrtno) prenosno kretanje i obrće se oko nepmićne tačke konstantnom ugaonom brzinom i ima samo normalnu komponentu oblika : $\vec{a}_p = \overrightarrow{MA}\omega^2$, gde je $\overrightarrow{MA} = -x\vec{i} + a\vec{j}$.
Kako su prenosna ugaona brzina $\vec{\omega}_p = \omega\vec{k}$ i relativna brzina $\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i}$ onda je Coriolis-ovo ubrzanje:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 2\omega\dot{x}\vec{j}\,.$$

Sada su komponente sila inercije prenosnog kretanja (vodeća sila inercije):

$$\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p = m\omega^2 x\vec{i} - m\omega^2 a\vec{j}$$

i Coriolis-ova sila inercije:

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_{cor} = -2m\omega\dot{x}\vec{j} \qquad .$$

Sila reakcije otpora idealno glatke veze je: $\vec{F}_w = F_{wy}\vec{j}$. Osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_w + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in}$$

Njena projekcija u pravcu orta $\vec{i}$ daje diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji vrši prenosno kretanje:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x$$

koja posle razdvajanja promenljivih i integraljenja ima integral:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \omega^2\frac{x^2}{2} + C\,,$$

gde integracionu konstanu C određujemo iz početnih uslova;

$t = 0;\quad \dot{x} = v_0;\quad x = 0;$ tj. $C = \dfrac{v_0^2}{2}$, pa je:

$$\dot{x}^2 = \omega^2 x^2 + {v_0}^2$$

Kako se traži veličina ugaone brzine ω da bi relativna brzina pokretne materijalne tačke M u položju C bila $2v_0$, to trebaju biti zadovoljeni uslovi: $x = a;\quad \dot{x} = 2v_0;$ odakle se dobija tražena ugaona brzina: $\omega = \sqrt{3}\dfrac{v_0}{a}$ prenosnog kretanja suporta.

Diferencijalna jednačina relativnog kretanja:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

ima rešenje u obliku:

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

i prvi izvod rešenja:

$$\dot{x} = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}\,.$$

Integracione konstante A i B određujemo iz početnih uslova i dobijamo:

$$A = \frac{v_0}{2\omega} \qquad B = -\frac{v_0}{2\omega}$$

pa je konačna jednačina relativnog kretanja ove materijalne (dinamilke) tačke po suportu koji vrši rotaciju oko nepokretne tačke:

$$x(t)=\frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right).$$

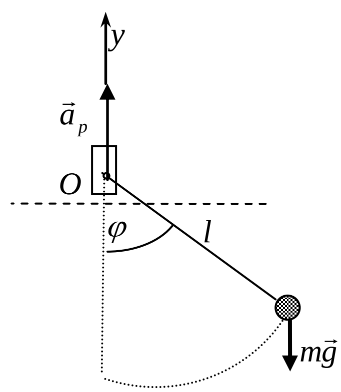
Projekcija osnovne jednačine dinamike relativnog kretanja u pravcu orta $\vec{j}$ je:

$$F_{wy}=2m\omega\dot{x}+ma\omega^2$$

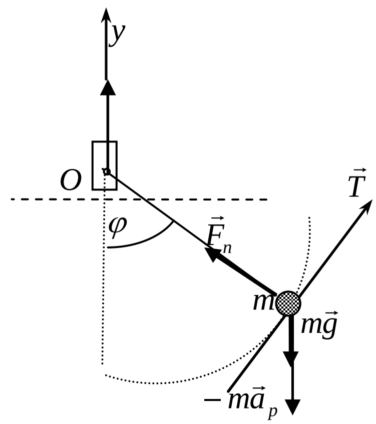
odakle dobijamo traženu reakciju veze u obliku:

$$F_{wy}=ma\omega^2\left(1+2\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2a^2}+\frac{x^2}{a^2}}\right).$$

Zadatak 7. Tačka vešanja O matematičkog klatna kreće se pravolinijski naviše, po Oy osi, ubrzanjem a_p .Odrediti period malih oscilacija ovog klatna.



Slika 7a.



Slika 7b.

Rešenje:

Materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja i zato usvojimo koordinatu φ za generalisanu koordinatu pokretnom sistemu koordinta. Kretanje tačke vešanja je prenosno kretanje, ubrzanjem a_p, a klaćenje je relativno kretanje. Dejstvo veze se ostvaruje koncem, a otpor veze je sila u koncu. Osnovna jednačina dinamičke ravnoteže relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r=m\left(\vec{a}_{rT}+\vec{a}_{rN}\right)=\vec{G}+\vec{F}_n+\left(-m\vec{a}_p\right)$$

te za tangencijaljni pravac dobijamo:

$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi-ma_p\sin\varphi\approx-m\left(g+a_p\right)\varphi,$$

kada se posmatraju male oscilacije, tj. kada se uzme da je $\sin\varphi\approx\varphi$ odnosno

$$\ddot{\varphi}+\frac{g+a_p}{l}\varphi=\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$$

gde smo uveli smenu za sopstvenu kružnu frekvenciju:

$$\omega^2=\frac{g+a_p}{l},$$

pa je period malih oscilacija ovog klatna:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_p}}=\frac{T_s}{\sqrt{1+\frac{a_p}{g}}},$$

gde je $T_s=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, period oscilovanja matematičkog klatna sa nepokretnomta čkom vešanja.