V vežba

Teoreme mehanike , konzervativne sile

- Diferencijalne jednačine kretanja u različitim koordinatnim sistemima
- Teoreme mehanike- teorema o promeni mehaničke energije
- Konzervativne sile –Određivanje funkcije sile, rad konzervativne sile

Zadatak 1. Materijalna tačka mase $m = 2[kg]$ kreće se pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli jednačine $y = 4px^2$, gde je $p[m^{-1}]$ parametar dimenzione saglasnosti, iz početnog položaja $N_0(y_0 = 10\,cm)$ bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u vertikalnoj ravni. Koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?

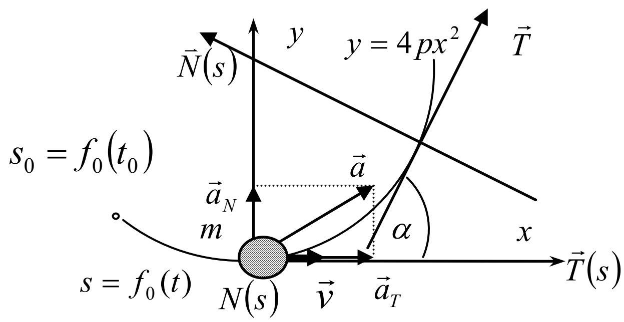
Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes-ove koordinate (x, y, z)***, medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde paraboli, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija – parabola u ravni*** xOy ***ili*** $z = 0$***, a druga veza je*** $f(x, y) = y - 4x^2 = 0$***. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan*** xOy ***vertikalna.***

Zadatkom se traži da se napišu jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole kada je izložena dejstvu dve geometrijske stacionarne veze i dejstvu sile sopstvene težine primenom principa dinamičke ravnoteže. Kako ova materijalna tačka ima, kako smo prethodnom analizom zaključili, jedan stepen slobode kretanja za generalisanu koordinatu izabraćemo put po luku parabole po kojoj se kreće i označićemo ga sa: s. Brzina materijalne tačke pada u pravac tangente na putanju, ovde na zadatu parabolu i iznosi

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\ .$$

Pravac tangente na putanju materijalne tačke – zadatu parabolom je definisan uglom α, i jasno je da je $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx} = y' = 8px$ za slučaj zadate parabole. Za primenu principa dinamičke ravnoteže potrebno je napraviti analizu sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku. Na materijalnu tačku dejstvuju sledeće sile: aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{j}$, a dejstvom veza javlja se sila otpora veza koja je upravna na liniju putanje i može se izraziti u obliku $\vec{F}_{wN} = \vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x, y)$, jer se radi o idealnim vezama $z = 0$ **i** $f(x, y) = y - 4px^2 = 0$**,** pa nema tangencijalne komponente. Analizom zaključujemo da se radi o kretanju u ravni xOy**.** Javlja se i sila inercije koja je suprotno smerna od vektora ubrzanja materijalne tačke pomoženog masom, što je definisano jednom od definicija vektorskih invarijanti dinamike materijalne tačke. Za silu inercije možemo da napišemo: $\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$. U ovom slučaju radi jednostavnosti rešavanja zadatka dobro je koristiti prirodni koordinatni sistem linije putanje kretanja materijalne tačke, ali se jednačine kretanja mogu napisati i u Descartes-ovom sistemu koordinata.



Princip dinamičke ravnoteže smo formulisali sledećim iskazom:
*Materijalno kruto telo je u **dinamičkoj ravnoteži** ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze

$$(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda\, grad\ f(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuju dve geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda_1\, grad\ f_1(x,y,z) + \lambda_2 grad f_2(x,y,z) = 0$$

gde su λ_1 i λ_2 nepoznati Lagrange-ovi množioci veza $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na obe površi veza, odnosno liniju

$$(\vec{v}(t), grad\ f_1(x,y,z)) = 0 \quad \text{i} \quad (\vec{v}(t), grad\ f_2(x,y,z)) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda_1\, grad\ f_1(x,y,z) + \lambda_2 grad f_2(x,y,z)$ je upravna na tangentu na presečnu krivu obe površi idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i linije po kojoj se kreće .

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad (\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

a R je poluprečnik krivine $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$.

Element luka s duž parabole – putanje materijalne tačke je:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju smo napisali:

$\left(-m\vec{a}\right) + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$ i uslov brzine $\left(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)\right) = 0$

ili

$$\left(-m\vec{a}_N\right) + \left(-m\vec{a}_T\right) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

Iz prikazanih vektorskih jednačina možemo napisati odgovarajući broj skaranih jednačina. Iz prvog zapisa možemo da napišemo dve diferencijalne jednačine :

$$\left(-m\ddot{x}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\left(-m\ddot{y}\right) + \left(-mg\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i uslov za brzinu

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ili kako je $f(x,y) = y - 4px^2 = 0$, prethodni sistem diferencijalnih jednačina i uslov za brzinu postaju:

$$\left(-m\ddot{x}\right) - 8\lambda px = 0$$

$$\left(-m\ddot{y}\right) + \left(-mg\right) + \lambda = 0$$

$$-8p\dot{x}x + \dot{y} = 0$$

U Descartes-ovom sistemu koordinata smo dobili dve diferencijalne jednačine i jedan uslov za brzinu, iz kojih treba odrediti Lagrange-ov množilac veze i dve koordinate što nije tako prost zadatak. Zato ćemo se ovde i zaustaviti jer je zadatkom tražemo da se napišu diferencijalne jednačine.

Lagrange-ov množilac veze je:

$$\lambda = m\left(\ddot{y} + g\right) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)$$

i sila otpora veze je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\ f(x,y,z) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)\left(-8px\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Pri tome je potrebno prethodno rešiti nelinearnu diferencijalnu jednačinu:

$$\ddot{x} + 8px\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right) = 0 \qquad y = 4px^2$$

po koordinati x koju smo u Descartes-ovom sistemu koordinata izabrali za generalisanu koordinatu.

Kako je:

$$\ddot{x}\left(1 + 64p^2x^2\right) = -8px\left(8p\dot{x}^2 + g\right) \qquad \ddot{x} = -\frac{8px\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\left(1 + 64p^2x^2\right)}$$

Sledi da je

$$\lambda = m\left(8p\dot{x}^2 - 64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+g\right) = m\left(\frac{8p\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} - 64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} + \frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right) =$$

$$= m\left(\frac{8p\dot{x}^2+8p\dot{x}^2 64p^2x^2}{\left(1+64p^2x^2\right)} - \frac{\left(8p\dot{x}^2 64p^2x^2 + g64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} + \frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right) = m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

I konačno se za Lagrange-ov množilac veze dobija izraz preko kvadrata horizontalne komponente brzine i kvadrata apscise položaja materijalne tačke na paraboli.:

$$\lambda = m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Normalna komponenta otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po idealno glatkoj paraboli u vektorskom obliku je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\; f(x,y,z) = m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}\left(-8px\vec{i}+\vec{j}\right)$$

što predstavlja izraz u funkciji zavisnosti od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Intenzitet normalne komponente otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po paraboli

$$\left|\vec{F}_w\right| = F_w = \left|\vec{F}_N\right| = F_N = m\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$$

i zavisi samo od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Drugi pristup je da vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po paraboli pod dejstvom sopstvene težine analiziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanje. Zato ćemo razmotriti u drugom obliku istu vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže te materijalne tačke na paraboli:

$$\left(-m\vec{a}_N\right)+\left(-m\vec{a}_T\right)+m\vec{g}+\vec{F}_{N.}=0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i:

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right)+\left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right)+mg\left(-\sin\alpha\vec{T}-\cos\alpha\vec{N}\right)+F_{N.}\vec{N}=0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ parabole, ose oskulatorne ravni parabole dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s}-mg\sin\alpha=0$, u pravcu tangente na putanju – na parabolu

$-m\frac{v^2}{R_k}-mg\cos\alpha+F_N=0$, u pravcu normale na putanju - na parabolu

gde je poluprečnik krivine: $R_k = \frac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$, $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se odredi otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k}+mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$E_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg(y - y_0) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y).$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže za pravac normale sledi:

$$F_N = \frac{mv_0^2}{R_k} + 2\frac{mg}{R_k}(y_0 - y) + \frac{mg}{\sqrt{1+64p^2x^2}}.$$

Kako je $y = 4px^2$ to je kvadrat brzine:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+64p^2x^2)$$

Pa imajući u vidu izraz za poluprečnik krivine izraz za otpor veze možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha = m\frac{\dot{x}^2(1+64p^2x^2)}{\sqrt{(1+64p^2x^2)^3}} + mg\frac{1}{\sqrt{(1+64p^2x^2)}} = \frac{m(p\dot{x}^2 + g)}{\sqrt{(1+64p^2x^2)}}$$

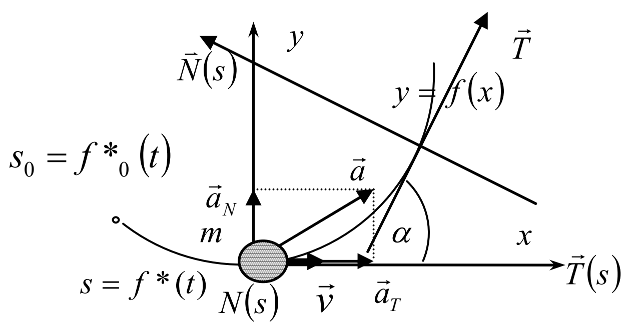
To je identičan izraz koji smo za silu otpora idealne veze dobili i preko rešavanja zadatka u Descartes-ovom sistemu koordinata.

U temenu parabole je: $x = 0$ i $y = 0$, pa je $F_N = 16mgy_0 + mg = G(1+16y_0) = 32{,}18[N]$

Zadatak 2. Odrediti u vertikalnoj ravni Oxy jednačinu glatke linije - putanje teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koji dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk/R\,;\,R = R_k$.

Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes-ove koordinate (x, y, z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde nepoznatoj, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je nepoznata $f(x, y) = 0$ i zadatkom se traži. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna. Takodje je zadatkom dato da je veza idealna i da je otpor veze obrnuto *srazmeran krivini putanje* $F_N = mgk/R$; $R = R_k$.



Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad (\vec{v}(t), grad\ f(x, y, z)) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0\,,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x, y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

Vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po glatkoj krivoj u vertikalnoj ravni pod dejstvom sopstvene težine anliziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanje. Zato ćemo razmotriti tu vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže te materijalne tačke u obliku:

$$(-m\vec{a}_N) + (-m\vec{a}_T) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right) + \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right) + mg\left(-\sin\alpha\vec{T} - \cos\alpha\vec{N}\right) + F_{N.}\vec{N} = 0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ krive linije koju tražimo, ose oskulatorne ravni krivolinijske putanje i dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0\,,$ u pravcu tangente na putanju

$-m\dfrac{v^2}{R_k} - mg\cos\alpha + F_N = 0\,,$ u pravcu normale na putanju

gde je poluprečnik krivine: $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}}{y''}$, a element luka putanje $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$.

Dakle, sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku izrazi pomoću krivine:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$E_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg(y - y_0) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y).$$

Kako je oy-osa usmerena naviše, onda integral energije daje:

$v^2 = v_0^2 - 2gy$, gde je $y_0 = 0$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke u pravcu normale na traženu krivu liniju sledi:

$$\frac{mv^2}{R} = -mg\cos\alpha + F_N = \frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{mgk}{R}$$

Pošto je zadatkom definisana sila otpora dejstvujuće veze linije, a traži se jednačina linije to rešavamo obrnuti zadatak i prethodna jednačina je diferencijalna jednačina putanje – linija veze koja dejstvuje na materijalnu tačku .

Posle transformacije dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu linije putanje:

$$\frac{m\left(v^2 - kg\right)}{R} = \frac{m\left(v_0^2 - 2gy - kg\right)}{R} = \frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}};$$

odnosno:

$$\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''} = (2y+c),$$

gde je uvedena oznaka radi jednostavnijeg pisanja

$$c = -\frac{v_0^2 - kg}{g}$$

Zamenom poluprečnika krivine relacijom $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}$ dobijamo:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{(2y+c)};$$

Ta diferenvžcijalna jednačina razdvaja promenljive integracije y i $y' = \dfrac{dy}{dx}$, koordinate pokretne materijalne tačke u ravni xOy te je:

$$\frac{2y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2dy}{(2y+c)};$$

Integraljenjem leve i desne strane prethodnne jednačine u diferencijalnom obliku dobijamo

$$\ln\sqrt{1+y'^2} = \ln(2y+c) + \ln C_1 = \ln C_1(2y+c)$$

Imajući u vidu da je osobine logaritama kvadrata, količnika i proizvoda lako je iz prethodnog dobiti sledeće

$$y'^2 = ay + b;\quad a = 2C_1 \quad \text{i} \quad b = C_1 c - 1$$

Ponovo razvajamo promenljive integracije

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{ay+b}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{ay+b}} = dx;\ 2\sqrt{ay+b} = a(x + C_2)$$

Te još jednim integraljenjem dobijamo sledeću jednačinu krive linije:

$$ay + b = \frac{a^2}{4}(x + C_2)^2 \text{ tj.}$$

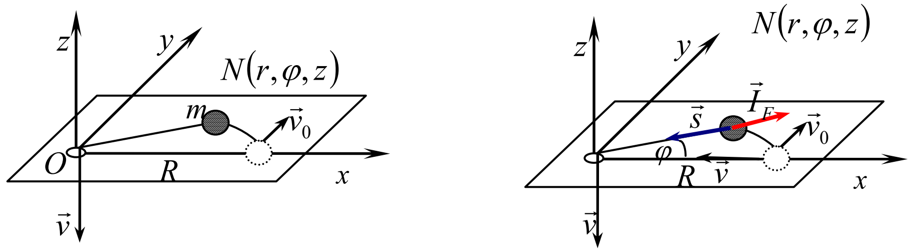
$$y = \frac{a}{4}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a},$$

koja je zadatkom tražena. Znači tražena glatka kriva linija u vertikalnoj ravni Oxy putanja teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk/R$; $R = R_k$ je parabola - kriva linija drugog reda jednačine

$$y = \frac{a}{4}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}.$$

Mi smo ustvari dobili višeparametarsku familiju krivih linija parabola, jer u jednačini krive linije ima više proizvoljnih konstanti integracije, ali za sve te putanje – krive linije kao veze dejstva prinude veze u kretanju materijalne tačke imaju svojstvo da je otpor veze obrnuto proporcionalan poluprečniku krivine veze, jer smo to jednačinu izveli iz tog uslova.

Zadatak 3. Po idealno glatkoj horizontalnoj ploči klizi kuglica mase m učvršćena za jedan kraj nerastegljivog konca. Konac je provučen kroz rupicu u ploči i uvlači se u nju konstantnom brzinom v. U početnom trenutku konc je zategnut duž prave linije, rastojanje kuglice od rupice je bilo R , a početna brzina kiglice je v_0 i upravna je na pravac konca, vidi sliku. Odrediti konačne jednačine kretanja kuglice i silu u koncu, pretpostavljaju'i da je kuglica materijala tačka.



Rešenje:
Kuglica se kreće u ravni $z = 0$ pa se radi o kretanju materijalne tačke podvrgnute dejstvu jedne veza, pa ima dva stepena slobode kretanja i njen položaj $N(r, \varphi, z)$ je odredjen trima koordinatama r, φ i $z = 0$, ali iz uslova da je podvrgnuta dejstvu jedne veze, sledi da ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate biramo kooedinate $r(t)$ i $\varphi(t)$. Pokretna materijalna tačka je izložena desjtvu sile u koncu $\vec{S}$, normalne reakcije veze sa podlogom $z = 0$, jer je podloga idealno glatka i ima rakciju veze samo u pravcu gradijenta na dodirnu površ, inercine sile $\vec{I}_F$ i sile sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{k}$, koja je usmerena vertikalno naniže. Na osnovu princiopa dinamičke ravnoteže pišemo jednačina dinamičke ravnoteže materijalne tačke (kuglice, pri čemu razmatramo njeno translatorno kretanje, a zanemarujemo rotaciono) je onda:

$$\vec{I}_F + \sum \vec{F}_i = 0, \quad \Rightarrow \quad (-m\vec{a}) + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F}_N = 0$$

Za ovaj zadatak svrsishodno je posmatrati kretanje kuglice iz polarno-cilindričnog koordinatnog sistema, u kome se vektorska jednačina dinamičke ravnoteže razlaže na tri skalarne jednačine oblika:

$$(-ma_r) + (-S) = 0$$

$$(-ma_c) = 0 \qquad \text{i}$$

$$0 = -mg + F_N ,$$

gde su

$$\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0$$

radijalna i

$$\vec{a}_c = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{c}_0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\vec{c}_0$$

cirkularna komponenta vektora ubrzanja materojalne tačke u polatno-cilindričkom sistemu koordinata. Sada jednačine kretanja materijalne tačke (kuglice), pod pretpostavkom da je kuglica materijalna tačka a na osnovu postavljenog iskaza principa dinamičke ravnoteže su:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -S$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)=0$$

Kako je zadatkom zadato da je brzina uvlaćenja konca v konstantna u našem slučaju, radijus se smanjuje brzinom v, to je radijalna projekcija brzine kuglice tj.

$$v_r=\dot{r}=\frac{dr}{dt}=-v\,,$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu prvog reda koja razdvajanjem promenljivih i integraljenjem daje:

$$r(t)=-vt+C_1$$

Integraciona konstanta C_1 se određuje iz početnih uslova zadatih zadatkom:

$$t=0, r_0=R, \varphi_0=0, v_{r0}=0, v_{c0}=r\dot{\varphi}\big|_{t=0}=v_0$$

ta je $C_1=R$. Konačna jednačina kretanja u radijalnom pravcu:

$$r(t)=-vt+R$$

Iz druge jednačine kretanja sledi:

$$r^2\dot{\varphi}=const$$

$$r^2\dot{\varphi}=r_0^2\dot{\varphi}_0=r_0v_{co}=Rv_0$$

odakle dobijamo

$$\dot{\varphi}=\frac{Rv_0}{(R-vt)^2}\,,$$

posle razdvajanja promenljivih i integraljenja dobijamo:

$$\varphi(t)=\frac{Rv_0}{v(R-vt)}+C_2\,,$$

integraciona konstanta se dobija iz početnih uslova $C_2=-\frac{v_0}{v}$, pa je:

$$\varphi(t)=\frac{Rv_0}{v(R-vt)}-\frac{v_0}{v}=\frac{v_0t}{R-vt}\,.$$

Iz prve jednačine kretanja kuglice

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=-S\,,$$

sledi da je sila u užetu:

$$m(R-vt)\frac{R^2v_0^2}{(R-vt)^4}=S \quad \text{tj.} \quad S=m\frac{R^2v_0^2}{(R-vt)^3}$$

Drugi pristup: Zadatak se može prostaviti i drugaćije. Kuglica se kreće u ravni $z=0$ i kretanje kuglice je ograničeno dužinom konca, pa se radi o kretanju materijalne tačke podvrgnute dejstvu dveju veza, pa ima jedan stepen slobode kretanja i njen položaj $N(r,\varphi,z)$ je odredjen trima koordinatama $r=r(t)$, φ i $z=0$, ali iz uslova da je podvrgnuta dejstvu dveju veza, sledi da ima jedan stepena slobode kretanja i za generalisanu koordinatu biramo kooedinatu $\varphi(t)$ u curkularnom pravcu.

Znači, konstantovali smo da je materijalna tačka izložena dejstvu dve veze. Jedna veza je kretanje materijalne tačke u tavni $z=0$ i to je stacionarna geometrijska veza. Druga veza je zadata time da se dužina konca menja brzinom v, pa je ta druga veza $\tilde{f}(\dot{r})=0$ ***nestacionarna i diferencijalna***, ali ***integrabilna*** i može se napisati u obliku

$$v_r=\dot{r}=\frac{dr}{dt}=-v\,.$$

Ta diferencijalna veza , $\tilde{f}(\dot{r})=\dot{r}+v=0$ je integrabilna i može integraliti, te na osnovu toga dobijamo:

$$r(t)=-vt+C_1$$

Integraciona konstanta C_1 se određuje iz početnih uslova zadatih tekstom zadatka:

$$t = 0, r_0 = R, \varphi_0 = 0, v_{r0} = 0, v_{c0} = r\dot{\varphi}\big|_{t=0} = v_0$$

ta je $C_1 = R$. Konačna jednačina druge veze u konačnom obliku je

$$r(t) = -vt + R$$

i vidimo da je ta *nestacionarbna, difrencijalna i integrabilna veza* sada oblika *geometrijske nestacionarne* veze oblika $f(r.t) = r + vt - R = 0$

Pokretna materijalna tačka je izložena desjtvu veze $f(r.t) = r + vt - R = 0$, usled čega se javlja otpor usled dejstva te nestacionarne veze - sila u koncu $\vec{S}$, a usled druge veze $z = 0$, javlja se otpora - normalna reakcija podloge F_N, jer je podloga idealno glatka ravan i njena rakcija je samo u pravcu gradijenta na dodirnu površ. Pored sile inercije $\vec{I}_F$ na materijalnu tačku dejstvuje i aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{k}$, koja je usmerena vertikalno naniže. Na osnovu principa dinamičke ravnoteže pišemo jednačina dinamičke ravnoteže materijalne tačke (kuglice, pri čemu razmatramo njeno translatorno kretanje, a zanemarujemo rotaciono) je onda:

$$\vec{I}_F + \sum \vec{F}_i = 0, \quad \Rightarrow \quad (-m\vec{a}) + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F}_N = 0$$

gde su

$$\vec{a}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0$$

radijalna i

$$\vec{a}_c = \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\vec{c}_0$$

cirkularna komponenta vektora ubrzanja materojalne tačke u polatno-cilindričkom sistemu koordinata. Sada jednačine kretanja materijalne tačke (kuglice), pod pretpostavkom da je kuglica materijalna tačka a na osnovu postavljenog iskaza principa dinamičke ravnoteže su:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -S$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

Kako druga nestacionarna veza $f(r.t) = r + vt - R = 0$ daje promenu radijalne koordinate, to prva jednačina služi da se odredi reakcija veze - sila u koncu $\vec{S}$

$$S = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)$$

Ali pre toga treba rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

Koja daje da je sektorska brzina konstantna:

$$S_{r\varphi} = r^2\dot{\varphi} = const$$

$$r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0 v_{co} = Rv_0$$

odakle dobijamo trenutnu ugaonu brzinu

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{(R - vt)^2},$$

i posle razdvajanja promenljivih i integraljenja dobijamo za generalisanu koordinatu kretanja materijalne tačke po horizontalnoj ravni:

$$\varphi(t) = \frac{Rv_0}{v(R - vt)} + C_2,$$

gde je C_2 nepoznata integraciona konstanta koja se odredjuje iz uslova da su zadovoljeni početni uslovi kretanja materijalne tačke (kuglice) $C_2 = -\frac{v_0}{v}$, te sledi da je:

$$\varphi(t) = \frac{Rv_0}{v(R - vt)} - \frac{v_0}{v} = \frac{v_0 t}{R - vt}.$$

Sila u koncu $\vec{S}$' kao reakcija nestacionarne veze $f(r.t) = r + vt - R = 0$ se dobija, kako smo već zaključili, pomoću relacije $S = -m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ odakle sledi njena vrednost:

$$S = m\frac{R^2 v_0^2}{(R - vt)^3}$$

Zadatak 4. Dekartove koordinate sile $\vec{F}$ su

$$X = c\frac{x - y}{(x^2 + y^2)^n}; \qquad Y = c\frac{x + y}{(x^2 + y^2)^n};$$

a) Odrediti eksponent n pod uslovom da sila $\vec{F}$ bude konverzativna.
b) Za taj slučaj odrediti funkciju sile i izračunati rad sile pri prelasku materijalne tačke iz položaja $N_1(2, \sqrt{2})$ u $N_2(3, \sqrt{3})$ ako je $c = 100$ $[Nm]$ duž putanje kretanja. Da li taj rad zavisi od putanje kretanja materijalne tačke?
c) Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile.
d) Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje, kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Rešenje:
Uslov konzervativnosti sile je:

$$rot\vec{F} = rot\, grad\, U = [\nabla, \vec{F}] = [\nabla, grad\, U] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

ili

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Da bi sila bila konzervativna, potencijalna, potrebno je da njene koordinate zadovoljavaju Cauchy-Reiman'ove uslove koje smo izveli prethodno. Da bi uslov konzervativnosti $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ bio zagovoljem sledi da treba da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\frac{-(x^2 + y^2)^n - n(x - y)(x^2 + y^2)^{n-1} \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^{2n}} = \frac{(x^2 + y^2)^n - n(x + y)(x^2 + y^2)^{n-1} \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^{2n}}$$

$$-(x^2 + y^2)^n - 2xyn(x^2 + y^2)^{n-1} + 2y^2 n(x^2 + y^2)^{n-1} = (x^2 + y^2)^n - 2x^2 n(x^2 + y^2)^{n-1} - 2xyn(x^2 + y^2)^{n-1}$$

$$2n(x^2 + y^2)^n = 2(x^2 + y^2)^n \qquad \Rightarrow \qquad n = 1$$

Kako se konzervativna sila može izraziti u obliku $\vec{F} = grad\, U$, gde je U funkcija sile, to su onda projekcije sile na koordinatne ose:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

odakle se može odrediti funkcija sile rešavanjem sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = c\frac{x - y}{(x^2 + y^2)},$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=c\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)}$$

Pa imamo:

$$U=\int Ydy+\varphi(x)=\frac{1}{2}c\ln\left(x^2+y^2\right)+c\cdot arctg\frac{y}{x}+\varphi(x),$$

što posle diferenciranja po x i izjednačavanja sa X zadatom projekcijom sile daje neodređenu funkciju $\varphi(x)$:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2}c\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)}+c\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi(x)=c\frac{x-y}{\left(x^2+y^2\right)}\qquad\Rightarrow\quad\varphi(x)=C,$$

pa je funkcija sile oblika:

$$U=\frac{1}{2}c\ln\left(x^2+y^2\right)+c\cdot arctg\frac{y}{x}+C$$

Rad konzervativne sile je:

$$A=U_2-U_1=\frac{1}{2}c\cdot\ln(12)+c\cdot arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{2}c\cdot\ln(6)-c\cdot arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Zadatak 5. Dekartove koordinate sile $\vec{F}$ su

$$X=c\frac{x-y-z}{x(x+y+z)};\qquad \mathrm{Y}=c\frac{y-z-x}{y(x+y+z)};\qquad \mathrm{Y}=c\frac{z-x-y}{z(x+y+z)};$$

a) Pokazati da je ova sila konzervativna i odrediti funkciju sile.
b) Izračunati rad sile pri prelasku materijalne tačke iz položaja $M_1(2,2,2)$ u položaj $M_2(1,1,1)$ duž putanje kretanja. Da li taj rad zavisi od putanje kretanja materijalne tačke?
c) Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile. Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Rešenje:

Transformišimo najpre projekcije sile u oblike:

$$X=c\frac{x-y-z}{x(x+y+z)}=c\left(\frac{2x}{x(x+y+z)}-\frac{x+y+z}{x(x+y+z)}\right)=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{x}\right);$$

$$\mathrm{Y}=c\frac{y-z-x}{y(x+y+z)}=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{y}\right);$$

$$\mathrm{Z}=c\frac{z-x-y}{z(x+y+z)}=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{z}\right);$$

Uslov konzervativnosti sile je:

$$rot\vec{F}=rot\,grad\,U=\left[\nabla,\vec{F}\right]=\left[\nabla,grad\,U\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0,$$

odnosno slede uslovi:

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0$$

ili

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}$$

Što za ovu silu i njene projekcije daje:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{2c}{(x+y+z)^2}; \qquad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{2c}{(x+y+z)^2}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{2c}{(x+y+z)^2};$$

Odakle zaključujemo da su Cauchy-Rimman-ovi uslovi zadovoljeni i da je sila konzervativna.
Funkcija sile se određuje iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{x}\right)$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{y}\right)$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{z}\right)$$

Integraljenjem prve jednačine ovog sistema dobija se:

$$U=\int Xdx+\varphi(y,z)=c\big(2\ln(x+y+z)-\ln(x)\big)+\varphi(y,z)$$

Posle diferenciranja ove jednačine po y i izjednačavanja sa drugom parcijalnom diferencijalnom jednačinom sledi:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=c\left(\frac{2}{x+y+z}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=Y=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{y}\right);$$

Odakle se dobija

$$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}=-\frac{c}{y},$$

pa sledi

$$\varphi(y,z)=-\int\frac{c}{y}dy+\psi(z), \text{ tj. } \varphi(y,z)=-c\ln(y)+\psi(z);$$

Sada je izraz za funkciju sile

$$U=2c\ln(x+y+z)-c\ln(x)-c\ln(y)+\psi(z) \text{ odnosno}$$

$$U=c\ln\frac{(x+y+z)^2}{xy}+\psi(z).$$

Ako sada ovaj izraz diferenciramo po z i izjednačimo sa trećom parcijalnom diferencijalnom jednačinom sledi:

$$\frac{\partial U}{\partial z}=c\left(\frac{2}{x+y+z}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial z}=Z=c\left(\frac{2}{x+y+z}-\frac{1}{z}\right);$$

odakle se dobija

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z}=-\frac{c}{z}, \text{ tj. } \psi(z)=-\int\frac{c}{z}dz+C;$$

$$\psi(z)=-c\ln(z)+C;$$

Sada je konačan izraz za funkciju sile:

$$U=2c\ln(x+y+z)-c\ln(x)-c\ln(y)-c\ln(z)+C;$$

odnosno:

$$U=c\ln\left(\frac{(x+y+z)^2}{xyz}\right)+C$$

Rad konzervativne sile je:

$$A = U_2 - U_1 = U(M_2) - U(M_1) = c\ln 2\,.$$

Zadatak 6. Na pokretnu materijalnu tačku dejstvuje sila $\vec{F}$ **:**

$$\vec{F} = \frac{c}{xz + y^2}\left(\frac{y^2}{x}\vec{i} + \frac{xz - y^2}{y}\vec{j} - x\vec{k}\right),$$

gde je $c[Nm]$-konstanta.

a) Dokazati da je sila $\vec{F}$ konzervativna i odrediti funkciju sile.
b) Izračunati rad sile pri kretanju materijalne tačke po krivoj putanji, koja se odbija presekom površi: $(x-6)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 10z$ i ravni $z = 8$. Da li taj rad zavisi od putanje kretanja materijalne tačke? .
c) Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile. Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Rešenje:

a) Kako su komponente sile:

$$X = \frac{cy^2}{x(xz + y^2)}$$

$$Y = c\frac{xz - y^2}{y(xz + y^2)}$$

$$Z = -c\frac{x}{xz + y^2}$$

to se nalaženjem izvoda dobija:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2cyz}{(xz + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = -c\frac{y^2}{(xz + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{2cyx}{(xz + y^2)^2};$$

Odakle zaključujemo da su Cauchy-Rimman-ovi uslovi zadovoljeni i da je sila konzervativna.
Funkcija sile se određuje iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{cy^2}{x(xz + y^2)}$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = c\frac{xz - y^2}{y(xz + y^2)}$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = -c\frac{x}{xz + y^2}$$

Integraljenjem poslednje jednačine ovog sistema dobija se:

$$U = \int Z dz + \varphi(x,y) = -c\ln(xz + y^2) + \varphi(x,y).$$

Posle diferenciranja ove jednačine po x i izjednačavanja sa prvom parcijalnom diferencijalnom jednačinom sledi:

$$-c\frac{z}{xz + y^2} + \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{cy^2}{x(xz + y^2)};$$

odakle je:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\frac{c}{x},$$

pa sledi

$$\varphi(x,y)=\int\frac{c}{x}dx+\psi(y),\ \text{tj.}\ \varphi(x,y)=c\ln(x)+\psi(y);$$

Sada je funkcija sile

$$U=-c\ln\left(xz+y^2\right)+c\ln(x)+\psi(y)=c\ln\frac{x}{xz+y^2}+\psi(y)$$

Funkcija $\psi(y)$ se određuje diferenciranjem ovog izraza po y i izjednačavanja sa drugom parcijalnom diferencijalnom jednačinom polaznog sistema, pa sledi:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=c\frac{xz-y^2}{y\left(xz+y^2\right)}=-c\frac{2y}{xz+y^2}+\frac{\partial\psi(y)}{\partial y},\ \text{pa je:}$$

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}=\frac{c}{y},\ \text{tj.}\ \psi(y)=\int\frac{c}{z}dz+C=c\ln y+C;$$

Konačan izraz za funkciju sile je :

$$U=c\ln\frac{xy}{xz+y^2}+C$$

b) Kriva dobijena presekom zadatih površina je krug: $(x-6)^2+(y-8)^2=4^2$. U oblasti ove kružnice funkcija sile je regularna, a putanja je zatvorena, to je rad sile jednak nuli.

Zadatak 7. Kojim funkcijom $\varphi(x)$ treba pomnožiti Descartes-ove koordinate vektora sile $X=c(2x+y)-byx^2$; $Y=cx+bx^3$, da bi sila $\vec{F}$ bila konzervativna? Odrediti funkciju sile . Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile. Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Rešenje:

Uslov konzervativnosti sile je:

$$rot\vec{F}=rot\,grad\,U=\left[\nabla,\vec{F}\right]=\left[\nabla,grad\,U\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0,$$

odnosno

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0$$

ili

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\qquad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x},\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}$$

Ovde su zadate projekcije sile:

$$X=\left[c(2x+y)-byx^2\right]\varphi(x)\ \text{i}\ Y=\left[cx+bx^3\right]\varphi(x),$$

pa iz uslova konzervativnosti

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

sledi

$$\left(c-bx^2\right)\varphi(x)=\left(c+3bx^2\right)\varphi(x)+\left(cx+bx^3\right)\varphi'(x),$$

odakle se dobija diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $\varphi(x)$, koja razdvaja promenljive

$$-4bx^2\varphi(x)=\left(cx+bx^3\right)\varphi'(x),$$

tj.

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{-4bx^2}{\left(cx+bx^3\right)}dx$$

posle integraljenja sledi:

$$\ln\varphi=-2\ln\left(c+bx^2\right)=\ln\left(c+bx^2\right)^{-2},$$

pa je tražene funkcija $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\left(c+bx^2\right)^2}.$$

Koordinate sile su onda:

$$X=\frac{\left[c(2x+y)-byx^2\right]}{\left(c+bx^2\right)^2}\quad \text{i} \quad Y=\frac{x}{c+bx^2}$$

Funkcija sile se određuje iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\left[c(2x+y)-byx^2\right]}{\left(c+bx^2\right)^2}$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{c+bx^2}$$

$$U=\int Ydy+\varphi(x)=\frac{xy}{c+bx^2}+\varphi(x),$$

što posle diferenciranja po x i izjednačavanja sa X zadatom projekcijom sile daje izraz za određivanje funkcije $\varphi(x)$:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y\left(c+bx^2\right)-2bx^2y}{\left(c+bx^2\right)^2}+\varphi'(x)=\frac{\left[c(2x+y)-byx^2\right]}{\left(c+bx^2\right)^2}\qquad\Rightarrow\quad \varphi(x)=-\frac{c}{b\left(c+bx^2\right)}+C,$$

pa je funkcija sile oblika:

$$U=\frac{bxy-c}{b\left(c+bx^2\right)}+C$$

Zadatak 8. Dekartove koordinate sile $\vec{F}$ su

$$X=\frac{c}{z};\qquad \mathrm{Y}=\frac{-3c}{z};\qquad \mathrm{Z}=c\frac{3y-x}{z^2};$$

Pokazati da je ova sila konzervativna i odrediti funkciju sile. Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile. Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Rešenje:

Uslov konzervativnosti sile je:

$$rot\vec{F}=rot\,grad\,U=\left[\nabla,\vec{F}\right]=\left[\nabla,grad\,U\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0,$$

odnosno

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0$$

ili

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}$$

Što za zadate vrednosti projekcija sile daje:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{c}{z^2}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{3c}{z^2};$$

kako su uslov konzervativnosti zadovoljeni to je i zadata sila konzervativna.
Funkcija sile se određuje iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{c}{z}$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-3c}{z}$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=c\frac{3y-x}{z^2}$$

Integraljenjem prve jednačine ovog sistema dobija se:

$$U=\int Xdx+\varphi(y,z)=c\frac{x}{z}+\varphi(y,z)$$

Posle diferenciranja ove jednačine po y i izjednačavanja sa drugom parcijalnom diferencijalnom jednačinom sledi:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=Y=-\frac{3c}{z};$$

Odakle se dobija

$$\varphi(y,z)=-\int\frac{3c}{z}dy+\psi(z); \qquad \varphi(y,z)=-\frac{3cy}{z}+\psi(z).$$

Sada je izraz za funkciju sile:

$$U=\int Xdx+\varphi(y,z)=c\frac{x}{z}-\frac{3cy}{z}+\psi(z).$$

Ako sada ovaj izraz diferenciramo po z i izjednačimo sa trećom parcijalnom diferencijalnom jednačinom sledi:

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-c\frac{x}{z^2}+\frac{3cy}{z^2}+\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}=Z=c\frac{3y-x}{z^2};$$

odakle se dobija

$$\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}=0\text{, tj. }\psi(z)=C;$$

Sada je konačan izraz za funkciju sile:

$$U=c\frac{x-3y}{z}+C.$$