IV vežba

Principi dinamike

- Horizontalni hitac
- Osnovno određenje-Skalarna invarijanta -Rad sile
- Princip dinamičke ravnoteže
- Kinetička energija -"živa sila" i potencijalna energija

Zadatak 1. Materijalna tačka M , mase m , kreće se u vertikalnoj ravni u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini, $\vec{F} = -km\vec{v}$,$(k \succ 0)$. U početnom trenutku kretanja materijalna tačka je imala brzinu $\vec{v}_0$ usmerenu po horizontali, a koordinatni sistem je postavljen tako da se koordinatni početak poklapa sa početnim položajem tačke. Smatrajući silu zemljine teže konstantnom, koristeći princip dinamičke ravnoteže, odrediti:

- diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke;
- konačne jednačine kretanja materijalne tačke i njenu putanju za zadate početne uslove;
- teorijski horizontalni domet materijalne tačke .

Rešenje:

Filozofija i strategija rešavanja postavljenog zadatka.

Da bi smo rešili postavljeni zadatak, potrebno je da prvo napravimo analizu mogućeg modela dinamike sistema, odnosno modela dinamike materijalne tačke i odgovorimo na pitanje da li se radi o kretanju slobodne materijalne tačke ili materijalne tačke podvrgnute dejstvu veza.

Zatim odredimo broj stepeni slobode kretanja i izaberemo koordinatni sistem i odgovarajući broj koordinata kojima ćemo opisati dinamiku materijalne tačke.

Zatim sledi analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i odredjivanje njihovih poznatih ili nepoznatih koordinata u izabranom sistemu koordinata.

Zatim biramo, ako to zadatkom nije propisano, princip pomoću koga ćemo sastaviti jednačine kretanja.

Zatim jednačine kretanja rešavamo i na kraju odredjujemo integracione konstante koristeći zadate početne uslove.

U zaključivanju analiziramo dobijeno rešenje za zadate početne uslove i izvodimo zaključke o svojstvima rešenja i opisane dinamike.

Kako se materijalna tačka, definisano tekstom zadatka, kreće u polju zemljine teže i u uslovima otpora sredine, i na nju ne dejstvuju veze, to imamo slučaj kretanja – dinamike ***slobodne materijalne tačke***, koja ima tri stepeni slobode kretanja i njen položaj u prostoru kretanja ćemo odrediti vektorom položaja $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, čije su koordinate x, y, z u Descartes-ovom sistemu koordinata. Koordinatni sistem ćemo izabrati tako da je njegov koordinatni početak u tački –početnom položaju materijalne tačke, odnosno u tački u kojoj je materijalna tačka bila u početnom trenutku kretanja, a tako da je osa Oy usmerena vertikalno naniže, a ravan Oxz da je horizontalna, kao što je na slici prikazano. Kako je početna brzina u horizontalnoj ravni to ćemo koordinatnu osu Ox izabrati u pravcu početne brzine $\vec{v}_0$, što će se pokazati opravdanim radi uprošćenja matematičkog opisa zadatka.

Sile koje dejstvuju na slobodnu materijalnu tačku su:

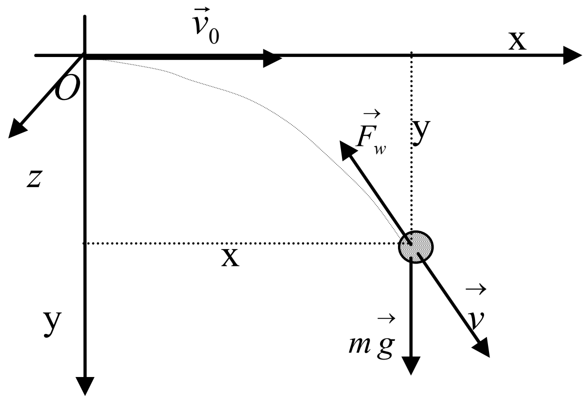
- aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = mg\vec{j}$
- sila otpora sredine u kojoj se kreće materijalna tačka je: $\vec{F}_w = -km\vec{v}$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže je:

$$\vec{I}_F + \sum \vec{F}_i = 0, \qquad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{g} - km\vec{v}$$

Iz ove vektorske jednačine mogu se formirati tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke u prostoru i izabranom koordinatnom početku:

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -mk\dot{y} + mg$$
$$m\ddot{z} = -mk\dot{z}$$



Slika 1.

pri čemu su početni uslovi oblika:

$$t = 0; \quad \begin{array}{ll} x(0) = 0; & \dot{x}(0) = v_0; \\ y(0) = 0; & \dot{y}(0) = 0; \\ z(0) = 0; & \dot{z}(0) = 0 \end{array}$$

Integraljenjem polaznog sistema diferencijalne jednačine kretanja, sledi:

$$\dot{x} = -kx + C_1,$$
$$\dot{y} = -ky + gt + C_2$$
$$\dot{z} = -kz + C_3$$

Pri čemu se uzimajući u obzir početne uslove dobijaju integracione konstante u obliku:

$$C_1 = v_0 \;, \quad C_2 = 0 \;\text{ i }\; C_3 = 0$$

Pa sistem ***prvih integrala*** diferencijalnih jednačina kretanja postaje:

$$\dot{x} + kx = v_0,$$
$$\dot{y} + ky = gt.$$
$$\dot{z} + kz = 0$$

Ovo je sada sistem od dve nehomogene diferencijalne jednačine i jedne homogene prvog reda, pri čemu su integrali homogenog dela:

$$x_h = C_4 e^{-kt} \quad ; \quad y_h = C_5 e^{-kt} \;\text{ i }\; z = C_6 e^{-kt}$$

a partikularni integrali se pretpostavljaju u obliku:

$$x_p = A \quad \text{i} \quad y_p = Bt + D$$

Posle unošenja pretpostavljenih partikularnih integrala u sistem diferencijalnih jednačina prvog reda dobijaju se integracione konstante:

$$A = \frac{v_0}{k}, \qquad B = \frac{g}{k} \quad \text{i} \quad D = -\frac{g}{k^2}.$$

Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja su:

$$x(t) = x_h + x_p = C_4 e^{-kt} + A$$
$$y(t) = y_h + y_p = C_5 e^{-kt} + Bt + D$$
$$z(t) = z_h = C_6 e^{-kt}$$

ili

$$x = C_4 e^{-kt} + \frac{v_0}{k}$$
$$y = C_5 e^{-kt} + \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2}.$$
$$z(t) = C_6 e^{-kt}$$

Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja moraju takodje da zadovoljavaju početne uslove. Iz uslova zadovoljenja početnih uslov dobijamo sistem algebarskih jednačina po nepoznatim integracionim konstantama, te rešavanjem tog sistema dobijamo integracione konstante u sledećem obliku:

$$C_4 = -\frac{v_0}{k} \quad , \quad C_5 = \frac{g}{k^2} \ \text{i} \ C_6 = 0 \, ,$$

pa su konačne jednačine kretanja materijalne tačke:

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$
$$y(t) = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$$
$$z(t) = 0$$

Iz konačnih jednačina kretanja vidimo da se materijalna tačka kreće u ravni xOy, što smo mogli i pretpostaviti u startu, analizirajuči komponente sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i početne uslove.

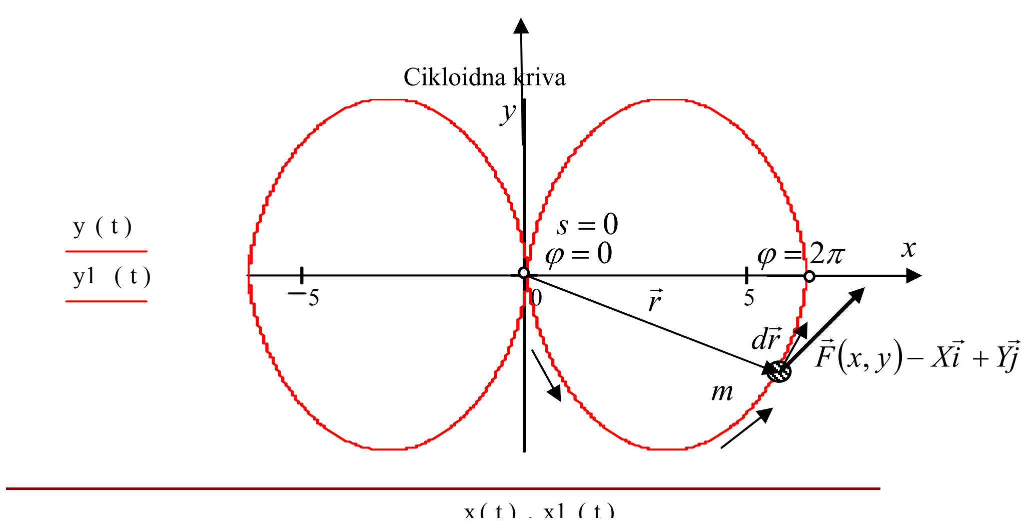
Ovaj zadatak predstavlja u stvari ***horizontalni hitac u realnoj sredini***, pri čemu je otpor vazduha proporcionalan brzini kretanja materijalne tačke.

Teorijski domet se dobija kada se odredi granična vrednost funkcije $x(t)$ za $t \to \infty$:

$$D_t = \lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{v_0}{k}.$$

Zadatak 2. Materijalna tačka se kreće po cikloidi jednačine $x = R(\varphi - \sin\varphi)$; $y = R(1 - \cos\varphi)$ pod uticajem sile $\vec{F} = c\left[(2R - y)\vec{i} + (y - R)\vec{j}\right]$. Odredi rad koji izvrši sila koja dejstvuje na materijalnu tačku, pri njenom kretanju po jednom luku cikloide.

Rešenje:



Slika 2. Cikloidna kriva

Za rešavanje ovog zadatka koristimo ***peto odredjenje – rad sile*** *duž puta kretanja materijalne tačke.* .

. *Elementarni rad sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s}=d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je skalarni proizvod te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Ukupan rad sile $\vec{F}$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je ukupan zbir svih elementarnih radova* $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ *ili integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Rad aktivne sile $\vec{F}=c\left[(2R-y)\vec{i}+(y-R)\vec{j}\right]$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$A=\int_L (Xdx+Ydy)=c\int_L (2R-y)dx+(x-R)dy=cR^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=cR^2\pi$$

Pri integraljenju su korišćene parametarske jednačine cikloide $x=R(\varphi-\sin\varphi)$; $y=R(1-\cos\varphi)$ *pa se sa Descartes-ovih koordinata pri integraljenju prešlo na integraljenje po parametru* φ *u granicama od* 0 *do* 2π *u kojima se granicama menja pri opisivanju jedne grane cikloide.*

Zadatak 3. Materijalna tačka se kreće po zavojnici na površi kružnog valjka (cilindra) parametarskih koordinata u obliku $x=R\cos\varphi$; $y=R\sin\varphi$; $z=h\varphi/2\pi$; gde je $\varphi=\omega t$, a pod pod uticajem sile čije su Descates-ove koordinate $X=cyz$, $Y=cz\left(R^2-y^2\right)^{1/2}$, $Z=cxy$. Odrediti rad koji izvrši aktivna sila, dok materijalna tačka iz položaja $N_0(R,0,0)$ pređe jedan hod po zavojnici – zavojnoj putanji?

Rešenje:

Ukupan rad sile $\vec{F}$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je ukupan zbir svih elementarnih radova* $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ *ili integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

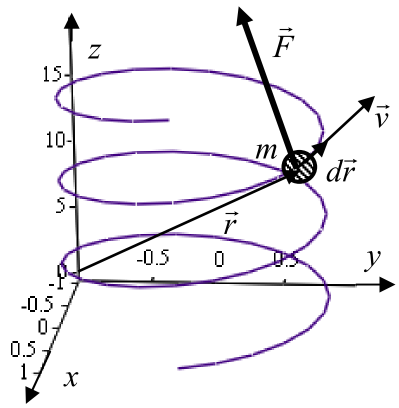
$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Rad aktivne sile $\vec{F}$ čije su koordinate $X=cyz$, $Y=cz\left(R^2-y^2\right)^{1/2}$, $Z=cxy$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku*

$$A^{\vec{F}}=\int_L (Xdx+Ydy+Zdz)=c\int_L yzdx+xzdy+xydz=\frac{cR^2h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\varphi\sin^2\varphi+\varphi\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=0$$

jer su koordinate *stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s}=d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ *duž putanje* s *kretanja*

$$dx=-R\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy=R\cos\varphi\, d\varphi \quad \text{i}$$
$$dz=\frac{h}{2\pi}d\varphi.$$



Slika 3. Zavojna kriva za $\omega = 6\pi$ *i* $h = 2\pi$

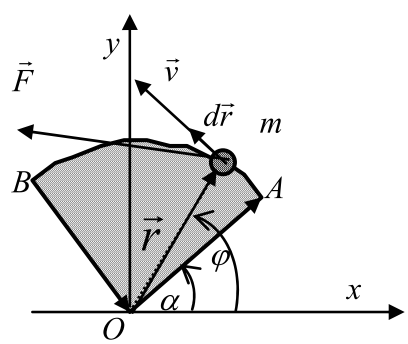
jer je:

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta\sin\theta + \cos\theta\right]_0^{4\pi} = 0$$

Zadatak 4. Odrediti rad sile $\vec{F}$ čije su koordinate $X = c\left(x^3 - 3xy^2\right)$; $Y = c\left(3x^2 y - y^3\right)$ koja dejstvuje na materijalnu tačku pri kretanju duž konture kvadranta kruga $OABO$ čiji poluprečnik $\overline{OA} = R$ gradi sa ox-osom ugao $\alpha = 30^0$.

Rešenje:

Rad sile $\vec{F}$ čije su koordinate $X = c\left(x^3 - 3xy^2\right)$; $Y = c\left(3x^2 y - y^3\right)$ koja dejstvuje na materijalnu tačku pri kretanju duž puta po konturi kvadranta kruga $OABO$ čiji poluprečnik $\overline{OA} = R$ gradi sa ox-osom ugao $\alpha = 30^0$ izračunavamo posebno za svaki segment puta duž svake strane konture kvadranta kruga $OABO$ po kome se kreće materijalna tačka.



Slika 4.

Kako je ukupan rad sile $\vec{F}$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke ukupan zbir svih elementarnih radova* $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ *ili integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

To u Descartes-ovom sistemu koordinata pišemo da je:

$$A^{\vec{F}} = \int_{L}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) = \int_{L_{OA}}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) + \int_{L_{AB}}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) + \int_{L_{BO}}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$$

Odnosno, kako se radi o putanji u ravni sledi uprošćenje:

$$A^{\vec{F}} = \int_{L}\left(Xdx + Ydy\right) = \int_{L_{OA}}\left(Xdx + Ydy\right) + \int_{L_{AB}}\left(Xdx + Ydy\right) + \int_{L_{BO}}\left(Xdx + Ydy\right)$$

1. Duž dela puta $OA(L_1)$, jednačine putanje su: $y = mx$; $m = tg\alpha$, dok je element puta na tom delu puta : $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} = dx\vec{i} + mdx\vec{j}$, te rad sile $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = c\left(x^3 - 3xy^2\right)\vec{i} + c\left(3x^2y - y^3\right)\vec{j}$ duž puta na tom delu puta duž konture kvadranta kruga $OABO$ izračunavamo na sledeći način:

$$A_1 = \int_{L_1}\left(Xdx + Ydy\right) = \int_0^{R\cos\alpha} c\left[\left(x^3 - 3m^2x^3\right) + m\left(3mx^3 - m^3x^3\right)\right]dx = \int_0^{R\cos\alpha} c\left[x^3\left(1 - m^4\right)\right]dx = \frac{c}{4}\left(R\cos\alpha\right)^4\left(1 - m^4\right)$$

2. Duž dela puta - konture AB, jednačine putanje su $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ pa element puta ima sledeće koordinate $dx = -R\sin\varphi\, d\varphi$, $dy = R\cos\varphi\, d\varphi$, odnosno u vektorskom obliku je: $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} = \left(-R\sin\varphi\, d\varphi\right)\vec{i} + \left(R\cos\varphi d\varphi\right)\vec{j}$. Rad sile $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = c\left(x^3 - 3xy^2\right)\vec{i} + c\left(3x^2y - y^3\right)\vec{j}$
duž puta na tom delu konture kvadranta kruga $OABO$ izračunavamo na sledeći način:

$$A_2 = cR^4\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2}\left(-\cos^3\varphi\sin\varphi + 3\cos\varphi\sin^3\varphi + 3\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{cR^4}{2}\left(\sin^4\varphi - \cos^4\varphi\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} = \frac{cR^4}{2}\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} = \frac{-cR^4}{2}\left(\cos 2\varphi\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} = cR^4\cos 2\alpha$$

3. Duž dela puta - konture $BO(L_3)$, jednačine linije putanje materijalne tačke su $y = nx$; $n = tg\left(\alpha + \pi/2\right) = -ctg\alpha = -\frac{1}{m}$, dok je element puta na tom delu puta :

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} = dx\vec{i} + ndx\vec{j} = dx\vec{i} - \frac{1}{m}dx\vec{j},$$

Rad sile $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = c\left(x^3 - 3xy^2\right)\vec{i} + c\left(3x^2y - y^3\right)\vec{j}$ duž puta na tom delu putanje duž konture $BO(L_3)$, kvadranta kruga $OABO$ izračunavamo na sledeći način:

$$A_3 = c\left(1 - n^4\right)\int_{R\cos(\alpha+\pi/2)}^{0} x^3dx = -c\left(1 - n^4\right)\int_0^{-R\sin\alpha} x^3dx = \frac{-c\left(1 - n^4\right)}{4}\left(R\sin\alpha\right)^4 = \frac{-c\left(1 - m^4\right)}{4m^4}\left(R\sin\alpha\right)^4$$

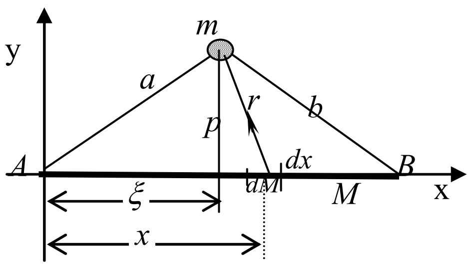
Kako je ukupan rad sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke po kontiri kvadranta kruga $OABO$ jednak zbiru radova duž delova puta – stranica konture kvadrata, to *ukupan zbir svih tih radova*

$$A^{\vec{F}} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{cR^4}{4}\left(\cos 2\alpha + 4\cos 2\alpha + \cos 2\alpha\right) = \frac{2cR^4}{3}\cos 2\alpha = \frac{cR^4}{3}$$

Zadatak 5. Odrediti Newton-ovu gravitacionu silu između materijalne tačke mase m i homogenog štapa mase M (homogene nžmaterijalne linie), dužine l, ako je p normalno rastojanje materijalne tačke od štapa. Koliki je Newton-ov potencijal?

Rešenje:

Newton-ova gravitaciona sila je obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja masa. Elementarna masa štapa je: $dM = \rho' dx$, gde je ρ' linijska gustina, pa je ukupna masa $M = \rho' l$



Slika 5.

Prema tome Newton-ova gravitaciona sila F_r između materijalne tačke mase m i homogenog štapa mase M (homogene nžmaterijalne linie), dužine l, ako je p normalno rastojanje materijalne tačke od štapa, je:

$$F_r = -\int \frac{fmdM}{r^2} = -fm\rho' \int \frac{dx}{(x-\xi)^2 + p^2} = \frac{-fm\rho'}{p} \int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \frac{-fm\rho'}{p}\left[arctg\frac{x-\xi}{p}\right]_0^l = \frac{-fm\rho'}{p}\left[arctg\frac{l-\xi}{p} + arctg\frac{\xi}{p}\right]$$

gde smo uveli integracionu smenu: $u = \dfrac{x-\xi}{p}$

Pošto je: $arctgx + arctgy = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$, to se dobija:

$$F_r = \frac{-fmM}{pl} arctg\frac{pl}{p^2 - (l-\xi)\xi}.$$

Potencijalna funkcija (Newton-ov potencijal) za gravitacionu silu je:

$$E_p = \Pi = -U = -\int \frac{fmdM}{r} = -fm\rho' \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{(x-\xi)^2 + p^2}} = -fm\rho' \int_{-\xi}^{\xi} \frac{du}{\sqrt{u^2+p^2}} =$$

$$= -fm\rho' \ln\left[u + \sqrt{u^2+p^2}\right]_{-\xi}^{l-\xi} = \frac{-fmM}{l}\ln\frac{l+b-\xi}{a-\xi}$$

gde su: $a = \overline{Am} = \sqrt{\xi^2 + p^2}$ i $b = \overline{Bm} = \sqrt{(l-\xi)^2 + p^2}$

Zadatak 6. Materijalna tačka mase $m = 2[kg]$ kreće se pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli jednačine $y = 4px^2$, gde je $p[m^{-1}]$ parametar dimenzione saglasnosti, iz početnog položaja $N_0(y_0 = 10\,cm)$ bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u vertikalnoj ravni. Koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?

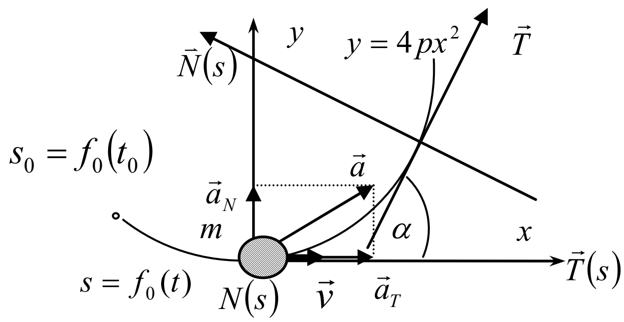
Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes-ove koordinate (x, y, z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde paraboli, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija – parabola u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je $f(x, y) = y - 4x^2 = 0$. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna.

Zadatkom se traži da se napišu jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole kada je izložena dejstvu dve geometrijske stacionarne veze i dejstvu sile sopstvene težine primenom principa dinamičke ravnoteže. Kako ova materijalna tačka ima, kako smo prethodnom analizom zaključili, jedan stepen slobode kretanja za generalisanu koordinatu izabraćemo put po luku parabole po kojoj se kreće i označićemo ga sa: s. Brzina materijalne tačke pada u pravac tangente na putanju, ovde na zadatu parabolu i iznosi

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \ .$$

Pravac tangente na putanju materijalne tačke – zadatu parabolom je definisan uglom α, i jasno je da je $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx} = y' = 8px$ za slučaj zadate parabole. Za primenu principa dinamičke ravnoteže potrebno je napraviti analizu sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku. Na materijalnu tačku dejstvuju sledeće sile: aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{j}$, a dejstvom veza javlja se sila otpora veza koja je upravna na liniju putanje i može se izraziti u obliku $\vec{F}_{wN} = \vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x, y)$, jer se radi o idealnim vezama $z = 0$ **i** $f(x, y) = y - 4px^2 = 0$, pa nema tangencijalne komponente. Analizom zaključujemo da se radi o kretanju u ravni xOy. Javlja se i sila inercije koja je suprotno smerna od vektora ubrzanja materijalne tačke pomoženog masom, što je definisano jednom od definicija vektorskih invarijanti dinamike materijalne tačke. Za silu inercije možemo da napišemo: $\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$. U ovom slučaju radi jednostavnosti rešavanja zadatka dobro je koristiti prirodni koordinatni sistem linije putanje kretanja materijalne tačke, ali se jednačine kretanja mogu napisati i u Descartes-ovom sistemu koordinata.



Princip dinamičke ravnoteže smo formulisali sledećim iskazom:

Materijalno kruto telo je u ***dinamičkoj ravnoteži*** *ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze

$$\left(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)\right) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda\, grad\ f(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuju dve geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda_1\, grad\ f_1(x,y,z) + \lambda_2 gradf_2(x,y,z) = 0$$

gde su λ_1 i λ_2 nepoznati Lagrange-ovi množioci veza $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na obe površi veza, odnosno liniju

$$\left(\vec{v}(t), grad\ f_1(x,y,z)\right) = 0 \quad \text{i} \quad \left(\vec{v}(t), grad\ f_2(x,y,z)\right) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda_1\, grad\ f_1(x,y,z) + \lambda_2 gradf_2(x,y,z)$ je upravna na tangentu na presečnu krivu obe površi idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i linije po kojoj se kreće .

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad \left(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)\right) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda gradf(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja, a R je poluprečnik krivine $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$.

Element luka s duž parabole – putanje materijalne tačke je:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju smo napisali:

$$(-m\vec{a}) + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0 \quad \text{i uslov brzine } (\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)) = 0$$

ili

$$(-m\vec{a}_N) + (-m\vec{a}_T) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0\,,$$

Iz prikazanih vektorskih jednačina možemo napisati odgovarajući broj skaranih jednačina. Iz prvog zapisa možemo da napišemo dve diferencijalne jednačine :

$$(-m\ddot{x}) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$(-m\ddot{y}) + (-mg) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i uslov za brzinu

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ili kako je $f(x,y) = y - 4px^2 = 0$, prethodni sistem diferencijalnih jednačina i uslov za brzinu postaju:

$$(-m\ddot{x}) - 8\lambda px = 0$$

$$(-m\ddot{y}) + (-mg) + \lambda = 0$$

$$-8p\dot{x}x + \dot{y} = 0$$

U Descartes-ovom sistemu koordinata smo dobili dve diferencijalne jednačine i jedan uslov za brzinu, iz kojih treba odrediti Lagrange-ov množilac veze i dve koordinate što nije tako prost zadatak. Zato čemo se ovde i zaustaviti jer je zadatkom tražemo da se napišu diferencijalne jednačine.

Lagrange-ov množilac veze je:

$$\lambda = m(\ddot{y} + g) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)$$

i sila otpora veze je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\ f(x,y,z) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)\left(-8px\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Pri tome je potrebno prethodno rešiti nelinearnu diferencijalnu jednačinu:

$$\ddot{x} + 8px\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right) = 0 \qquad y = 4px^2$$

po koordinati x koju smo u Descartes-ovom sistemu koordinata izabrali za generalisanu koordinatu.

Kako je:

$$\ddot{x}\left(1 + 64p^2x^2\right) = -8px\left(8p\dot{x}^2 + g\right) \qquad \ddot{x} = -\frac{8px\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\left(1 + 64p^2x^2\right)}$$

Sledi da je

$$\lambda = m\left(8p\dot{x}^2 - 64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} + g\right) = m\left(\frac{8p\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} - 64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} + \frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right) =$$

$$= m\left(\frac{8p\dot{x}^2 + 8p\dot{x}^2 64p^2x^2}{\left(1+64p^2x^2\right)} - \frac{\left(8p\dot{x}^2 64p^2x^2 + g64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)} + \frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right) = m\frac{8p\dot{x}^2 + g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

I konačno se za Lagrange-ov množilac veze dobija izraz preko kvadrata horizontalne komponente brzine i kvadrata apscise položaja materijalne tačke na paraboli.:

$$\lambda = m\frac{8p\dot{x}^2 + g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Normalna komponenta otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po idealno glatkoj paraboli u vektorskom obliku je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\; f(x,y,z) = m\frac{8p\dot{x}^2 + g}{\left(1+64p^2x^2\right)}\left(-8px\vec{i} + \vec{j}\right)$$

što predstavlja izraz u funkciji zavisnosti od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Intenzitet normalne komponente otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po paraboli

$$\left|\vec{F}_w\right| = F_w = \left|\vec{F}_N\right| = F_N = m\frac{\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$$

i zavisi samo od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Drugi pristup je da vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po paraboli pod dejstvom sopstvene težine analiziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanje. Zato ćemo razmotriti u drugom obliku istu vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže te materijalne tačke na paraboli:

$$\left(-m\vec{a}_N\right) + \left(-m\vec{a}_T\right) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i:

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right) + \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right) + mg\left(-\sin\alpha\vec{T} - \cos\alpha\vec{N}\right) + F_{N.}\vec{N} = 0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ parabole, ose oskulatorne ravni parabole dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0$, u pravcu tangente na putanju – na parabolu

$-m\dfrac{v^2}{R_k} - mg\cos\alpha + F_N = 0$, u pravcu normale na putanju - na parabolu

gde je poluprečnik krivine: $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se odredi otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$E_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\left(y - y_0\right) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(y_0 - y\right).$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže za pravac normale sledi:

$$F_N = \frac{mv_0^2}{R_k} + 2\frac{mg}{R_k}(y_0 - y) + \frac{mg}{\sqrt{1+64p^2x^2}}.$$

Kako je $y = 4px^2$ to je kvadrat brzine:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+64p^2x^2)$$

Pa imajući u vidu izraz za poluprečnik krivine izraz za otpor veze možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha = m\frac{\dot{x}^2(1+64p^2x^2)}{\sqrt{(1+64p^2x^2)^3}} + mg\frac{1}{\sqrt{(1+64p^2x^2)}} = \frac{m(p\dot{x}^2+g)}{\sqrt{(1+64p^2x^2)}}$$

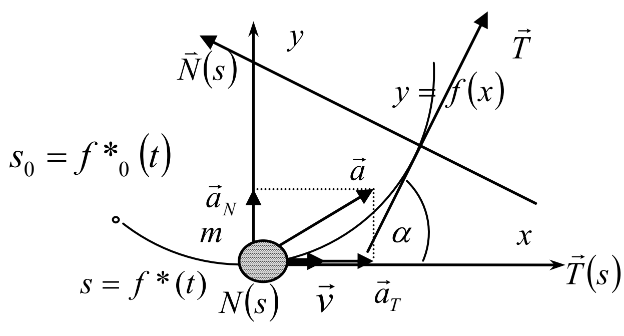
To je identičan izraz koji smo za silu otpora idealne veze dobili i preko rešavanja zadatka u Descartes-ovom sistemu koordinata.

U temenu parabole je: $x = 0 \;\; i \;\; y = 0$, pa je $F_N = 16mgy_0 + mg = G(1+16y_0) = 32{,}18[N]$

Zadatak 7. Odrediti u vertikalnoj ravni Oxy jednačinu glatke linije - putanje teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk/R\,;R = R_k$.

Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes-ove koordinate (x,y,z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde nepoznatoj, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je nepoznata $f(x,y) = 0$ i zadatkom se traži. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna. Takodje je zadatkom dato da je veza idealna i da je otpor veze obrnuto *srazmeran krivini putanje* $F_N = mgk/R\,;R = R_k$.



Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad (\vec{v}(t), grad\; f(x,y,z)) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

*V*ektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po glatkoj krivoj u vertikalnoj ravni pod dejstvom sopstvene težine anliziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanje. Zato ćemo razmotriti tu vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže te materijalne tačke u obliku:

$$\left(-m\vec{a}_N\right) + \left(-m\vec{a}_T\right) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right) + \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right) + mg\left(-\sin\alpha\vec{T} - \cos\alpha\vec{N}\right) + F_{N.}\vec{N} = 0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ krive linije koju tražimo, ose oskulatorne ravni krivolinijske putanje i dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0$, u pravcu tangente na putanju

$-m\frac{v^2}{R_k} - mg\cos\alpha + F_N = 0$, u pravcu normale na putanju

gde je poluprečnik krivine: $R_k = \frac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}$, a element luka putanje $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle, sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku izrazi pomoću krivine:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ i $\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$E_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\left(y - y_0\right) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(y_0 - y\right).$$

Kako je oy-osa usmerena naviše, onda integral energije daje:

$v^2 = v_0^2 - 2gy$, gde je $y_0 = 0$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke u pravcu normale na traženu krivu liniju sledi:

$$\frac{mv^2}{R} = -mg\cos\alpha + F_N = \frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{mgk}{R}$$

Pošto je zadatkom definisana sila otpora dejstvujuće veze linije, a traži se jednačina linije to rešavamo obrnuti zadatak i prethodna jednačina je diferencijalna jednačina putanje – linija veze koja dejstvuje na materijalnu tačku .

Posle transformacije dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu linije putanje:

$$\frac{m\left(v^2-kg\right)}{R}=\frac{m\left(v_0^2-2gy-kg\right)}{R}=\frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}};$$

odnosno:

$$\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''}=\left(2y+c\right),$$

gde je uvedena oznaka radi jednostavnijeg pisanja

$$c=-\frac{v_0^2-kg}{g}$$

Zamenom poluprečnika krivine relacijom $R_k=\frac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}$ dobijamo:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\left(2y+c\right)};$$

Ta diferenvžcijalna jednačina razdvaja promenljive integracije y i $y'=\frac{dy}{dx}$, koordinate pokretne materijalne tačke u ravni xOy te je:

$$\frac{2y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{2dy}{\left(2y+c\right)};$$

Integraljenjem leve i desne strane prethodnne jednačine u diferencijalnom obliku dobijamo

$$\ln\sqrt{1+y'^2}=\ln\left(2y+c\right)+\ln C_1=\ln C_1\left(2y+c\right)$$

Imajući u vidu da je osobine logaritama kvadrata, količnika i proizvoda lako je iz prethodnog dobiti sledeće

$$y'^2=ay+b;\quad a=2C_1\ \text{ i }\ b=C_1c-1$$

Ponovo razvajamo promenljive integracije

$$y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{ay+b}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{ay+b}}=dx;\ 2\sqrt{ay+b}=a\left(x+C_2\right)$$

Te još jednim integraljenjem dobijamo sledeću jednačinu krive linije:

$$ay+b=\frac{a^2}{4}\left(x+C_2\right)^2\ \text{tj.}$$

$$y=\frac{a}{4}\left(x+C_2\right)^2-\frac{b}{a},$$

koja je zadatkom tražena. Znači tražena glatka kriva linija u vertikalnoj ravni Oxy putanja teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N=mgk/R$; $R=R_k$ je parabola - kriva linija drugog reda jednačine

$$y=\frac{a}{4}\left(x+C_2\right)^2-\frac{b}{a}.$$

Mi smo ustvari dobili višeparametarsku familiju krivih linija parabola, jer u jednačini krive linije ima više proizvoljnih konstanti integracije, ali za sve te putanje – krive linije kao veze dejstva prinude veze u kretanju materijalne tačke imaju svojstvo da je otpor veze obrnuto proporcionalan poluprečniku krivine veze, jer smo to jednačinu izveli iz tog uslova.