II vežba

Impuls kretanja i sila inercije materijalne tačke.

Zadatak 1: Vektor položaja $\vec{\rho}(r,\varphi,z)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$, mase m, *slika 1*, zadat je pomoću vektora položaja:

$$\vec{\rho}(r,\varphi,z) = r\vec{r}_0 + z\vec{k}$$

čije su koordinate funkcije vremena:

$$r(t) = a_0\frac{t^2}{2} + v_0 t + \ell_0$$

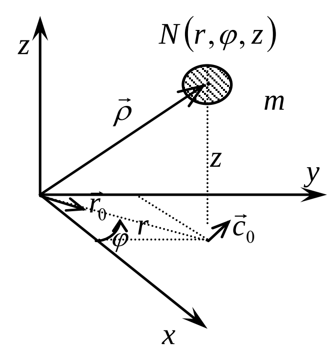
$$z(t) = a_0\frac{t^2}{2} + v_0 t + z_0$$, dok jedinični vektor cirkularnog pravca rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko ose z .

Odrediti:

a* Brzinu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata.



Slika 1.

Rešenje:

Vektor brzine materijalne tačke u polarno-cilindričkom sistemu koordinata je:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k} = (a_0 t + v_0)\vec{r}_0 + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\vec{c}_0 + (a_0 t + v_0)\vec{k}$$

Projekcije vektora brzine u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:

* u radijalnom pravcu: $v_r = (a_0 t + v_0)$

* u cirkularnom pravcu: $v_c = \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0$ i

* u aksijalnom pravcu: $v_a = (a_0 t + v_0)$

Veza polarno cilindričnih i Descartes-ovih koordinata je oblika:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z\,,$$

pa je vektor brzine u Descartes-ovom sistemu koordinata:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{i} + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\,,$$

a njegove projekcije u tom sistemu su:

* u pravcu ose x: $v_x = (a_0 t + v_0)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

* u pravcu ose y: $v_y=(a_0t+v_0)\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ i

* u pracu ose z: $v_z=(a_0t+v_0)$

Impuls kretanja po definiciji je: $\vec{p}(t)=\vec{K}(t)=m\vec{v}$, pa su mu projekcije :

U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:

-u radijelnom pravcu: $p_r=m(a_0t+v_0)$

-u cirkularnom pravcu: $p_c=m\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0$ i

-u aksijalnom pravcu: $p_a=m(a_0t+v_0)$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

-u pravcu ose x: $p_x=m\left[(a_0t+v_0)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$

-u pravcu ose y: $p_y=m\left[(a_0t+v_0)\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$ i

-u pracu ose z: $p_z=m(a_0t+v_0)$

Vektor ubrzanja posmatrane materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$ u polarno-cilindričkom sistemu koordinata je:

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{c}_0+\ddot{z}\vec{k}=\left[a_0-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\right]\vec{r}_0+2(a_0t+v_0)\omega_0\vec{c}_0+a_0\vec{k}$$

Projekcije vektora ubrzanja u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:

-u radijalnom pravcu: $a_r=a_0-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $a_c=2(a_0t+v_0)\omega_0$ i

-u aksijalnom pravcu: $a_a=a_0$

Vektor ubrzanja u Descartes-ovom sistemu koordinata:

$$\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}=\left(\ddot{r}\cos\varphi-2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{i}+\left(\ddot{r}\sin\varphi+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{j}+\ddot{z}\vec{k},$$

a njegove projekcije u tom sistemu su:

-u pravcu ose x: $a_x=a_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-2(a_0t+v_0)\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

-u pravcu ose y: $a_y=a_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+2(a_0t+v_0)\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ i

-u pracu ose z: $a_z=a_0$

Sila inercije po definiciji je: $\vec{I}_F(t)\overset{def}{=}-m\vec{a}(t)$, pa su joj projekcije :

U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:

-u radijalnom pravcu: $I_{F\,r}=-m\left[a_0-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\right]$

-u cirkularnom pravcu: $I_{Fc}=-2m(a_0t+v_0)\omega_0$ i

-u aksijalnom pravcu: $I_{Fa}=-ma_0$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

-u pravcu ose x:

$$I_{Fx}=-m\left[a_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-2(a_0t+v_0)\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$$

-u pravcu ose y:

$$I_{F\,y}=-m\left[a_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+2(a_0t+v_0)\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-\left(a_0\,t^2/2+v_0t+\ell_0\right)\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$$ i

-u pravcu ose z: $I_{Fz}=-ma_0$

Zadatak 2: Vektor položaja $\vec{\rho}(r,\varphi,z)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$, mase m, *slika 1*, zadat je pomoću vektora položaja:

$$\vec{\rho}(r,\varphi,z)=r\vec{r}_0+z\vec{k}$$

čije su koordinate funkcije vremena:

$r(t) = R_0$

$z(t) = a_0 \dfrac{t^2}{2} + v_0 t + z_0$, dok jedinični vector cirkularnog pravca rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko ose z .

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u polarno-cilindričkom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata.

Rešenje:

Vektor brzine materijalne tačke u polarno-cilindričkom sistemu koordinata je:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k} = R_0\omega_0\vec{c}_0 + (a_0 t + v_0)\vec{k}$$

Projekcije vektora brzine u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:

-u radijalnom pravcu: $v_r = 0$

-u cirkularnom pravcu: $v_c = R_0\omega_0$ i

-u aksijalnom pravcu: $v_a = (a_0 t + v_0)$

Vektor brzine materijalne tačke u Descartes-ovom sistemu koordinata je:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{i} + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

a njegove projekcije u tom sistemu su:

-u pravcu ose x: $v_x = -R_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

-u pravcu ose y: $v_y = R_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ i

-u pravcu ose z: $v_z = (a_0 t + v_0)$

Impuls kretanja po definiciji je: $\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m\vec{v}$, pa su mu projekcije :

U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:

-u radijelnom pravcu: $p_r = 0$

-u cirkularnom pravcu: $p_c = mR_0\omega_0$ i

-u aksijalnom pravcu: $p_a = m(a_0 t + v_0)$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

-u pravcu ose x: $p_x = -R_0\omega_0 m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

-u pravcu ose y: $p_y = R_0\omega_0 m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ i

-u pravcu ose z: $p_z = m(a_0 t + v_0)$

Vektor ubrzanja posmatrane materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$ u polarno-cilindričkom sistemu koordinata je:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k} = -R_0\omega_0^2\vec{r}_0 + a_0\vec{k}$$

Projekcije vektora ubrzanja u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:

-u radijalnom pravcu: $a_r = -R_0\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $a_c = 0$ i

-u aksijalnom pravcu: $a_a = a_0$

Vektor ubrzanja u Descartes-ovom sistemu koordinata:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = (\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{i} + (\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

a njegove projekcije u tom sistemu su:

-u pravcu ose x: $a_x = -R_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

-u pravcu ose y: $a_y = -R_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ i

-u pravcu ose z: $a_z = a_0$

Sila inercije po definiciji je: $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\vec{a}(t)$, pa su joj projekcije :

U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:

-u radijalnom pravcu: $I_{Fr} = -mR_0\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $I_{Fc} = 0$ i

-u aksijalnom pravcu: $I_{Fa} = -ma_0$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

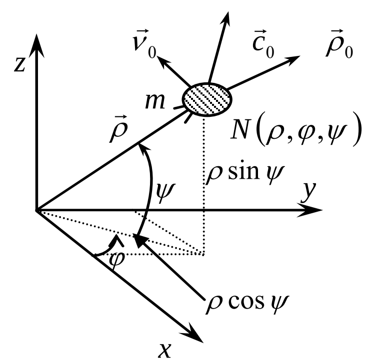
-u pravcu ose x:

$I_{Fx} = R_0\omega_0^2 m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

-u pravcu ose y:

$I_{Fy} = R_0\omega_0^2 m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ i

-u pravcu ose z: $I_{Fz} = -ma_0$



Slika 2.

Zadatak 3: Vektor položaja $\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$, mase m, *slika 2*, zadat je pomoću vektora položaja:

$$\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi) = \rho\vec{\rho}_0$$

Pri čemu je intenzitet vektora položaja materijalne tačke funkcija vremena određena sa :

$$\rho(t) = a_0\frac{t^2}{2} + v_0 t + \ell_0$$

dok jedinični vector $\vec{\rho}_0$ orjentacije vektora položaja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω_0 oko ose z, zaklapajući sa xOy .koordinatnom ravni ugao $\psi(t) = \omega_0 t$.

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata.

Rešenje:

Vektor brzine materijalne tačke u sfernom sistemu koordinata je:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\cos\psi\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \rho\dot{\psi}\vec{v}_0 = (a_0 t + v_0)\vec{\rho}_0 + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0 \cos\omega_0 t\,\vec{c}_0 + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\vec{v}_0$$

Projekcije vektora brzine u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:

- radijalnom pravcu $v_\rho = \left(a_0 t + v_0\right)$,

-cirkularnom pravcu $v_c = \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0 \cos\omega_0 t$ i

-meridijalnom pravcu $v_\nu = \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0$

Veza sfernih i Descartes-ovih koordinata je oblika:

$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\psi\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\psi$$

pa je vektor brzine u Descartes-ovom sistemu koordinata:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \left(\dot{\rho}\cos\psi\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - \rho\dot{\psi}\sin\psi\cos\varphi\right)\vec{i} +$$
$$+\left(\dot{\rho}\cos\psi\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi - \rho\dot{\psi}\sin\psi\sin\varphi\right)\vec{j} + \left(\dot{\rho}\sin\psi + \rho\dot{\psi}\cos\psi\right)\vec{k}$$

a njegove projekcije u tom sistemu su:

-u pravcu ose x:

$$v_x = \left(a_0 t + v_0\right)\cos\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) - \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) -$$
$$-\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\sin\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right)$$

-u pravcu ose y:

$$v_y = \left(a_0 t + v_0\right)\cos\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) -$$
$$-\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\sin\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right)$$ i

-u pravcu ose z:

$$v_z = \left(a_0 t + v_0\right)\sin\omega_0 t + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\cos\omega_0 t$$

Impuls kretanja po definiciji je: $\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m\vec{v}$, pa su mu projekcije :

U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:

- radijalnom pravcu $p_\rho = m\left(a_0 t + v_0\right)$,

-cirkularnom pravcu $p_c = m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t$ i

-meridijalnom pravcu $p_\nu = m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

-u pravcu ose x:

$$p_x = m\left(a_0 t + v_0\right)\cos\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) - m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) -$$
$$-m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\sin\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right)$$

-u pravcu ose y:

$$v_y = m\left(a_0 t + v_0\right)\cos\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) + m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) -$$
$$-m\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\sin\omega_0 t\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right)$$ i

-u pracu ose z:

$$v_z = m\left(a_0 t + v_0\right)\sin\omega_0 t + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0\cos\omega_0 t$$

Vektor ubrzanja posmatrane materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u sfernom sistemu koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 + \left(\rho\cos\psi\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\psi - 2\rho\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi\right)\vec{c}_0 + \left(\rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\cos\psi\sin\psi\dot{\varphi}^2\right)\vec{v}_0$$

Projekcije vektora ubrzanja u sfernom sistemu koordinata su:

-u radijalnom pravcu: $a_\rho = a_0 - \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0^2\cos^2\omega_0 t - \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $a_c = 2\left(a_0 t + v_0\right)\Omega_0\cos\omega_0 t - 2\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0\omega_0\sin\omega_0 t$ i

-u meridijalnom pravcu: $a_\nu = 2\left(a_0 t + v_0\right)\omega_0 + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0^2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t$

Sila inercije po definiciji je: $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\vec{a}(t)$, pa su joj projekcije :
U sfernom sistemu koordinata:
-u radijalnom pravcu: $I_{F\rho} = -m\left(a_0 - \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t\right)$
-u cirkularnom pravcu: $I_{Fc} = -m\left[2\left(a_0 t + v_0\right)\Omega_0 \cos\omega_0 t - 2\left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0 \omega_0 \sin\omega_0 t\right]$ i
-u meridijalnom pravcu: $I_{F\nu} = -m\left[2\left(a_0 t + v_0\right)\omega_0 + \left(a_0 t^2/2 + v_0 t + \ell_0\right)\Omega_0^2 \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t\right]$

Zadatak 4: Vektor položaja $\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$, mase m, *slika 2*, zadat je pomoću vektora položaja:
$$\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi) = \rho\vec{\rho}_0$$
Pri čemu je intenzitet vektora položaja materijalne tačke konstantan $\rho = R_0$, dok jedinični vector $\vec{\rho}_0$ orjentacije vektora položaja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω_0 oko ose z, zaklapajući sa xOy .koordinatnom ravni ugao $\psi(t) = \omega_0 t$.

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata.

Rešenje:

Vektor brzine materijalne tačke u sfernom sistemu koordinata je:
$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\cos\psi\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \rho\dot{\psi}\vec{v}_0$$
Projekcije vektora brzine u polarno-cilindričkom sistemu koordinata su:
- radijalnom pravcu $v_\rho = 0$,
-cirkularnom pravcu $v_c = R_0\Omega_0 \cos\omega_0 t$ i
-meridijalnom pravcu $v_\nu = R_0\omega_0$

Veza sfernih i Descartes-ovih koordinata je oblika:
$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\psi\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\psi$$
pa je vektor brzine u Descartes-ovom sistemu koordinata:
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \left(\dot{\rho}\cos\psi\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - \rho\dot{\psi}\sin\psi\cos\varphi\right)\vec{i} +$$
$$+\left(\dot{\rho}\cos\psi\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi - \rho\dot{\psi}\sin\psi\sin\varphi\right)\vec{j} + \left(\dot{\rho}\sin\psi + \rho\dot{\psi}\cos\psi\right)\vec{k}$$
a njegove projekcije u tom sistemu su:
-u pravcu ose x: $v_x = -R_0\Omega_0 \cos\omega_0 t \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) - R_0\omega_0 \sin\omega_0 t \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$
-u pravcu ose y: $v_y = R_0\Omega_0 \cos\omega_0 t \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) - R_0\omega_0 \sin\omega_0 t \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$ i
-u pracu ose z: $v_z = R_0\omega_0 \cos\omega_0 t$

Impuls kretanja po definiciji je: $\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m\vec{v}$, pa su mu projekcije :
U polarno-cilindričnom sistemu koordinata:
- radijalnom pravcu $p_\rho = 0$,

-cirkularnom pravcu $p_c = mR_0\Omega_0 \cos\omega_0 t$ i

-meridijalnom pravcu $p_\nu = mR_0\omega_0$

U Descartes-ovom sistemu koordinata:

-u pravcu ose x: $p_x = -mR_0\Omega_0 \cos\omega_0 t \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) - mR_0\omega_0 \sin\omega_0 t \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$

-u pravcu ose y: $p_y = mR_0\Omega_0 \cos\omega_0 t \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) - mR_0\omega_0 \sin\omega_0 t \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$ i

-u pracu ose z: $p_z = mR_0\omega_0 \cos\omega_0 t$

Vektor ubrzanja posmatrane materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u sfernom sistemu koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 + \left(\rho\cos\psi\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\psi - 2\rho\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi\right)\vec{c}_0 + \left(\rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\cos\psi\sin\psi\dot{\varphi}^2\right)\vec{v}_0$$

Projekcije vektora ubrzanja u sfernom sistemu koordinata su:

-u radijalnom pravcu: $a_\rho = R_0\Omega_0^2\cos^2\omega_0 t - R_0\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $a_c = -2R_0\Omega_0\omega_0 \sin\omega_0 t$ i

-u meridijalnom pravcu: $a_\nu = R_0\Omega_0^2 \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t$

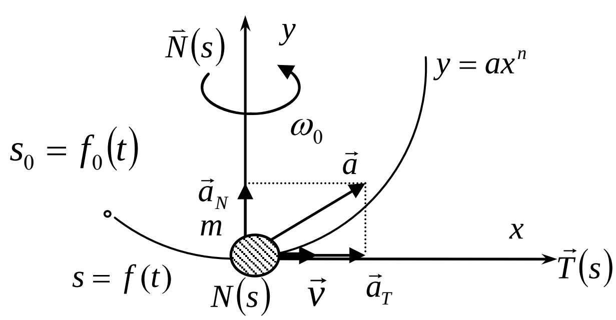
Sila inercije po definiciji je: $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\vec{a}(t)$, pa su joj projekcije :

U sfernom sistemu koordinata:

-u radijalnom pravcu: $I_{F\rho} = -mR_0\Omega_0^2\cos^2\omega_0 t + mR_0\omega_0^2$

-u cirkularnom pravcu: $I_{Fc} = m2R_0\Omega_0\omega_0 \sin\omega_0 t$ i

-u meridijalnom pravcu: $I_{F\nu} = -mR_0\Omega_0^2 \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t$



Slika 3.

Zadatak 5: Materijalna tačka mase m, *slika 3*, kreće se po paraboli jadnačine $y = ax^n$, gde je n ceo broj prelateći po paraboli put $s = f(t)$. (Posebni slučajevi $s(t) = v_0 t$ i $s(t) = bt^n + ct^{n-1}$).

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

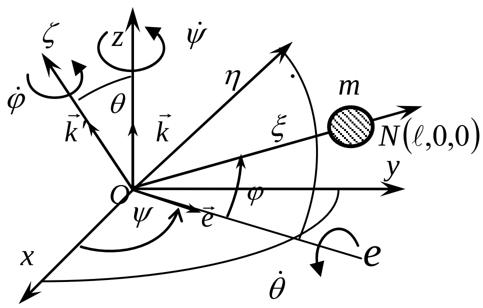
Zadatak 6: Materijalna tačka mase m, *slika 3*, kreće se po paraboli jadnačine $y = ax^n$**,** gde je n ceo broj, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko ose y, prelateći po pokretnoj paraboli put $s = f(t)$. (Posebni slučajevi $s(t) = v_0 t$ *i* $s(t) = bt^n + ct^{n-1}$).

Odrediti:

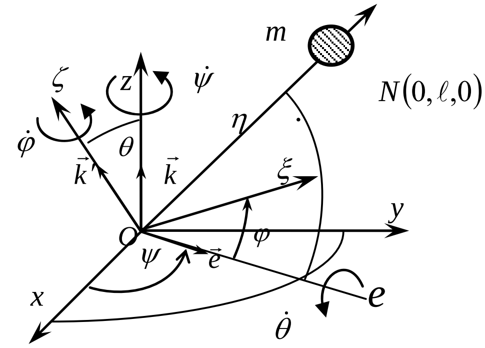
a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;



Slika 4.



Slika 5.

Zadatak 7: Materijalna tačka mase m vezana je za osu ξ pokretnog sistema koordinata $\xi O\eta\zeta$ na rastojanju ℓ od koordinatnog početka O, *slika 4.* Neka je sistem koordinata $xOyz$ nepokretan i neka su se u početnom trenutku ose pokretnog sistema koordinata $\xi O\eta\zeta$ poklapale sa odgovarajućim osama nepokretnog sistema. Naka je kretanje pokretnog sistema obrtanje oko koordinatnog početka i neka je definisano pomoću tri rotacije oko koordinatnog početka O, odnosno oko osa pojedinačno na sledeći način: Zamislimo da su se u početnom trenutku ose koordinatinih sistema poklapale, pa smo zatim pokretni sistem odvojili od nepokretnog $xOyz$ jednom rotacijom oko ose z za ugao $\psi(t)= f(t)$ ugaonom brzinom precesije $\dot{\psi}(t)=\dot{f}(t)$. Posle te prve rotacije osa koja se poklapala sa osom z je prešla u osu ζ, a osa koja se poklapala sa osom x prešla je u osu e, čvornu osu, orjentisanu ortom $\vec{e}$, a osa koja se poklapala sa y osom prešla je u osu u i obe u istoj ravni Oxy i zaklapaju sa njima ugao precesije ψ. Zatim nastavljamo obrtanje koordinatnog sistema oko te ćvorne ose za ugao $\theta(t)=g(t)$, koji smo nazvali ugao nutacije , a obrtanje je izvršeno ugaonom brzinom $\dot{\theta}(t)=\dot{g}(t)$ koja je ugaona brzina nutacije. Pri ovoj rotaciji osa koja se poklapala sa z osom presla je u ζ osu, a osa u prešla je u osu c orjentisanu ortom $\vec{c}$. Poslednja, treća rotacija koordinatnog sistema se izvodi oko ζ ose za ugao rotacije $\varphi(t)=\mu(t)$ ugaonom brzinom rotacije $\dot{\varphi}(t)=\dot{\mu}(t)$, čime je osa e prešla u osu ξ a osa c u osu η.
(Posebni slučajevi $\psi(t)=\omega_0 t$, $\varphi(t)=\omega_s t$ *i* $\theta(t)=\Omega t$, *odnosno* $\theta(t)=\theta_0$ *)*

Odrediti:

a* Brzinu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njegove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata.

Rešenje:

Materijalna tačka ima vektor položaja u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\vec{\rho}=l\vec{i}\,'$, gde smo sa $\vec{i}\,'$ označili jedinični ort ose ξ pokretnog koordinatnog sistema, a u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $\vec{\rho}=l(\cos\varphi\cos\psi\vec{i}+\cos\varphi\sin\psi\vec{j}+\sin\varphi\vec{k})$. Vektor brzine je $\vec{v}=\dfrac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$, pa su njene komponente u odnosu na pokretni koordinatni sistem:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}=\begin{vmatrix}\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ l & 0 & 0\end{vmatrix}=l\left(\omega_\zeta \vec{j}'+\omega_\eta \vec{k}'\right)$$

dok je za nepokretni koordinatni sistem

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}=l\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=l\left(\left(\omega_y\sin\varphi-\omega_z\cos\varphi\sin\psi\right)\vec{i}+\left(\omega_z\cos\varphi\cos\psi-\omega_x\sin\varphi\right)\vec{j}+\left(\omega_x\cos\varphi\sin\psi-\omega_y\cos\varphi\cos\psi\right)\vec{k}\right)$$

gde se komponente ugaone brzine u odnosu na nepokretni i pokretni koordinatni sistem određuju iz Euler-ovih konematičkih jednačina:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$ -u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \qquad \omega_\xi=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\omega_y=\dot{\theta}\cos\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \qquad \omega_\eta=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta \qquad \omega_\zeta=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta$$

Koje se za specijalne slušajeve date zadatkom $\psi(t)=\omega_0 t$, $\varphi(t)=\omega_s t$ i $\theta(t)=\Omega t$, svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$ -u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_x=\Omega\cos\omega_0 t+\omega_s\sin\Omega t\sin\omega_0 t \qquad \omega_\xi=\Omega\cos\omega_s t+\omega_0\sin\Omega t\sin\omega_s t$$

$$\omega_y=\Omega\cos\omega_0 t-\omega_s\sin\Omega t\cos\omega_0 t \qquad \omega_\eta=-\Omega\sin\omega_s t+\omega_0\sin\Omega t\cos\omega_s t$$

$$\omega_z=\omega_0+\omega_s\cos\Omega t \qquad \omega_\zeta=\omega_s+\omega_0\cos\Omega t$$

Odnosno za $\theta(t)=\theta_0$ svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$ -u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_x=\omega_s\sin\theta_0\sin\omega_0 t \qquad \omega_\xi=\omega_0\sin\theta_0\sin\omega_s t$$

$$\omega_y=-\omega_s\sin\theta_0\cos\omega_0 t \qquad \omega_\eta=\omega_0\sin\theta_0\cos\omega_s t$$

$$\omega_z=\omega_0+\omega_s\cos\theta_0 \qquad \omega_\zeta=\omega_s+\omega_0\cos\theta_0$$

poslednje jednačine su zapravo jednačine za slučaj regularne precesije.

Komponente brzine u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi O\eta\zeta$ su:

$$v_\xi=0$$

$$v_\eta=l\omega_\zeta=l\left(\omega_s+\omega_0\cos\Omega t\right)$$

$$v_\zeta=l\omega_\eta=l\left(-\Omega\sin\omega_s t+\omega_0\sin\Omega t\cos\omega_s t\right)$$

Odnosno za slučaj $\theta(t)=\theta_0$, regularne precesije:

$$v_\xi=0$$

$$v_\eta=l\omega_\zeta=l\left(\omega_s+\omega_0\cos\theta_0\right)$$

$$v_\zeta=l\omega_\eta=l\omega_0\sin\theta_0\cos\omega_s t$$

Komponente brzine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $xOyz$ su:

$$v_x=l\left(\omega_y\sin\omega_s t-\omega_z\cos\omega_s t\sin\omega_0 t\right)$$

$$v_y=l\left(\omega_z\cos\omega_s t\cos\omega_0 t-\omega_x\sin\omega_s t\right)$$

$$v_z=l\left(\omega_x\cos\omega_s t\sin\omega_0 t-\omega_y\cos\omega_s t\cos\omega_0 t\right)$$

Sada su komponente vektora $\vec{p}(t)=\vec{K}(t)=m\vec{v}$ impulsa kretanja u odnosu na posmatrane kordinatne sisteme:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$p_x = lm(\omega_y \sin\omega_s t - \omega_z \cos\omega_s t \sin\omega_0 t)$

$p_y = lm(\omega_z \cos\omega_s t \cos\omega_0 t - \omega_x \sin\omega_s t)$

$p_z = lm(\omega_x \cos\omega_s t \sin\omega_0 t - \omega_y \cos\omega_s t \cos\omega_0 t)$

-u pokretnom sistemu $\xi O \eta \zeta$

$p_\xi = 0$

$p_\eta = ml(\omega_s + \omega_0 \cos\Omega t)$

$p_\zeta = ml(-\Omega \sin\omega_s t + \omega_0 \sin\Omega t \cos\omega_s t)$

Zadatak 8: Materijalna tačka mase m vezana je za osu η pokretnog sistema koordinata $\xi O \eta \zeta$ na rastojanju ℓ od koordinatnog početka O, *slika 5*. Neka je sistem koordinata $xOyz$ nepokretan i neka su se, u početnom trenutku ose pokretnog sistema koordinata $\xi O \eta \zeta$ poklapale sa odgovarajućim osama nepokretnog sistema. Naka je kretanje pokretnog sistema obrtanje oko koordinatnog početka i neka je definisano pomoću tri rotacije oko koordinatnog početka O, odnosno oko osa pojedinačno na sledeći način: Zamislimo da su se u početnom trenutku ose koordinatinih sistema poklapale, pa smo zatim pokretni sistem odvojili od nepokretnog $xOyz$ jednom rotacijom oko ose z za ugao $\psi(t) = f(t)$ ugaonom brzinom precesije $\dot{\psi}(t) = \dot{f}(t)$. Posle te prve rotacije osa koja se poklapala sa osom z je prešla u osu ζ, a osa koja se poklapala sa osom x prešla je u osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$, a osa koja se poklapala sa y osom prešla je u osu u i obe u istoj ravni Oxy i zaklapaju sa njima ugao precesije ψ. Ovu osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$ nazvaćemo čvornom osom, Zatim nastavljamo obrtanje koordinatnog sistema oko te ćvorne ose za ugao $\theta(t) = g(t)$, koji smo nazvali ugao nutacije , a obrtanje je izvršeno ugaonom brzinom $\dot{\theta}(t) = \dot{g}(t)$ koja je ugaona brzina nutacije. Pri ovoj rotaciji osa koja se poklapala sa z osom presla je u ζ osu, a osa u prešla je u osu c orjentisanu ortom $\vec{c}$. Poslednja, treća rotacija koordinatnog sistema se izvodi oko ζ ose za ugao rotacije $\varphi(t) = \mu(t)$ ugaonom brzinom rotacije $\dot{\varphi}(t) = \dot{\mu}(t)$, čime je osa e prešla u osu ξ a osa c u osu η.

(Posebni slučajevi $\psi(t) = \omega_0 t$, $\varphi(t) = \omega_s t$ *i* $\theta(t) = \Omega t$, *odnosno* $\theta(t) = \theta_0$ *)*

Odrediti:

a* Brzinu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata.

Rešenje:

Materijalna tačka ima vektor položaja u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\vec{\rho} = l\vec{j}\,'$, gde smo sa $\vec{j}\,'$ označili jedinični ort ose η pokretnog koordinatnog sistema, a u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $\vec{\rho} = l(\cos\varphi\cos\psi\vec{i} + \cos\varphi\sin\psi\vec{j} + \sin\varphi\vec{k})$. Vektor brzine je $\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, pa su njene komponente u odnosu na pokretni koordinatni sistem:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 0 & l & 0 \end{vmatrix} = l(-\omega_\zeta \vec{i}\,' + \omega_\xi \vec{k}\,')$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = l \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= l\left(\left(\omega_y \sin\varphi - \omega_z \cos\varphi\sin\psi\right)\vec{i} + \left(\omega_z \cos\varphi\cos\psi - \omega_x \sin\varphi\right)\vec{j} + \left(\omega_x \cos\varphi\sin\psi - \omega_y \cos\varphi\cos\psi\right)\vec{k}\right)$$

gde se komponente ugaone brzine u odnosu na pokretni i nepokretni koordinatni sistem određuju iz Euler-ovih kinematičkih jednačina:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$
$$\omega_\eta = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$$
$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

Koje se za specijalne slušajeve date zadatkom $\psi(t) = \omega_0 t$, $\varphi(t) = \omega_s t$ i $\theta(t) = \Omega t$, svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\omega_x = \Omega\cos\omega_0 t + \omega_s \sin\Omega t \sin\omega_0 t$$
$$\omega_y = \Omega\cos\omega_0 t - \omega_s \sin\Omega t \cos\omega_0 t$$
$$\omega_z = \omega_0 + \omega_s \cos\Omega t$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_\xi = \Omega\cos\omega_s t + \omega_0 \sin\Omega t \sin\omega_s t$$
$$\omega_\eta = -\Omega\sin\omega_s t + \omega_0 \sin\Omega t \cos\omega_s t$$
$$\omega_\zeta = \omega_s + \omega_0 \cos\Omega t$$

Odnosno za $\theta(t) = \theta_0$ svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\omega_x = \omega_s \sin\theta_0 \sin\omega_0 t$$
$$\omega_y = -\omega_s \sin\theta_0 \cos\omega_0 t$$
$$\omega_z = \omega_0 + \omega_s \cos\theta_0$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_\xi = \omega_0 \sin\theta_0 \sin\omega_s t$$
$$\omega_\eta = \omega_0 \sin\theta_0 \cos\omega_s t$$
$$\omega_\zeta = \omega_s + \omega_0 \cos\theta_0$$

poslednje jednačine su zapravo jednačine za slučaj regularne precesije.

Komponente brzine u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi O\eta\zeta$ su:

$$v_\xi = -l\omega_\zeta = -l\left(\omega_s + \omega_0 \cos\Omega t\right)$$
$$v_\eta = 0$$
$$v_\zeta = l\omega_\xi = l\left(\Omega\cos\omega_s t + \omega_0 \sin\Omega t \sin\omega_s t\right)$$

Odnosno za slučaj $\theta(t) = \theta_0$, regularne precesije:

$$v_\xi = -l\left(\omega_s + \omega_0 \cos\theta_0\right)$$
$$v_\eta = 0$$
$$v_\zeta = l\omega_\xi = l\omega_0 \sin\theta_0 \sin\omega_s t$$

Komponente brzine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $xOyz$ su:

$$v_x = l\left(\omega_y \sin\omega_s t - \omega_z \cos\omega_s t \sin\omega_0 t\right)$$
$$v_y = l\left(\omega_z \cos\omega_s t \cos\omega_0 t - \omega_x \sin\omega_s t\right)$$
$$v_z = l\left(\omega_x \cos\omega_s t \sin\omega_0 t - \omega_y \cos\omega_s t \cos\omega_0 t\right)$$

Sada su komponente vektora $\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m\vec{v}$ impulsa kretanja u odnosu na posmatrane kordinatne sisteme:

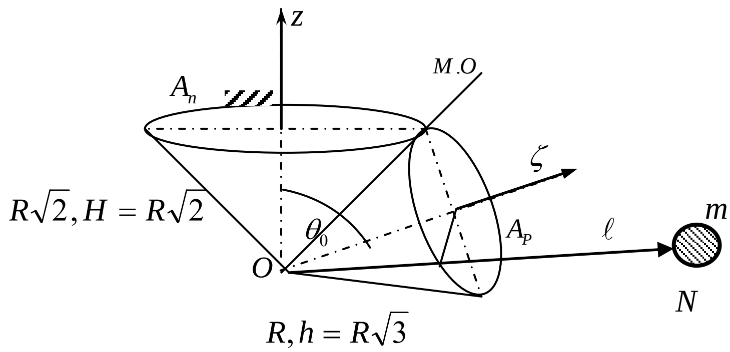
- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$p_x = lm\left(\omega_y \sin\omega_s t - \omega_z \cos\omega_s t \sin\omega_0 t\right)$$
$$p_y = lm\left(\omega_z \cos\omega_s t \cos\omega_0 t - \omega_x \sin\omega_s t\right)$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$p_\xi = -lm\left(\omega_s + \omega_0 \cos\Omega t\right)$$
$$p_\eta = 0$$

$p_z = lm(\omega_x \cos\omega_s t \sin\omega_0 t - \omega_y \cos\omega_s t \cos\omega_0 t)$ $p_\zeta = ml(\Omega \cos\omega_s t + \omega_0 \sin\Omega t \sin\omega_s t)$



Slika 6.

Zadatak 9: Materijalna tačka mase m, *slika 6*, vezana kruto, na rastojanju ℓ od vrha, mereno po izvodnici, za pokretan konus polhodije, poluprečnika osnove R i visine $R\sqrt{3}$, koji se kotrlja po nepokretnom konusu herpolhodija, poluprečnika osnove $R\sqrt{2}$ i visine $R\sqrt{2}$. Dodirna izvodnica konusa rotira oko ose nepokretnog konusa ugaonom brzinom $\Omega(t) = \varepsilon t + \Omega_0$.

Odrediti:

a* BrzInu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u pokretnom i nepokretnom sistemu koordinata.

Rešenje:

Ugao nutacije je konstantan $\theta = \theta_0 = 75^0$ pa je *ugaona brzina nutacije* jednaka je nuli $\dot{\theta} = 0$

$\psi = At + C$ - ugao precesije je linearna funkcija vremena i

$\varphi = Bt + C$ - ugao rotacije je takođe linearna funkcija vremena.

Posledice su:

$\dot{\theta} = 0$ - *ugaona brzina nutacije* jednaka je nuli

$\dot{\psi} = A = \omega_p = \Omega = const$ - *ugaona brzina precesije* je konstantna

$\dot{\varphi} = B = \omega_s = \nu = const$ - *ugaona brzina sopstvene rotacije* je takođe konstantna.

Vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ za slučaj regularne precesije je onda

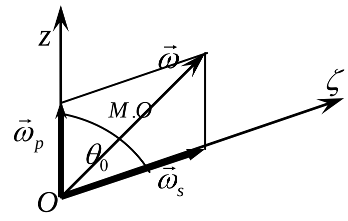
$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}' = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_s$$

Kao što je prikazano na *slici 5*. Intenzitet vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ je

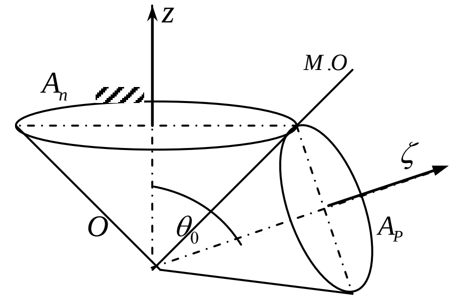
$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p\omega_s \cos\theta_0} = const$$

Pošto je $\omega = const$, $\dot{\omega} = 0$ onda su:

$a_T = 0$ i $a_N = const$



Slika 5. Komponente vektora ugaone brzine pri regularnoj precesiji



Slika 6. Pokretni i nepokretni aksoid

Vektor ugaonog ubrzanja $\dot{\vec{\omega}}$ se svodi na:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{\omega}_s$$

Pa je dopunsko ubrzanje

$$\vec{a}_d = \left(\vec{\omega}_p \times \vec{\omega}_s\right) \times \vec{\rho}$$

Euler-ove kinematičke jednačine se svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\omega_x = \omega_s \sin\theta_0 \sin\psi$$
$$\omega_y = -\omega_s \sin\theta_0 \cos\psi$$
$$\omega_z = \omega_p + \omega_s \cos\theta_0 = const$$

-u pokretnom sistemu $\xi O \eta \zeta$

$$\omega_\xi = \omega_p \sin\theta_0 \sin\varphi$$
$$\omega_\eta = \omega_p \sin\theta_0 \cos\varphi$$
$$\omega_\zeta = \omega_s + \omega_p \cos\theta_0 = const$$

pa su jesnačine nepokretnog i pokretnog aksoida:

$$x^2 + y^2 = K^2 z^2 \quad \text{i} \quad \xi^2 + \eta^2 = k^2 \zeta^2$$

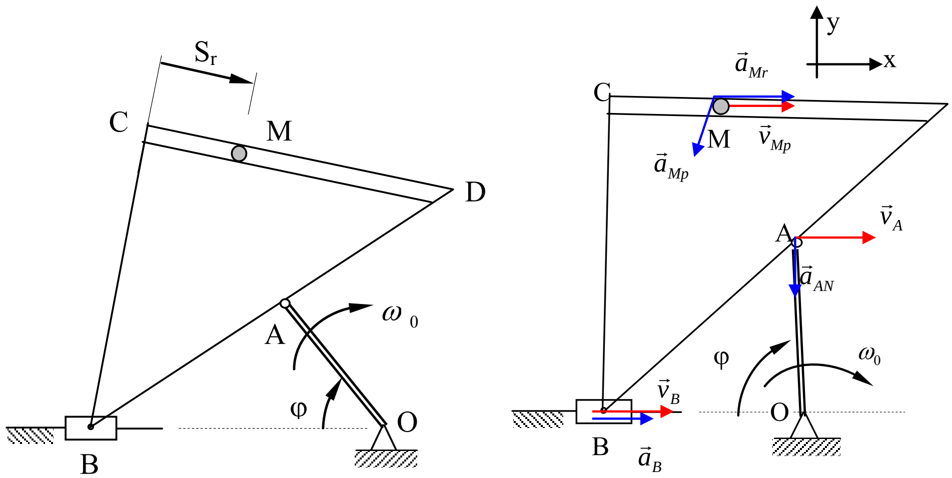
oblika pravih kružnih konusa sa vrhom u nepokretnoj tački i osama rotacije z i ζ, *slika 6*.

Zadatak 10: Po kateti $\overline{CD} = R$ jednakokrakog pravouglog trougla BCD, *slika 7*, kreće se jednakoubrzano materijalna tačka M, mase m, relativnim ubrzanjem $a_r = 2R\omega_0^2$. Na sredini stranice $\overline{BD}$ trougao je zglobno vezan za tačku A krivaje $\overline{OA} = R/2$, a u tački B za klizač koji se kreće po horizontalnim pravoliniskim vođicama čija osa prolazi kroz tačku O. Krivaja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko nepokretne horizontalne ose. U početnom trenutku tačka je bila u položaju C bez početne relativne brzine, a krivaja je zaklapala ugao $\varphi_0 = \dfrac{\pi - 1}{2}(\text{rad})$. Odrediti:

a* apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$;

b* Impuls kretanja materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njegove komponente;

c* Silu inercije materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njene komponente .



Slika 7.

Rešenje:

Kako je ugaona brzina po definiciji $\omega_0 = \dfrac{d\varphi}{dt}$ to je onda zakon promene ugla koji krivaja OA zaklapa sa horizontalom u toku kretanja $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, u posmatranom trenutku $t = \dfrac{1}{2\omega_0}$ i za zadatu vrednost početnog ugla $\varphi_0 = \dfrac{\pi - 1}{2}(\text{rad})$, dobije se $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t = \dfrac{\pi}{2}$, tj u posmatranom trenutku položaj krivaje OA je vertikalan, *slika 8*. Brzina tačke A, krivaje OA koja se obrće oko tačke O, sa smerom u posmatranom trenutku prikazana je na *slici 8*, a intenzitet joj je:

$$V_A = \frac{R}{2}\omega_0$$

Kako tačka B trougla, a u isto vreme i tačka klizača koji se kreće po horizontalnim vođicama ima brzinu kao na *slici 8*, u horizontalnom pravcu to zaključujemo da se telo nosača, trougao BCD, kreće translatorno, jer je trenutni pol u beskonačnosti s obzirom da se dve tačke toga tela, u posmatranom trenutku imaju vektore brzina paralelne, zaključujemo onda je prenosna brzina pokretne tačke:

$$V_A = \frac{R}{2}\omega_0 = V_B = V_D = V_{Mp}$$

$$\vec{v}_p = \frac{R}{2}\omega_0\vec{i}$$

id a je ugaona brzina prenosnog kretanja: $\omega_p = 0$.

Tačka M se relativno kreće po kateti CD trougla, koji ja je u posmatranom trenutku horizpntalna pa je vektor relativne brzine pokretne tačke u odnosu na telo nosača,trougla,

$\vec{v}_r = V_r\vec{i} = R\omega_0\vec{i}$, pošto je $V_r = a_r t = 2R\omega_0^2 \dfrac{1}{2\omega_0}$.

Vektor apsolutne brzine pokretne tačke M je jednak vektorskom zbiru vektora prenosne i relativne brzine posmatrane tačke, tj: $\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{3}{2}R\omega_0\vec{i}}$$

Kako je $\omega_0 = const$, tj. $\dot{\omega}_0 = 0$, to tačke krivaje OA nemaju tangencijalnu komponentu ubrzanja, a tačka A ima normalnu komponentu ubrzanja, koja je ujedno i njen vektor ubrzanja, u pravcu krivaje sa smerom prema centru krivine O , što je za koordinatni sistem xoy u odnosu na koji posmatramo kretanje, negativan smer y ose:

$\vec{a}_A = -\dfrac{R}{2}\omega_0^2\vec{j}$.

Tačka B ima ubrzanje u pravcu x ose $\vec{a}_B = a_B\vec{i}$. Trougao BCD se kreće ravanski pa se koristimo izrazom za ubrzanje tačke tela koje se kreće ravanski:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_p \times \overrightarrow{AB} - \omega_p^2\,\overrightarrow{AB} \quad ,$$

gde je $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{R}{2}\vec{i} - \dfrac{R}{2}\vec{j}$

Da bi odredili nepoznato prenosno ugaono ubrzanje $\dot{\omega}_p$:

$$a_B\vec{i} = -\frac{R}{2}\omega_0^2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\omega}_p \\ -\dfrac{R}{2} & -\dfrac{R}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

iz koje vektorske jednačine, posle izjednačavanja komponenti u istim pravcima, sledi da je vektor prenosnog ugaonog ubrzanja: $\dot{\vec{\omega}}_p = -\omega_0^2\vec{k}$.

Kako je $\dfrac{dS_r}{dt} = V_r$, tj. $S_r = a_r\dfrac{t^2}{2} + S_0$, a $S_0 = 0$,jer je tačka u početnom trenutku bila u položaju C, relativni pređeni put tačke M u posmatranom trenutku je:

$S_r = \dfrac{1}{2}a_r t^2 = \dfrac{R}{4}$, pa je položaj tačke M u odnosu na tačku A: $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{R}{4}\vec{i} + \dfrac{R}{2}\vec{j}$.

Sada je prenosno ubrzanje tačke M kao tačke tela nosaca koje se kreće ravanski jednako:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_p \times \overrightarrow{AM} - \omega_p^2\overrightarrow{AM}$$

$$\vec{a}_p = -\frac{R}{2}\omega_0^2\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 \\ -\dfrac{R}{4} & \dfrac{R}{2} & 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{a}_p = \frac{1}{2}R\omega_0^2\vec{i} - \frac{1}{4}R\omega_0^2\vec{j} \ ,$$

relativna komponenta je u pravcu x ose:

$\vec{a}_r = 2R\omega_0^2\vec{i}$

Dok je Coriolis-ovo ubrzanje jednako nuli jer se telo nosača kreće translatorno:

$\vec{a}_{cor} = 0$.

Vektor apsolutnog ubrzanja je zbir vektora relativnog, prenosnog i Coriolis-ovog ubrzanja:

$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$; što daje rezultat apsolutnog ubrzanja tačke M u traženom trenutku:

$$\boxed{\vec{a}_a = \frac{5}{2}R\omega_0^2\vec{i} - \frac{1}{4}R\omega_0^2\vec{j}}$$

Impuls kretanja materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njegove komponente su:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{3}{2}Rm\omega_0\vec{i}\ ,\ p_x = \frac{3}{2}Rm\omega_0\ ,\ p_x = 0}$$

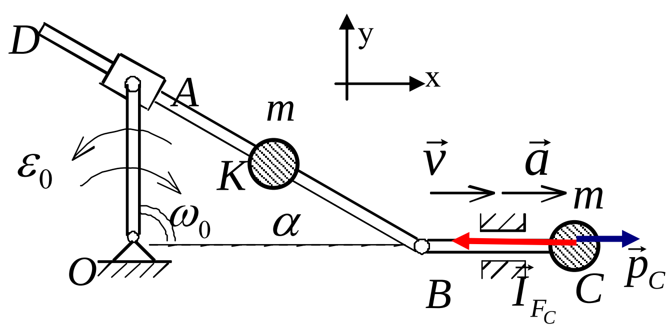
Silu inercije materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njene komponente su:

$$\boxed{\vec{I}_F = -\frac{5}{2}mR\omega_0^2\vec{i} + \frac{1}{4}mR\omega_0^2\vec{j}\ ,\ I_{Fx} = -\frac{5}{2}mR\omega_0^2\ ,\ I_{Fy} = \frac{1}{4}mR\omega_0^2}\ ,$$

a intezitet inercione sile u posmatranom trenutku je: $I_F = mR\omega_0^2\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{mR\omega_0^2\sqrt{101}}{4}$

Zadatak 11: Laki mehanizam prikazan na *slici 8* sastoji se od krivaje OA, dužine R, za čiji kraj A je zglobno vezan klizač kroz koji je provučen štap BD. Za kraj B štapa vezana je laka poluga BC, zanemarljive mase, koja se kreće translatorno pravolinijski. Tačke O, B i C leže na istoj pravoj. U trenutku kada je krivaja vertikalna, njena ugaona brzina je ω_0, ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = \sqrt{3}\,\omega_0^2$, štap BD zaklapa ugao $\alpha = 30^\circ$ sa horizontalom, a poluga ima brzinu $v = 2R\omega_o$ i ubrzanje $a = \sqrt{3}Rr\omega_o^2/16$. Smerovi datih veličina prikazani su na *slici 8*. Laki mehanizam na kraju C poluge nosi materijalnu tačku mase m, kao i jednu iste mase na sredini izmedju tačaka A i B na štapu BD. U zadatom položaju odrediti:

a* ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa BD;
b* brzine i ubrzanja materijalnih tačaka u naznačenim položajima lakog mehanizma;
c* impuls kretanja svake od materijalnih tačaka u naznačenim položajima lakog mehanizma;
d* Intenzitete sila inercije, kao i komponente svake od njih za materijalne tačake u naznačenim položajima lakog mehanizma.



Slika 8.

Rešenje:

Kako je u posmatranom trenutku krivaja OA vertikalnog položaja to je vektor brzine tačke A, krivaje OA koja se obrće oko tačke O, sa smerom u pravcu x ose, a to je praktično apsolutna brzina klizača A:

$$\vec{v}_A = R\omega_0\vec{i}\ ;$$

Brzina tačke B poluge je data, a to je ujedno i brzina tačke B štapa BD koji vrši ravansko kretanje:

$$\vec{v}_B = 2R\omega_0\vec{i}\ ;$$

Vektor relativne brzine klizača A je pravca štapa BD po kome kliza, a smera ka tački B, intenziteta koji treba da odredimo:

$$\vec{v}_{Ar} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_r\vec{i} - \frac{1}{2}V_r\vec{j}\quad ;$$

Vektor prenosne brzine je vector brzine tačke A štapa BD, i možemo ga odrediti preko poznate brzine tačke B kao:

$$\vec{v}_{Ap} = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA};$$

gde je $\overrightarrow{BA}$ vektor položaja tačke A u odnosu na tačku B u obliku:

$$\overrightarrow{BA} = -\sqrt{3}R\vec{i} + R\vec{j}\ .$$

Tako da je:

$$\vec{v}_{Ap} = 2R\omega_o\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\sqrt{3}R & R & 0 \end{vmatrix};\ \text{tj.}\qquad \vec{v}_{Ap} = (2R\omega_o - R\omega)\vec{i} - \sqrt{3}R\omega\vec{j}$$

Sada se iz vektorske jednačine: $\vec{V}_A = \vec{V}_{Ap} + \vec{V}_{Ar}$ određuju nepoznate veličine trenutne ugaone brzine štapa BD i relativna brzina klizača:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{4}\vec{k}\,;} \qquad V_{Ar} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_0; \qquad \boxed{\vec{v}_{Ar} = -\frac{3}{4}R\omega_0\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega_0\vec{j}\,.}$$

Vektor ubrzanja tačke A ima dve komponente tangencijalnu $a_{AT} = R\dot{\omega}_0 = R\varepsilon_0$ sa smerom suprotnim od smera x ose, i normalnu komponentu $a_{AN} = R\omega_0^2$ u vertikalnom pravcu sa smerom suprotnim od smera y ose, tj.: $\vec{a}_A = -\sqrt{3}R\omega_0^2\vec{i} - R\omega_0^2\vec{j}$, a to je zapravo vektor apsolutnog ubrzanja klizača A.

Ubrzanje tačke B poluge je dato, a to je ujedno i ubrzanje tačke B štapa BD koji vrši ravansko kretanje:

$$\vec{a}_B = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i}\;;$$

Vektor relativnog ubrzanja klizača A je pravca štapa BD intenziteta koji ćemo odrediti:

$$\vec{a}_{Ar} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_r\vec{i} - \frac{1}{2}a_r\vec{j}\;;$$

Vektor prenosnog ubrzanja tačke A, štapa BD koji se kreće ravanski, u odnosu na ubrzanje tačke B, je:

$$\vec{a}_{Ap} = \vec{a}_B + \vec{\dot{\omega}} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{BA}$$

pa sledi:

$$\vec{a}_{Ap} = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\omega} \\ -\sqrt{3}R & R & 0 \end{vmatrix} - \frac{\omega_0^2}{16}\left(-\sqrt{3}R\vec{i} + R\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Ap} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}R\omega_0^2 - R\dot{\omega}\right)\vec{i} + \left(-\frac{R\omega_0^2}{16} - \sqrt{3}R\dot{\omega}\right)\vec{j}\;;$$

Coriolis-ovo ubrzanje klizača A je:

$$\vec{a}_{Acor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0}{4} \\ -\frac{3}{4}R\omega_0 & \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega_0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \vec{a}_{Acor} = -\frac{\sqrt{3}}{8}R\omega_0^2\vec{i} - \frac{3}{8}R\omega_0^2\vec{j}\;;$$

Vektor apsolutnog ubrzanja klizača A je:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{Ap} + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{Acor}$$

Odakle se rešavanjem vektorske jednačine dobijaju vrednosti ugaonog ubrzanja štapa BD i relativnog ubrzanja klizača A:

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{25\sqrt{3}}{64}\omega_0^2\vec{k}} \qquad \boxed{a_r = -\frac{39}{32}R\omega_0^2}$$

Materijalna tačka u položaju C ima vektore brzine i ubrzanja:

$$\vec{v}_C = 2R\omega_0\vec{i} \;\text{ i }\; \vec{a}_C = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i}$$

pa u vektori impulsa kretanja i inercione sile:

$$\boxed{\vec{p}_C = 2mR\omega_0\vec{i} \;\text{ i }\; \vec{I}_{F_C} = -m\frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i}}$$

Materijalna tačka na sredini raspona AB štapa CD u položaju K ima brzinu:

$$\vec{v}_K = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BK}$$

Tako da je:

$$\vec{v}_K = 2R\omega_o\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R & \frac{R}{2} & 0 \end{vmatrix}; \text{ tj. } \vec{v}_K = \left(2R\omega_o - \frac{R\omega_0}{8}\right)\vec{i} - \frac{\sqrt{3}R\omega_0}{8}\vec{j} = \frac{15R\omega_0}{8}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}R\omega_0}{8}\vec{j}$$

Pa je impuls kretanja te materijalne tačke:

$$\vec{p}_K = \frac{15R\omega_0 m}{8}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}R\omega_0 m}{8}\vec{j}$$

Ubrzanje te materijalne tačke je:

$$\vec{a}_K = \vec{a}_B + \vec{\dot{\omega}} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{BK}$$

$$\vec{a}_{Ap} = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{25\sqrt{3}\omega_0^2}{64} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R & \frac{R}{2} & 0 \end{vmatrix} - \frac{\omega_0^2}{16}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R\vec{i} + \frac{R}{2}\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_K = \left(\frac{3\sqrt{3}}{32}R\omega_0^2 - \frac{25R\sqrt{3}\omega_0^2}{128}\right)\vec{i} + \left(-\frac{R\omega_0^2}{32} - \frac{75R\omega_0^2}{128}\right)\vec{j}$$

pa je

$$\vec{a}_K = -\frac{13R\sqrt{3}\omega_0^2}{128}\vec{i} - \frac{79R\omega_0^2}{128}\vec{j},$$

odakle sledi da je vektor inercione sile:

$$\boxed{\vec{I}_K = \frac{13Rm\sqrt{3}\omega_0^2}{128}\vec{i} + \frac{79Rm\omega_0^2}{128}\vec{j}},$$

intenziteta

$$\boxed{I_K = \frac{Rm\omega_0^2\sqrt{5794}}{128}}$$

Zadatak 5. Kretanje materijalne tačke mase m $(0 \le t \le \pi)$ zadato je konačnim jednačinama kretanja

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \qquad\qquad y = \sin t$$

(x,y) u metrima, t u sekundama.

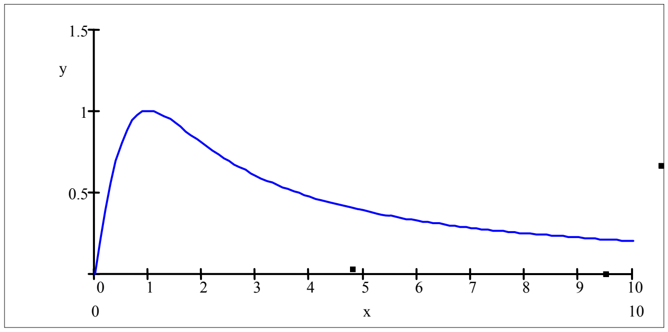
a. Odrediti liniju putanje tačke,
b. U trenutku $t = \pi/2$ odrediti prirodne komponente vektora ubrzanja i poluprečnik krivine putanje.
c. Intenzitete vektora impulsa kretanja i inercione sile u datom trenutku

Rešenje:

- Putanju tačke određujemo tako što iz KJK eliminišemo vreme:

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\frac{\text{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\text{tg}^2\frac{t}{2}}}\sqrt{1-\frac{\text{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{t}{2}}} = \frac{2\text{tg}\frac{t}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{t}{2}}$$

$$\boxed{y = \frac{2x}{1+x^2}}$$



- Komponente brzine i hodograf brzine su:

$$\dot{x} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{1+\cos(t)}; \qquad \dot{y} = \cos(t); \qquad \dot{y} = \frac{1}{\dot{x}} - 1;$$

- Prirodne komponente ubrzanja su:

$$\ddot{x} = \frac{\sin t}{(1+\cos t)^2}; \qquad \ddot{y} = -\sin t;$$

U posmatranom trenutku $t = \frac{\pi}{2}$; materijalna tačka se nalazila u položaju $\text{x} = 1$; $\text{y} = 1$; sa brzinom

$$\dot{\text{x}} = 1\,\text{m/s}; \qquad \dot{\text{y}} = 0; \qquad \text{V} = 1\,\text{m/s};$$

i ubrzanjem:

$$\ddot{\text{x}} = 1\,\text{m/s}^2; \qquad \ddot{\text{y}} = -1\,\text{m/s}^2; \quad \text{a} = \sqrt{2}\,\text{m/s}^2;$$

Pa su prirpdne komponente ubrzanja, tangencijalna i normalna komponenta

$$a_T = \frac{1}{v}(\vec{a}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{V}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 1\,m/s^2 \qquad a_N = \frac{1}{v}|\vec{v}\times\vec{a}| = \frac{1}{V}|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}| = 1\,m/s^2$$

- Poluprečnik krivine

$$\boxed{R_k = \frac{V^2}{a_N} = 1m}$$

Intenzitete vektora impulsa kretanja i inercione sile u datom trenutku su:

$p = m\,[kgms^{-1}]$ i $I_F = m\sqrt{2}[kgms^{-2}]$

Inerciona sila ima komponente u Descartes-ovom koordinatnom sistema i prirodnom triedru u obliku:

$\vec{I}_F = -m\vec{i} + m\vec{j}$ odnosno $\vec{I}_F = -m\vec{T} - m\vec{N}$

Zadatak 6. Kretanje materijalne tačke mase m je zadato konačnim jednačinama kretanja:

$$x = 2\sin(t) \qquad\qquad y = 3\cdot\sin(3t)$$

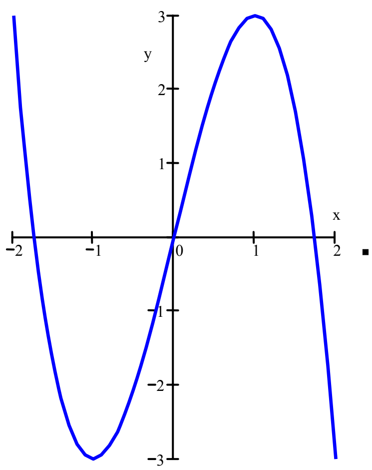
a. Odrediti liniju putanje tačke
b. U trenutku kada se tačka prvi put od početka kretanja nadje na x-osi odrediti prirodne komponente vektora ubrzanja i poluprečnik krivine, kao i intenzitete vektora impulsa kretanja i inercione sile.

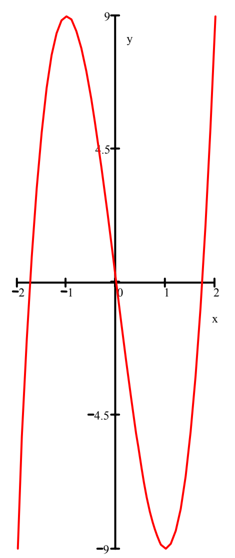
Rešenje:

- <u>Putanju tačke određujemo tako što iz KJK eliminišemo vreme:</u>

Imajući u vidu da je : $\sin 3t = \sin(2t+t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$ sledi :

$$y = \frac{3}{2}x\left(3 - x^2\right)$$





- Komponente brzine <u>i hodograf brzine su:</u>
- $\dot{x} = 2\cos(t)$; $\qquad \dot{y} = 9\cos(3t)$;

$\cos t = \cos(2t+t) = 4\cos^3 t - 3\cos t \qquad \underline{\underline{\dot{y} = \frac{9}{2}\dot{x}\left(\dot{x}^2 - 3\right)}}$

- <u>Prirodne komponente ubrzanja</u>

$\ddot{x} = -2\sin t$; $\quad \ddot{y} = -27\sin 3t$;

U trenutku kada putanja prvi put preseca x-osu zadovoljen je uslov: $y = 0$; odakle sledi:

$3t = \pi$; $\quad t = \frac{\pi}{3}$; Komponente brzine u Descartes-ovom koordinatnom sistema u tom trenutku su:

$\dot{x} = 1$; $\qquad \dot{y} = -9$; $\qquad V = \sqrt{82}$

a ubrzanja u Descartes-ovom koordinatnom sistema:

$\ddot{x} = -\sqrt{3}$; $\ddot{y} = 0$; $a = \sqrt{3}$

odnosno u prirodnom triedru:

$$a_T = \frac{1}{v}\left(\vec{a}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{V}\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{82}} \qquad a_N = \frac{1}{v}\left|\vec{v}\times\vec{a}\right| = \frac{1}{V}\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right| = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{82}}$$

- Poluprečnik krivine je onda: $R_k = \dfrac{V^2}{a_N} = \dfrac{82}{9}\dfrac{\sqrt{82}}{\sqrt{3}}$

Impuls kretanja je:

$p = m\sqrt{82}$

Inerciona sila ima komponente u Descartes-ovom koordinatnom sistema i prirodnom triedru u obliku:

$\vec{I}_F = -m\sqrt{3}\vec{i}$ odnosno $\vec{I}_F = m\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{82}}\vec{T} - m\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{82}}\vec{N}$, a intenzitet: $I_F = -m\sqrt{3}$