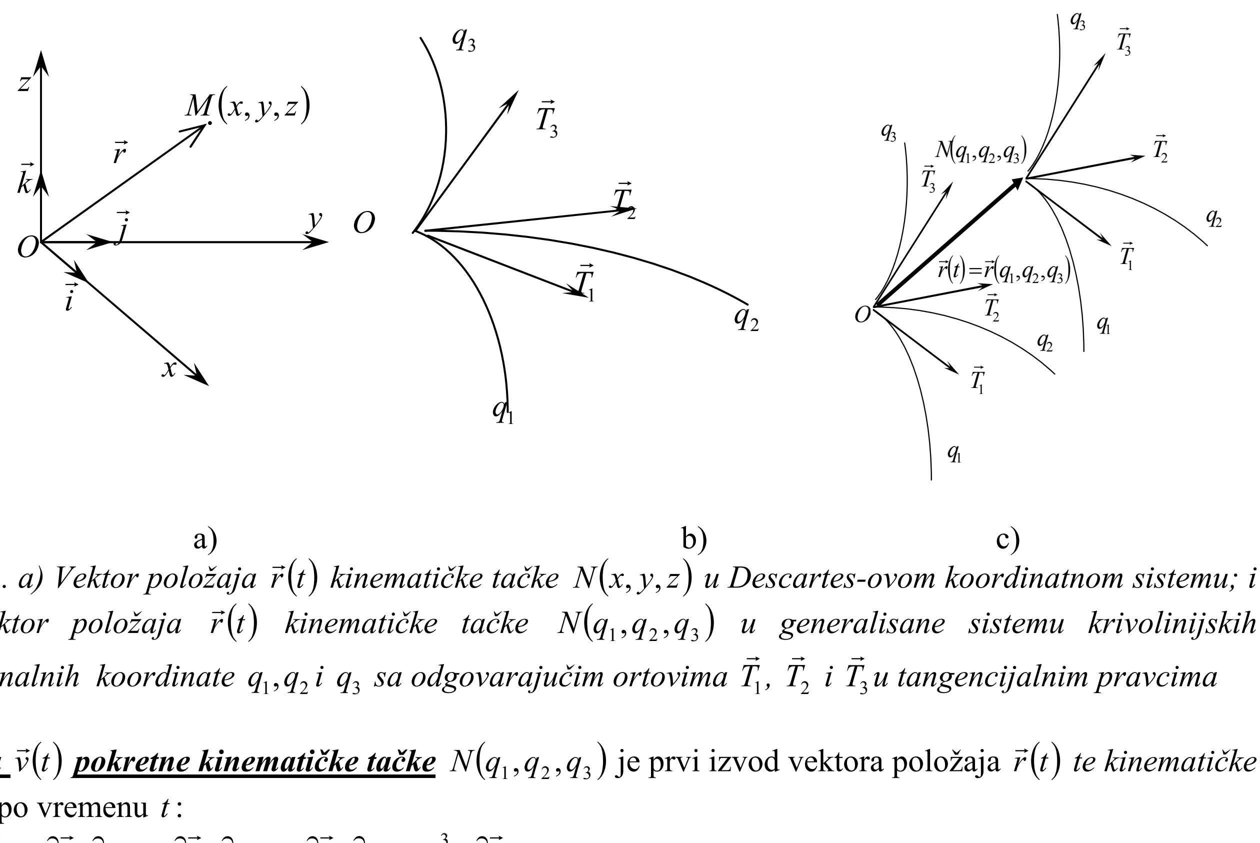
I vežba

Uvod u dinamiku iz kinematike

Brzina i ubrzanje pokretne tačke

Generalisani koordinatni sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata

Vektor položaja posmatrane pokretne kinematičke tačke $N(q_1,q_2,q_3)$ u krivolinijskom generalisanom koordinatnom sistemu je $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3)$, gde su q_1,q_2 i q_3 ortogonalne krivolinijske koordinate sa ortovima tangencijalnih pravaca $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ i $\vec{T}_3$ respektivno, *slika 1 b) i c).*



Slika 1. a) Vektor položaja $\vec{r}(t)$ kinematičke tačke $N(x,y,z)$ u Descartes-ovom koordinatnom sistemu; i b) Vektor položaja $\vec{r}(t)$ kinematičke tačke $N(q_1,q_2,q_3)$ u generalisane sistemu krivolinijskih ortogonalnih koordinate q_1,q_2 i q_3 sa odgovarajučim ortovima $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ i $\vec{T}_3$ u tangencijalnim pravcima

<u>Brzina</u> $\vec{v}(t)$ ***<u>pokretne kinematičke tačke</u>*** $N(q_1,q_2,q_3)$ je prvi izvod vektora položaja $\vec{r}(t)$ *te kinematičke tačke* po vremenu t:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

gde je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ - promena vektora položaja sa promenom krivolinijske koordinate i to je vektor u pravcu jediničnog orta i u pravcu tangente na koordinatnu liniju koja odgovara krovolinijskoj koordinati q_i i jednaka je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = A_i \cdot \vec{T}_i \ ,$$

gde su A_i Lamé-ovi koeficijenti, a za važi $\left|\vec{T}_i\right| = 1$ što znači da su ortovi jediničnih intenziteta.

Brzina pokretne tačke u generalisanom koordinatnom sistemu je onda:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{T}_i \ ,$$

gde su v_i komponente vektora brzine u tom sistemu.

Lamé-ovi koeficijenti $A_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$ predstavljaju intenzitet promene vektora $\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ položaja kinematičke tačke $N(q_1, q_2, q_3)$ sa promenom krivolinijske koordinate q_i i sistemu ortogonalnih koordinata tj. To je intenzitet parcijalnih izvoda vektora položaja po krivolinijskoj koordinati q_i:

$$A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

pri lemu smo prvo uspostavili vezu između Descartes-ovih koordinata i krivolinijskih koordinata generalisanog sistema u opštem obliku:

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

Jedinični ortovi tangencijalnih pravaca na otogonalne koordinatne linije su $\vec{T}_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ gde indeks i uzima vrednosti $i = 1,2,3$. Ako je koordinatni sistem ortoganalan krivolinijski sistem onda je

$$\vec{T}_i \cdot \vec{T}_j = \begin{cases} 1 & za \quad i = j \\ 0 & za \quad i \neq j \end{cases}$$

<u>Ubrzanje</u> $\vec{a}(t)$ ***<u>pokretne kinematičke tačke</u>*** $N(q_1, q_2, q_3)$ je prvi izvod po vremenu vektora njene brzine $\vec{v}(t)$ ili drugi izvod po vremenu vektora položaja $\vec{r}(t)$ *te kinematičke tačke* $N(q_1, q_2, q_3)$ po vremenu t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{T}_i \ ,$$

gde su a_i koordinate vektora ubrzanja $\vec{a}(t)$ u generalisanom koordinatnom sistemu

$$a_i = \frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial q_i}\right].$$

Descartes-ov koordinatni sistem

Vektor položaja $\vec{t}(x, y, z)$ posmatrane pokretne kinematičke tačke $N(x, y, z)$, *slika 1 a)*, je $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, promena vektora položaja je:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

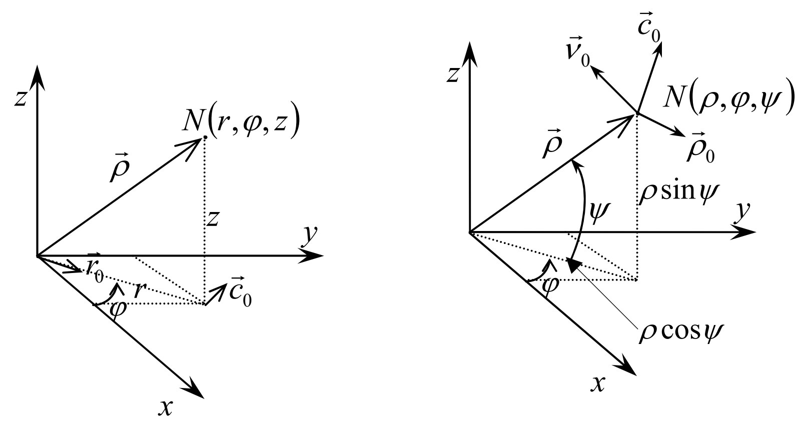
<u>***Brzina***</u> $\vec{v}(t)$ <u>***pokretne kinematičke tačke***</u> $N(x,y,z)$ u Descartes-ovom koordinatnom sistemu je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

<u>***Ubrzanje***</u> $\vec{a}(t)$<u>***pokretne kinematičke tačke***</u> $N(x,y,z)$u Descartes-ovom koordinatnom sistemu <u>koordinata</u> (x,y,z) u vektorskom obluku je je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Polarno-cilindrični koordinatni sistem



a) b)

Slika 2 a) polarno-cilondrični koordinatni sistem, b) sverni koordinatni sistem

Vektor položaja $\vec{\rho}(r,\varphi,z)$ posmatrane pokretne kinematičke tačke $N(r,\varphi,z)$, slika 2 a), je:

$$\vec{\rho}(r,\varphi,z) = r\vec{r}_0 + z\vec{k}$$

<u>***Brzina***</u> $\vec{v}(t)$<u>***pokretne kinematičke tačke***</u> $N(r,\varphi,z)$ u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu koorinata (r,φ,z) je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}\ ,$$

gde smo iskoristili činjenicu da je izvod po vremenu vektora konstantnog intenziteta, a promenljivog pravca ugaone brzine $\dot{\varphi}$, jednak vektorskom proizvodu vektora ugaone brzine $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ i samog tog vektora (Rezalova teorema-lema):

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \dot{\varphi}\vec{k} \times \vec{r}_0 = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{c}_0 & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}\vec{c}_0$$

<u>***Ubrzanje***</u> $\vec{a}(t)$<u>***pokretne kinematičke tačke***</u> $N(r,\varphi,z)$u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu koordinata (r,φ,z)je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{r}_0 + \dot{r}\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\vec{c}_0 + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{c}_0 + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{c}_0}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{c}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{c}_0 - r\dot{\varphi}^2\vec{r}_0 + \ddot{z}\vec{k} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k}\ ,$$

jer je:

$$\frac{d\vec{c}_0}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{c}_0 = \dot{\varphi}\vec{k} \times \vec{c}_0 = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{c}_0 & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\varphi}\vec{r}_0 .$$

Stoga su komponente vetora ubrzanja $\vec{a}(t)$ pokretne kinematičke tačke $N(r,\varphi,z)$u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu koordinata (r,φ,z):

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ - radijalna komponenta ubrzanja

$a_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$ - cirkularna komponenta ubrzanja i

$a_z = \ddot{z}$ - aksijalna komponenta ubrzanja

Sferni koordinatni sistem

Krivolinijske koordinate svernog sistema koordinata su

$q_1 = \rho$ - koordinata u radijalnom pravcu sa jediničnim bektorom - ortom $\vec{T}_1 = \vec{\rho}_0$

$q_2 = \varphi$ - koordinata u cirkularnom pravcu sa jediničnim vektorom - ortom $\vec{T}_2 = \vec{c}_0$

$q_3 = \psi$ - koordinata u meridijalnom pravcu sa jediničnim vektorom - ortom $\vec{T}_3 = \vec{v}_0$

Veze krivolijskih koordinata svernog sistema (ρ,φ,ψ) i Descartes-ovih koordinata (x,y,z), *slika 2 b)*, su:

$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\psi\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\psi$$

Lamé-ovi koeficijenti onda su:

$$A_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\ ,\ i = 1,2,3$$

$$A_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\psi\cos^2\varphi + \cos^2\psi\sin^2\varphi + \sin^2\psi} = 1$$

$$A_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\psi\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\psi\cos^2\varphi} = \rho\cos\psi$$

$$A_\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\psi\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\psi\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\psi} = \rho$$

Jedinični vektori orjentacije koordinatnih linija u svernom sistemu krivolnijskih koordinata, tj. ortovi koordinatnog trijedra tof sistema su:

*u radijalnom pravcu

$$\vec{T}_1 = \vec{\rho}_0 = \frac{1}{A_\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\vec{k}\right) = \cos\psi\cos\varphi\cdot\vec{i} + \cos\psi\sin\varphi\cdot\vec{j} + \sin\psi\cdot\vec{k}$$

* u circularnom pravcu

$$\vec{T}_2 = \vec{c}_0 = \frac{1}{A_\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\vec{k}\right) = -\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j}$$

* u meridijalnom pravcu

$$\vec{T}_3 = \vec{v}_0 = \frac{1}{A_v}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\vec{k}\right) = -\sin\psi\cos\varphi\cdot\vec{i} - \sin\psi\sin\varphi\cdot\vec{j} + \cos\psi\cdot\vec{k}$$

Komponente vektora brzine $\vec{v}(t)$ pokretne kinematičke tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u svernom sistemu koordinata (ρ,φ,ψ), prema $v_i = A_i\dot{q}_i$ su i to u:

- radijalnom pravcu $v_\rho = \dot{\rho}$,
- cirkularnom pravcu $v_c = \rho\cos\psi\dot{\varphi}$ i
- meridijalnom pravcu $v_v = \rho\dot{\psi}$

Intenzitet vektora brzine $\vec{v}(t)$ pokretne kinematičke tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u svernom sistemu koordinata (ρ,φ,ψ) je:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2}$$

Komponente vektora $\vec{a}(t)$ ***ubrzanja*** pokretne kinematičke tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u svernom sistemu krivolinijskih koordinata (ρ,φ,ψ) su

$$a_i = \frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial q_i}\right],$$

i to u:

- radijalnom pravcu $$a_\rho = \frac{1}{A_\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\rho}\right] = \ddot{\rho} - \rho\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\psi}^2$$
- cirkularnom pravcu $$a_c = \rho\cos\psi\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\psi - 2\rho\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi$$
- meridijalnom pravcu $$a_v = \rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\cos\psi\sin\psi\dot{\varphi}^2$$

a vektor ubrzanja $\vec{a}(t)$ ***ubrzanja*** pokretne kinematičke tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u svernom sistemu krivolinijskih koordinata (ρ,φ,ψ) je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 + \left(\rho\cos\psi\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\psi - 2\rho\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi\right)\vec{c}_0 + \left(\rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\cos\psi\sin\psi\dot{\varphi}^2\right)\vec{v}_0$$

Prirodne komponente vektora ubrzanja $\vec{a}(t)$ ***tačke*** $N(s)$ ***i poluprečnik krivine***

Prirodan način definisanja kretanja pokretne kinematičke tačke korisno je upotrebiti u onim slučajevima, kada je putanja tačke unapred poznata, potrebno je još znati i zakon kretanja tačke duž putanje (zakon puta) u obliku $s = f(t)$, gde rastojanje s određuje krivolinijsku koordinatu kinematičke tačke $N(s)$ merenu duž krive linije.

Ako za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ tačka pređe na putanji put od $N(s)$ do $N_1 = N(s+\Delta s)$, onda se ona na putanji pomeri za $\Delta s = s_1 - s$, pa će intenzitet srednje brzine biti $v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Kada pređemo na granični slučaj intenzitet brzine u trenutku t biće:

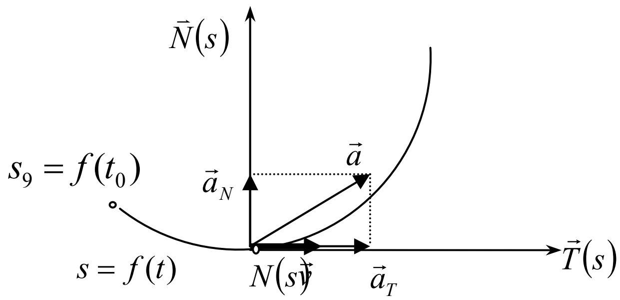
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Intenzitet v brzine pokretne kinematičke tačke u datom trenutku jednak je prvom izvodu po vremenu pređenog puta pokretne kinematičke tačke $N(s)$ duž krive linije.

Vektor brzine $\vec{v}(s)$ pokretne kinematičke tačke $N(s)$ usmeren je po tangenti na putanju tačke po krivoj liniji, orjentisanoj ortom $\vec{T}(s)$, a koja je unapred poznata. Zato možemo da pišemo

$\vec{v} = v \cdot \vec{T}$

Ako posmatramo *oskulatornu ravan*, ravan same krive, i ako kriva leži u ravni, koju čine tangenta na putanju pokretne kinematičketačke, sa jediničnim vektorom $\vec{T} = \vec{T}(s)$, i usmerena je u pozitivnom smeru porasta puta s i normala sa jediničnim vektorom $\vec{N} = \vec{N}(t)$, u smeru konkavne strane putanje, vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ pokretne kinematičke tačke $N(s)$ leži uvek u toj ravni, *slika 3.*



Slika 3. Komponente vektora brzine $\vec{v}(s)$ i ubrzanja $\vec{a}(s)$ u oskulatornoj ravni prirpdnog triedra.

U prirodnom triedru vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ pokretne kinematičke tačke $N(s)$ je

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R_k}\vec{N},$$

I njegove komponente su:

$a_T = \dot{v}$ -tangencijalno ubrzanje orjentisamo ortom tangente na krivolinijsku putanju

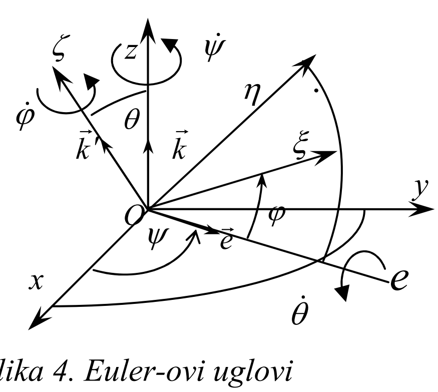
$a_N = \dfrac{v^2}{R_k}$ -normalno ubrzanje orjentisamo ortom normale na krivolinijsku putanju

Tangencijalno ubrzanje $\vec{a}_T$ je posledica promene intenziteta vektora brzine, a normalno $\vec{a}_N$ promene pravca istog vektora.

Kada su poznati vektor brzine $\vec{v}(t)$ i ubrzanja $\vec{a}(t)$ pokretne kinematičke tačke u bilo kom sistemu koordinata, tangencijalna $\vec{a}_T$ i normalna $\vec{a}_N$ komponenta ubrzanja $\vec{a}(t)$ i poluprečnik krivine R_k putanje mogu se izraziti preko njih:

$$a_T = \frac{1}{v}(\vec{a} \cdot \vec{v}),\; a_N = \frac{1}{v}|\vec{v} \times \vec{a}|,\; R_k = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

Obrtanje krutog tela oko nepomične tačke. Precesiono kretanje.



Slika 4. Euler-ovi uglovi

Kada je za sve vreme kretanja jedna tačka tela u miru ono se okreće oko nje. Ta tačka se uzima za početak nepokretnog, $xOyz$, i pokretnog, $\xi O\eta\zeta$, sistema.

Položaj pokretnog u odnosu na nepokretni trijedar definišu tri *Euler-ova ugla*, *slika 4, koje ćemo definisati kao*

ψ *-ugao precesije,*

φ *- ugao rotacije* i

θ *-ugao nutacije.*

To znači da jedan sistem koordinata $xOyz$ moćemo prevesti u drugi $\xi O\eta\zeta$ pomoću tri rotacije oko koordinatnog početka O, odnosno oko osa pojedinačno na sledeći način: Zamislimo da su se u početnom trenutku pse koordinatinih sistema poklapale, pa smo zatim pokretni sistem odvojili od nepokretnog $xOyz$ jednom rotacijom oko ose z za ugao ψ ugaonom brzinom precesije $\dot{\psi}$. Posle te prve rotacije osa koja se poklapala sa osom z je prešla u osu ζ, a osa koja se poklapala sa osom x prešla je u osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$, a osa koja se poklapala sa y osom prešla je u osu u i obe u istoj ravni Oxy i zaklapaju sa njima ugao precesije ψ. Ovu osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$ nazvaćemo čvornom osom, Zatim nastavljamo obrtanje koordinatnog sistema oko te cvorne ose za ugao θ, koji smo nazvali ugao nutacije , a obrtanje je izvršeno ugaonom brzinom $\dot{\theta}$ koja je ugaona brzina nutacije. Pri ovoj rotaciji osa koja se poklapala sa z osom presla je u ζ osu, a osa u prešla je u osu c rjentisanu ortom $\vec{c}$. Poslednja, treća rotacija koordinatnog sistema se izvodi oko ζ ose za ugao rotacije φ ugaonom brzinom rotacije $\dot{\varphi}$, čime je osa e prešla u osu ξ a osa c u osu η. Tako smo pokazali da pomoću tri rotcije jedan koordinatni sistem čije se ose poklapaju sa osama nepokretnog sistema možemo prevesti u sistem $\xi O\eta\zeta$.

Čvorna osa e je presek koordinatnih ravni xOy i $\xi O\eta$ i orjentisana je jediničnim vektorom $\vec{e}$.

Imajući u vidu da je pokretni sistem koordinata $\xi O\eta$ vezan za kinematičko telo to znači da telo koje izvodi obrtanje oko nepomične ose može da se iz jednog položaja prevede u drugi pomoću tri rotacije na način kako je to prikazano sa koordinatnim sistemom. Kako smo naznačili da svakoj rotaciji prema Euler-ovim uglovima ψ precesije, θ nutacije i φ rotacije, odgovara po jedna ugaona brzina: precesije $\dot{\psi}$ koja se vektorski može predstaviti u pravcu orta $\vec{k}$ ose z, nutacije $\dot{\theta}$ oko ose $\vec{e}$ koja se kao vektor može predstaviti u tom pravcu orta $\vec{e}$ i rotacije i $\dot{\varphi}$ oko ose ζ koja se kao vektor može predstaviti u tom pravcu orta $\vec{k}'$. Na osnovu toga za trenutnu ugaonu brzinu obrtanja tela oko nepomične ose možemo da napišemo da je zbiru tih komponentnih brzina:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

Brzina tačke kinematičkog krutog (geometrijskog) tela pri obrtanju oko nepomične tačke je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

gde je $\vec{\rho}$ vektor položaja tačke tog tela u odnosu na nepokretnu tačku. Tačke tela koje se u trenutku posmatranja nalaze na nosaču ugaone brzine $\vec{\omega}$ miruju, ne kreću se, i definišu pravu u prostoru koja prolazi kroz nepomićnu tačku O, a zove se *momentna osa* ili *osa trenutne rotacije*. Oko nje se u trenutku posmatranja telo obrće izvodeći rotaciju oko te ose, i zato je intenzitet brzine tačke tela:

$$v = r\omega$$

gde je r najkraće rastojanje posmatrane tačke tela do momentne ose. Ne treba izgubiti iz vida da je ta osa pokretna, iako stalno prolazi kroz tu nepomičnu tačku.

Vektor ubrzanja tačke tela ima tri komponente:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N + \vec{a}_d$$

pri čemu su prve dve komponente $\vec{a}_T$ i $\vec{a}_N$, tangencijalno i normalno ubrzanje posledica kružnog kretanja tačke oko momentne ose , $\vec{a}_d$ je dopunsko ubrzanje i ono je posledica promene pravca momentne ose:

$$\vec{a}_d = \omega\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{\rho}$$

Intenzitet tangencijalnog $\vec{a}_T$ i normalnog $\vec{a}_N$,ubrzanja su:

‘ $$a_T = r\dot{\omega} \quad \text{i} \quad a_N = r\omega^2$$

gde je $\dot{\omega}$ izvod po vremenu intenziteta ugaone brzine.

Ugaona brzina $\vec{\omega}$ se može izraziti pompću koordinata i u odnosu na nepokretni i u odnosu na pokretni sistem koordinata i to:

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} \quad \text{u nepokretnom sistemu koordinata}$$

$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{i}\,' + \omega_\eta \vec{j}\,' + \omega_\zeta \vec{k}\,'$ u pokretnom sistemu koordinata.

Komponente (koordinate) ugaone brzine $\vec{\omega}$ se mogi izraziti i u pokretnom i nepokretnom koordinatnom sistemu i odredjujemo ih projektovanjem na koordinatne ose, odnosno skalarnim množenjem sa jediničnim vektorima odgovarajućih koordinatnih osa.

Projekcije ugaone brzine $\vec{\omega}$ su tada izražene pomoću Euler-ovih uglova i njihovih izvoda po vremenu i nazivamo ih *Euler-ovim kinematičkim jednačinama*:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$
$$\omega_\eta = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$$
$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

Položaj tačke u nepokretnom sistemu $xOyz$ je dat vektorom položaja $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, a u pokretnom $\xi O\eta\zeta$ se izražava kao $\vec{\rho} = \xi\,\vec{i}\,' + \eta\,\vec{j}\,' + \zeta\,\vec{k}\,'$.

Tačke na momentnoj osi miruju pa je zadovoljen uslov:

$$\vec{v}\big|_{r-0} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}\big|_{r=0} = 0 \qquad \text{ili} \qquad \vec{v}\big|_{\vec{\rho}\Uparrow\vec{\omega}} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}\big|_{\vec{\rho}\Uparrow\vec{\omega}} = 0$$

iz koga se određuju jednačine pokretne ose – trenutne ose rotacije u u pokretnom i nepokretnom trijedaru:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

-u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}$$

Iz ovih jednačina mogu se formirati odnosi:

$$\frac{x}{z} = \frac{\omega_x}{\omega_z} = f_1(t),\quad \frac{y}{z} = \frac{\omega_y}{\omega_z} = f_2(t)$$

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\omega_\xi}{\omega_\zeta} = \varphi_1(t),\quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{\omega_\eta}{\omega_\zeta} = \varphi_2(t)$$

odakle se eliminacijom vremena dobijaju analitički izrazi:

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right) = 0 \text{ i } F\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right) = 0$$

koji u prostoru definišu konusne površi i to u nepokretnom $xOyz$ i pokretnom $\xi O\eta\zeta$ sistemu koordinata. To su *nepokretni* i *pokretni aksoid*. Za vreme kretanja pokretni aksoid se kotrlja bez klizanja po nepokretnom, a njihova dodirna zajednička izvodnica je trenutna osa rotacije.

Regularna precesija

Telo vrši *regularnu precesiju* kada su Euler-ovi uglovi zadivoljavaj sledeće uslove:

$\theta = \theta_0 = const$ - ugao nutacije je konstantan

$\psi = At + C$ - ugao precesije je linearna funkcija vremena i

$\varphi = Bt + C$ - ugao rotacije je takođe linearna funkcija vremena.

Posledice su:

$\dot{\theta} = 0$ - *ugaona brzina nutacije* hednaka je nuli

$\dot{\psi} = A = \omega_p = \Omega = const$ - *ugaona brzina precesije* je konstantna

$\dot{\varphi} = B = \omega_s = \nu = const$ - *ugaona brzina sopstvene rotacije* je takođe konstantna.

Vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ za slučaj regularne precesije je onda

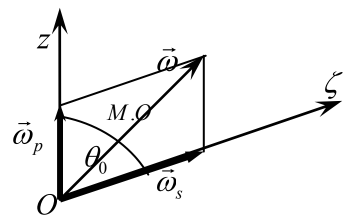
$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\varphi}\,\vec{k}\,' = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_s$$

Kao što je prikazano na *slici 5*. Intenzitet vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ je

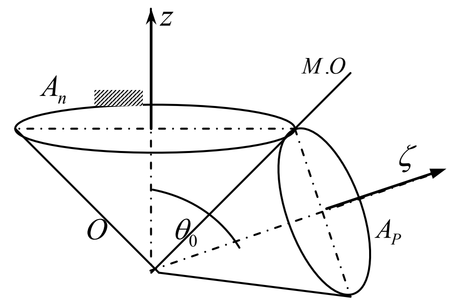
$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p\omega_s\cos\theta_0} = const$$

Pošto je $\omega = const$, $\dot{\omega} = 0$ onda su:

$$a_T = 0 \text{ i } a_N = const$$



Slika 5. Komponente vektora ugaone brzine pri regularnoj precesiji



Slika 6. Pokretni i nepokretni aksoid

Vektor ugaonog ubrzanja $\dot{\vec{\omega}}$ se svodi na:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{\omega}_s$$

Pa je dopunsko ubrzanje

$$\vec{a}_d = (\vec{\omega}_p \times \vec{\omega}_s) \times \vec{\rho}$$

Euler-ove kinematičke jednačine se svode na:

- u nepokretnom sistemu $xOyz$ -u pokretnom sistemu $\xi O\eta\zeta$

$$\omega_x = \omega_s \sin\theta_0 \sin\psi \qquad \omega_\xi = \omega_p \sin\theta_0 \sin\varphi$$

$$\omega_y = -\omega_s \sin\theta_0 \cos\psi \qquad \omega_\eta = \omega_p \sin\theta_0 \cos\varphi$$

$$\omega_z = \omega_p + \omega_s \cos\theta_0 = const \qquad \omega_\zeta = \omega_s + \omega_p \cos\theta_0 = const$$

pa su jesnačine nepokretnog i pokretnog aksoida:

$$x^2 + y^2 = K^2 z^2 \qquad \text{i} \qquad \xi^2 + \eta^2 = k^2\zeta^2$$

oblika pravih kružnih konusa sa vrhom u nepokretnoj tački i osama rotacije z i ζ, *slika 6.*

Složeno kretanje kinematičke tačke

Pokretna kinematička tačka se kreće složeno ako se kreće po telu –nosaču (suportu) koje se kreće u prostoru. Ovo kretanje je sastavljeno od kretanja tela nosača kroz prostor, tzv. *prenosno kretanje* i kretanja tačke po telu nosača, tzv. *relativno kretanje*. Složeno kretanje je rezultat superpozicije ova dva kretanja.

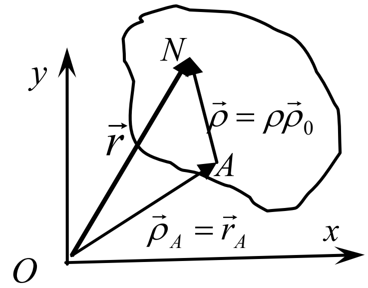
Vektor položaja pokretne tačke $\vec{r}$ u odnosu na referentnu tačku, *slika 7*, je:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

gde su $\vec{r}_A$ vektor položaja referentne tačke A u odnosu na koordinatni poletak O, a $\vec{\rho}$ vektor položaja posmatrane pokretne tačke N u odnosu na referentnu tačku A, dok je $\vec{r}$ tzv. *apsolutni vektor položaja*,

$\vec{r}_A$- vektor položaja tačke tela nosača u odnosu na nepokretnu referentnu tačku. tzv. *prenosni vektor položaja* i

$\vec{\rho}$- vektor položaja posmatrane pokretne tačke u odnosu na tačku tela nosača, tzv. *relativni vektor položaja*. Ovo je vektor promenljivog pravca $\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_0(t)$ i promenljivog intenziteta $\rho = \rho(t)$: $\vec{\rho} = \rho\vec{\rho}_0$



Slika 7. Složeno kretanje tačke

Zato je vektor apsolutne brzine $\vec{v}_a$ tačke N u odnosu na referentni koordinatni sistem:

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_A + \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} = \vec{v}_A + \rho\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_0\right) + \dot{\rho}\vec{\rho}_0 = \underbrace{\vec{v}_A + \left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right)}_{\vec{v}_p} + \underbrace{\dot{\rho}\vec{\rho}_0}_{\vec{v}_r}$$

tj. vektor *apsolutne brzine* $\vec{v}_a$ tačke N čini vektorski zbir vektora *prenosne* $\vec{v}_p$ i *relativne* $\vec{v}_r$ *brzine*:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r$$

Prenosna brzina $\vec{v}_p$ tačke N, je brzina one tačke tela nosača na kojoj se u trenutku posmatranja nalazi pokretna tačka i određuje se kao brzina tačke krutog tela.

Relativna brzina $\vec{v}_r$ tačke N, je brzina pokretne tačke po telu nosača i izračunava se kao brzina tačke pri njenom kretanju po telu-nosaču, pri čemu se smatra da telo-nosač miruje.

Vektor apsolutnog ubrzanja $\vec{a}_a$ je:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right)}{dt} + \ddot{\rho}\vec{\rho}_0 + \dot{\rho}\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} = \vec{a}_A + \left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}\right) + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt} + \ddot{\rho}\vec{\rho}_0 + \dot{\rho}\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_0\right) =$$

$$= \vec{a}_A + \left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}\right) + \vec{\omega}\times\dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_0\right) + \ddot{\rho}\vec{\rho}_0 + \left(\vec{\omega}\times\dot{\rho}\vec{\rho}_0\right) =$$

$$= \underbrace{\vec{a}_A + \left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}\right) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_0\right)}_{\vec{a}_p} + \underbrace{\ddot{\rho}\vec{\rho}_0}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2\left(\vec{\omega}\times\dot{\rho}\vec{\rho}_0\right)}_{\vec{a}_{cor}}$$

Vektor apsolutnog ubrzanja $\vec{a}_a$ tačke N ,, ima tri komponente:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

$\vec{a}_p$ - *prenosno ubrzanje* tačke N, je ubrzanje tačke tela nosača na kojoj se u trenutku posmatranja nalazi pokretna tačka N, i određuje se kao ubrzanje tačke krutog tela.

$\vec{a}_r$ - *relativno ubrzanje* tačke N, je ubrzanje tačke u odnosu na telo nosača i izračunava se kao ubrzanje pri kretanju te tačke, po telu-nosaču pri čemu se smatra da telo-nosač miruje .

$\vec{a}_c$ - *Coriolis-ovo ubrzanje* je posledica promene pravca vektora relativne brzine zbog obrtnog kretanja tela nosača, ono je:

$$\vec{a}_c = 2\left(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r\right)$$

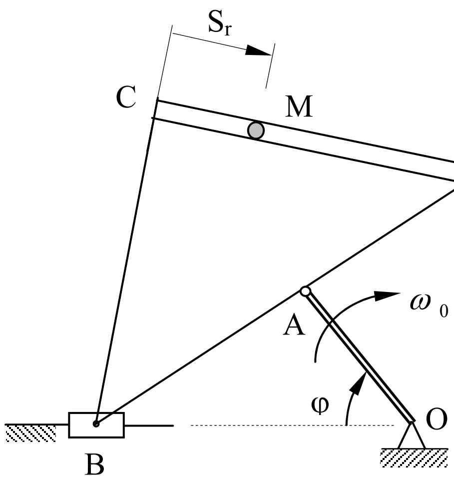
Dakle, može biti jednako nuli u slučajevima:

1. da je $\vec{\omega}_p = 0$, telo nosača se ne obrće, tj. kreće se translatorno;
2. da je $\vec{v}_r = 0$ u slučaju kada je pokretne tačka u relativnom mirovanju;
3. kada su vektori ugaone brzine prenosnog kretanja i relativne brzine kolinearni.

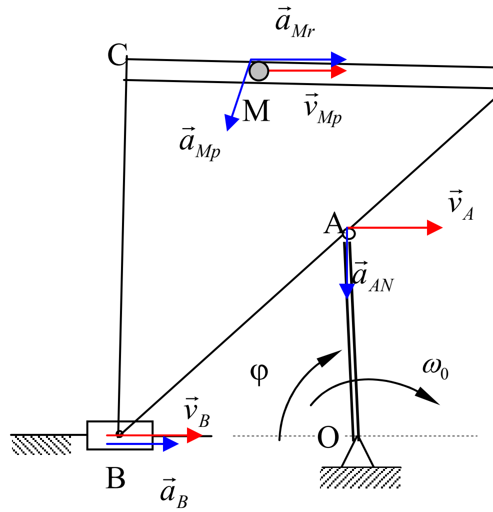
Zadaci

1. Po kateti $\overline{CD} = R$ jednakokrakog pravouglog trougla BCD, *slika 7*, kreće se jednakoubrzano pokretna tačka M relativnim ubrzanjem $a_r = 2R\omega_0^2$. Na sredini stranice $\overline{BD}$ trougao je zglobno

vezan za tačku A krivaje $\overline{OA} = R/2$, a u tački B za klizač koji se kreće po horizontalnim pravoliniskim vođicama čija osa prolazi kroz tačku O. Krivaja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko nepokretne horizontalne ose. U početnom trenutku tačka je bila u položaju C bez početne relativne brzine, a krivaja je zaklapala ugao $\varphi_0 = \frac{\pi - 1}{2}(\text{rad})$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t = \frac{1}{2\omega_0}$.



Slika 7.



Slika 8.

Rešenje:

Kako je ugaona brzina po definiciji $\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}$ to je onda zakon promene ugla koji krivaja OA zaklapa sa horizontalom u toku kretanja $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, u posmatranom trenutku $t = \frac{1}{2\omega_0}$ i za zadatu vrednost početnog ugla $\varphi_0 = \frac{\pi - 1}{2}(\text{rad})$, dobije se $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t = \frac{\pi}{2}$, tj u posmatranom trenutku položaj krivaje OA je vertikalan, *slika 8*. Brzina tačke A, krivaje OA koja se obrće oko tačke O, sa smerom u posmatranom trenutku prikazana je na *slici 8*, a intenzitet joj je:

$$V_A = \frac{R}{2}\omega_0$$

Kako tačka B trougla, a u isto vreme i tačka klizača koji se kreće po horizontalnim vođicama ima brzinu kao na *slici 8*, u horizontalnom pravcu to zaključujemo da se telo nosača, trougao BCD, kreće translatorno, jer je trenutni pol u beskonačnosti s obzirom da se dve tačke toga tela, u posmatranom trenutku imaju vektore brzina paralelne, zaključujemo onda je prenosna brzina pokretne tačke:

$$V_A = \frac{R}{2}\omega_0 = V_B = V_D = V_{Mp}$$

$$\vec{v}_p = \frac{R}{2}\omega_0\vec{i}$$

id a je ugaona brzina prenosnog kretanja: $\omega_p = 0$.

Tačka M se relativno kreće po kateti CD trougla, koji ja je u posmatranom trenutku horizpntalna pa je vektor relativne brzine pokretne tačke u odnosu na telo nosača,trougla,

$\vec{v}_r = V_r\vec{i} = R\omega_0\vec{i}$, pošto je $V_r = a_r t = 2R\omega_0^2 \frac{1}{2\omega_0}$.

Vektor apsolutne brzine pokretne tačke M je jednak vektorskom zbiru vektora prenosne i relativne brzine posmatrane tačke, tj: $\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{3}{2} R\omega_0 \vec{i}}$$

Kako je $\omega_0 = const$, tj. $\dot{\omega}_0 = 0$, to tačke krivaje OA nemaju tangencijalnu komponentu ubrzanja, a tačka A ima normalnu komponentu ubrzanja, koja je ujedno i njen vektor ubrzanja, u pravcu krivaje sa smerom prema centru krivine O , što je za koordinatni sistem xoy u odnosu na koji posmatramo kretanje, negativan smer y ose:

$$\vec{a}_A = -\frac{R}{2}\omega_0^2 \vec{j} \quad .$$

Tačka B ima ubrzanje u pravcu x ose $\vec{a}_B = a_B \vec{i}$. Trougao BCD se kreće ravanski pa se koristimo izrazom za ubrzanje tačke tela koje se kreće ravanski:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\dot{\omega}}_p \times \vec{AB} - \omega_p^2 \vec{AB} \qquad ,$$

gde je $\vec{\mathrm{AB}} = -\frac{\mathrm{R}}{2}\vec{\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{R}}{2}\vec{\mathrm{j}}$

Da bi odredili nepoznato prenosno ugaono ubrzanje $\dot{\omega}_p$:

$$a_B \vec{i} = -\frac{R}{2}\omega_0^2 \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\omega}_p \\ -\frac{R}{2} & -\frac{R}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

iz koje vektorske jednačine, posle izjednačavanja komponenti u istim pravcima, sledi da je vektor prenosnog ugaonog ubrzanja: $\vec{\dot{\omega}}_p = -\omega_0^2 \vec{k}$.

Kako je $\frac{dS_r}{dt} = V_r$, tj. $S_r = a_r \frac{t^2}{2} + S_0$, a $S_0 = 0$,jer je tačka u početnom trenutku bila u položaju C, relativni pređeni put tačke M u posmatranom trenutku je:

$S_r = \frac{1}{2} a_r t^2 = \frac{R}{4}$, pa je položaj tačke M u odnosu na tačku A: $\overrightarrow{AM} = -\frac{R}{4}\vec{i} + \frac{R}{2}\vec{j}$.

Sada je prenosno ubrzanje tačke M kao tačke tela nosaca koje se kreće ravanski jednako:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\dot{\omega}}_p \times \overrightarrow{AM} - \omega_p^2 \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{a}_p = -\frac{R}{2}\omega_0^2 \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 \\ -\frac{R}{4} & \frac{R}{2} & 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{a}_p = \frac{1}{2} R\omega_0^2 \vec{i} - \frac{1}{4} R\omega_0^2 \vec{j} \ ,$$

relativna komponenta je u pravcu x ose:

$$\vec{a}_r = 2R\omega_0^2 \vec{i}$$

Dok je Coriolis-ovo ubrzanje jednako nuli jer se telo nosača kreće translatorno:

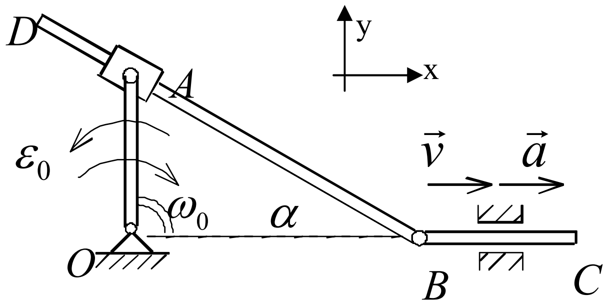
$$\vec{a}_{cor} = 0 \ .$$

Vektor apsolutnog ubrzanja je zbir vektora relativnog, prenosnog i Coriolis-ovog ubrzanja:

$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$; što daje rezultat apsolutnog ubrzanja tačke M u traženom trenutku:

$$\boxed{\vec{a}_a = \frac{5}{2} R\omega_0^2 \vec{i} - \frac{1}{4} R\omega_0^2 \vec{j}}$$

2. Mehanizam prikazan na *slici 9.* sastoji se od krivaje OA, dužine R, za čiji kraj A je zglobno vezan klizač kroz koji je provučen štap BD. Za kraj B štapa vezana je poluga BC, koja se kreće translatorno pravolinijski. Tačke O, B i C leže na istoj pravoj. U trenutku kada je krivaja vertikalna, njena ugaona brzina je ω_0, ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = \sqrt{3}\,\omega_0^2$, štap BD zaklapa ugao $\alpha = 30^\circ$ sa horizontalom, a poluga ima brzinu $v = 2R\omega_o$ i ubrzanje $a = \sqrt{3}Rr\omega_o^2/16$. Smerovi datih veličina prikazani su na *slici 9.* U zadatom položaju odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa BD.



Slika 9.

Rešenje:

Kako je u posmatranom trenutku krivaja OA vertikalnog položaja to je vektor brzine tačke A, krivaje OA koja se obrće oko tačke O, sa smerom u pravcu x ose, a to je praktično apsolutna brzina klizača A:

$\vec{v}_A = R\omega_0\vec{i}$;

Brzina tačke B poluge je data, a to je ujedno i brzina tačke B štapa BD koji vrši ravansko kretanje:

$\vec{v}_B = 2R\omega_0\vec{i}$;

Vektor relativne brzine klizača A je pravca štapa BD po kome kliza, a smera ka tački B, intenziteta koji treba da odredimo:

$$\vec{v}_{Ar} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_r\vec{i} - \frac{1}{2}V_r\vec{j} \quad ;$$

Vektor prenosne brzine je vector brzine tačke A štapa BD, i možemo ga odrediti preko poznate brzine tačke B kao:

$\vec{v}_{Ap} = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA}$;

gde je $\overrightarrow{BA}$ vektor položaja tačke A u odnosu na tačku B u obliku:

$\overrightarrow{BA} = -\sqrt{3}R\vec{i} + R\vec{j}$.

Tako da je:

$$\vec{v}_{Ap} = 2R\omega_o\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\sqrt{3}R & R & 0 \end{vmatrix}; \text{ tj. } \quad \vec{v}_{Ap} = (2R\omega_o - R\omega)\vec{i} - \sqrt{3}R\omega\vec{j}$$

Sada se iz vektorske jednačine: $\vec{V}_A = \vec{V}_{Ap} + \vec{V}_{Ar}$ određuju nepoznate veličine trenutne ugaone brzine štapa BD i relativna brzina klizača:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{4}\vec{k};} \qquad V_{Ar} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_0; \qquad \boxed{\vec{v}_{\mathrm{Ar}} = -\frac{3}{4}R\omega_0\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega_0\vec{j}\ .}$$

Vektor ubrzanja tačke A ima dve komponente tangencijalnu $a_{AT} = R\dot{\omega}_0 = R\varepsilon_0$ sa smerom suprotnim od smera x ose, i normalnu komponentu $a_{AN} = R\omega_0^2$ u vertikalnom pravcu sa smerom suprotnim od smera y ose, tj.: $\vec{a}_A = -\sqrt{3}R\omega_0^2\vec{i} - R\omega_0^2\vec{j}$, a to je zapravo vektor apsolutnog ubrzanja klizača A.

Ubrzanje tačke B poluge je dato, a to je ujedno i ubrzanje tačke B štapa BD koji vrši ravansko kretanje:

$$\vec{a}_B = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i}\ ;$$

Vektor relativnog ubrzanja klizača A je pravca štapa BD intenziteta koji ćemo odrediti:

$$\vec{a}_{Ar} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_r\vec{i} - \frac{1}{2}a_r\vec{j}\ ;$$

Vektor prenosnog ubrzanja tačke A, štapa BD koji se kreće ravanski, u odnosu na ubrzanje tačke B, je:

$$\vec{a}_{Ap} = \vec{a}_B + \vec{\dot{\omega}} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{BA}$$

pa sledi:

$$\vec{a}_{Ap} = \frac{\sqrt{3}}{16}R\omega_0^2\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\omega} \\ -\sqrt{3}R & R & 0 \end{vmatrix} - \frac{\omega_0^2}{16}\left(-\sqrt{3}R\vec{i} + R\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a}_{Ap} = &\left(\frac{\sqrt{3}}{8}R\omega_0^2 - R\dot{\omega}\right)\vec{i} + \\ &+\left(-\frac{R\omega_0^2}{16} - \sqrt{3}R\dot{\omega}\right)\vec{j} \end{aligned};$$

Coriolis-ovo ubrzanje klizača A je:

$$\vec{a}_{Acor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0}{4} \\ -\frac{3}{4}R\omega_0 & \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega_0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \vec{a}_{Acor} = -\frac{\sqrt{3}}{8}R\omega_0^2\vec{i} - \frac{3}{8}R\omega_0^2\vec{j}\ ;$$

Vektor apsolutnog ubrzanja klizača A je:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{Ap} + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{Acor}$$

Odakle se rešavanjem vektorske jednačine dobijaju vrednosti ugaonog ubrzanja štapa BD i relativnog ubrzanja klizača A:

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{25\sqrt{3}}{64}\omega_0^2\vec{k}} \qquad \boxed{a_r = -\frac{39}{32}R\omega_0^2}$$