XIV vežba

Dinamika tela promenljive mase

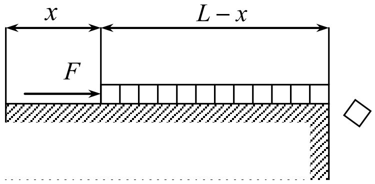
- Dinamika tela promenljive mase

Zadatak 1. Veliki broj malih kockica, čija je ukupna masa m čini materijalni sistem diskretnih materijalnih tačaka i leži na ivici stola ustanju mirovanja, kada konstantna sila F počinje da dejstvuje, na ovaj materijalni sistem, paralelno sa ravni stola, kako je na slici 1 prikazano. Odrediti brzinu kretanja ovog materijalnog sistema u funkciji koordinate x - dužine niza za slučaj:

a) da je površina stola hrapava i da je koeficijent trenja između kockica i stola μ,

b) da je površina stola idealno glatka

Kolika je ova brzina kada polovina svih kockica padne sa stola?



Slika 1.

Rešenje:

Postavljeni zadatak se odnosi na materijalni sistem promenljive mase. Zato, označimo masu jedinice dužine niza materijalnih tačaka posmatranog sistema, odnosno linijsku gustinu, sa

$$\rho' = \frac{m}{L}\text{, onda je } m(t) = (L-x)\rho'.$$

Sada možemo da koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica, koje se pripajaju iili odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca kockica u horizontalnom pravcu je: $\dot{x}$ Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela ostatka lanca kockica na horizontalnom stolu, koji ostaje po odvajanju kockica koje odpadaju.

Pošto je relatuvna brzina odvajanja kockica jednaka nuli diferencijalna jednačina biće oblika:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho'(L-x)\dot{x}\right) = F - \rho' g(L-x)\mu,$$

ili u obliku:

$$\rho'(L-x)\ddot{x} - \rho'\dot{x}^2 = F - \rho' g(L-x)\mu$$

odnosno

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{L-x} = \frac{F}{\rho'(L-x)} - g\mu,$$

Sada uvedimo smenu

$$u = \dot{x}^2$$

čijim diferenciranjem dobijamo:

$$2\dot{x}\ddot{x} = \dot{u} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}u'$$

Te unošenjem u prethodnu jednačinu istu transformišemo na oblik:

$$u' - 2\frac{u}{L-x} = \frac{2F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu$$

Ova jednačina je linearna prvog reda oblika

$$u' + P(x)u = Q(x)$$

Opšti integral ove jednačine je:

$$u = \dot{x}^2 = e^{-\int Pdx}\left\{\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right\}$$

U našem slučaju je:

$$P(x) = -\frac{2}{L-x} \qquad \text{i} \qquad Q(x) = \frac{3F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu$$

Dalje računanjem dobijamo

$$e^{\int\frac{2}{L-x}dx} = e^{-2\ln(L-x)} = \frac{1}{(L-x)^2} \qquad \text{i} \qquad e^{-\int\frac{2}{L-x}dx} = e^{2\ln(L-x)} = (L-x)^2$$

Ztim unoženjem u prethodni izraz za odredjivanje rešenja dobijamo:

$$u = \dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{\int\left[\frac{3F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu\right](:-x)^2 dx + C\right\}$$

$$u = \dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{\int\left[\frac{3F(L-x)}{\rho'} - 2g\mu(L-x)^2\right]dx + C\right\}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{-\frac{3F}{2\rho'}(L-x)^2 + \frac{2}{3}g\mu(L-x)^3 + C\right\}$$

Ako su početni uslovi takvi da je za $t=0$, $x=0, \dot{x}=0$ možemo odrediti integracionu konstantu u obliku:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L)^2}\left\{-\frac{3FL^2}{2\rho'} + \frac{2}{3}g\mu L^3 + C\right\} = 0$$

odakle sledi da je:

$$C = \frac{L^2}{6\rho'}(9F - 4\rho' g\mu L)$$

Te je kvadrat brzine kretanja lanca kockica, pri kontinualnom otpadanju čestica preko stola:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{-\frac{3F}{2\rho'}(L-x)^2 + \frac{2}{3}g\mu(L-x)^3 + \frac{L^2}{6\rho'}(9F - 4\rho' g\mu L)\right\}$$

Odnosno:

$$\dot{x}^2 = \frac{L^2}{6\rho'(L-x)^2}\left\{-9F\left(\frac{L-x}{L}\right)^2 + 4\rho' g\mu L\left(\frac{L-x}{L}\right)^3 + (9F - 4\rho' g\mu L)\right\}$$

ili

$$\dot{x}^2 = \frac{L^2}{6\rho'(L-x)^2}\left\{9F\left[1 - \left(\frac{L-x}{L}\right)^2\right] + 4\rho' g\mu L\left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^3 - 1\right]\right\}$$

Za $x=\dfrac{L}{2}$, dobijamo:

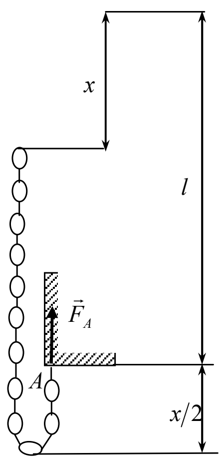
$$\dot{x}^2=\frac{2}{3\rho'}\left\{9F\left[1-\frac{1}{4}\right]+4\rho' g\mu L\left[\frac{1}{8}-1\right]\right\}$$

$$\dot{x}^2=\frac{1}{6\rho'}\left\{27F-14\rho' g\mu L\right\}$$

ili za $\mu=0$ i $x=\dfrac{L}{2}$, dobijamo

$$\dot{x}^2=\frac{9F}{2\rho'}$$

Zadatak 2. Homogeni lanac dužine l, *slika 2,* čija je masa jedinice dužine ρ', visi vertikalno zategnut pri čemu je njegov drugi kraj vezan za tačku A. Lanac se pusti da slobodno pada. Odrediti veličinu sile reakcije u tački A kao funkciju pređenog rastojanja x.



Slika 2

Rešenje:

Sistem je sa promenljivom masom, pa će se rešavati pomoću elementarne teorije Mešćerskog za sistem promenljive mase. Na slici posmatramo dva dela lanca, jedan dužine $\dfrac{x}{2}$ i drugi dižine $L+\dfrac{x}{2}-x$.

Mase i težine tih delova su:

$$M_1=\rho'\frac{x}{2} \qquad \text{i} \qquad M_2=\rho'\left(L-\frac{x}{2}\right)$$

$$G_1=M_1g=\rho' g\frac{x}{2} \qquad \text{i} \qquad G_2=M_2g=\rho' g\left(L-\frac{x}{2}\right)$$

Na delu savoja lanca dejstvuju unutrašnje sile u lancu, a na drugi dejstvuje sila otpora F_A tačke oslonca A

Brzime povećanja delova lanaca dodavanjem ili oduzimanjem elementarnih masa delovima lanaca, možemo usvojiti da je jednaka nuli.

Sada možemo da koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica, koje se pripajaju iili odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t)=0\,, \qquad \vec{v}_{rel}=-\vec{v}(t)\,, \qquad \frac{d}{dt}\left\{M(t)\vec{v}(t)\right\}=\vec{F}(t)$$

i da je primenimo na oba dela lanca:

Brzina kretanja lanca kockica u horizontalnom pravcu je: $\dot{x}$ Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela ostatka lanca kockica na horizontalnom stolu, koji ostaje po odvajanju kockica koje odpadaju.

Pošto je relatuvna brzina odvajanja kockica jednaka nuli diferencijalna jednačina biće oblika:

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho'\frac{x}{2}v_1(t)\right\} = \rho' g\frac{x}{2} + S + F_A$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho'\left(\ell - \frac{x}{2}\right)v(t)\right\} = \rho' g\left(\ell - \frac{x}{2}\right) - S$$

Kako možemo usvojiti da $v_1 \approx 0$, to dabiranjem dveju prethodnih jednačina dinamičke ravnoteže objekata promenljive mase dobijamo sledeću jednačinu:

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho'\left(\ell - \frac{x}{2}\right)v(t)\right\} = \rho' g\ell + F_A,$$

odale sledi da je:

$$\rho'\left(\ell - \frac{x}{2}\right)\dot{v}(t) - \rho'\frac{v^2}{2} = \rho' g\ell + F_A$$

Do iste jednačine možemo doći i koristeći teoremu o promeni impulsa kretanja (količine kretanja) vodeći računa da se ovde radi o promenljivoj masi lanca.Pošto je količina kretanja sistema

$$p = \rho'\left(l - \frac{x}{2}\right)v$$

a zbir svih spoljašnjih sila u pravcu ose x je:

$$\sum F_i^{(x)} = -F_A + \rho' gl$$

to iz teoreme o promeni količine kretanja :

$$\frac{dp}{dt} = \sum F_i$$

sledi:

$$\rho'\left(l - \frac{x}{2}\right)\dot{v} - \rho'\frac{v^2}{2} = -F_A + \rho' gl$$

Međutim levi deo lancaslobodno pada pa je diferencijalna jednačina pokretnog dela lanca

$$\rho'\left(l - \frac{x}{2}\right)\dot{v} = \rho' g\left(l - \frac{x}{2}\right),$$

Odnosno $\dot{v} = g$, odakle lako nalazimo da je:

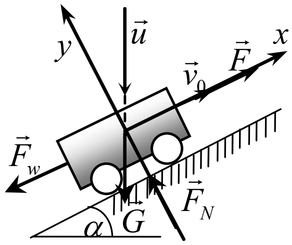
$v^2 = 2gx$, pa sledi:

$$\rho'\left(l - \frac{x}{2}\right)g - \rho' gx = -F_A + \rho' gl,$$

odakle dobijamo traženu reakciju:

$$F_A = \frac{3}{2}\rho' gx.$$

Zadatak 3. Vagon težine G_0 puni se u toku kretanja rudom koja vertikalno pada u vagon brzinom u. Težina rude koja u jedinici vremena zahvati vagon iznosi q $[kN/s]$. Odrediti vučnu silu F da bi se vagon kretao konstantnom brzinom v_0 uz strmu ravan nagiba α. Uzeti u obzir i otpor sile trenja kretanja vagona po hrapavoj ravni, smatrajući ga proporcionalnim sili normalnog pritiska F_n između vagona i ravni, tj. $F_w = \mu F_n$, gde su $\mu = const$ - koeficijent trenja , i F_w - tangencijalna komponenta sile otpora hrapave površi.



Slika 3.

Rešenje:

Diferencijalna jednačina kretanja vagona sa rudom u njemu, prema teoremi Mešćerskog: *Diferencijalna jednačina translatornog kretanja tela promenljive mase svodi se na jednačinu istog kretanja konstantne mase kada se aktivnoj sili doda reaktivna sila* $\vec{\mathfrak{F}}$, je :

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}} + \vec{G} + \vec{F}_w + \vec{F}_n + \vec{F},$$

ako se vagon koga smatramo telom koje se kreće translatorno kreće konstantnom brzinom, tj. $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, i ako je reaktivna sila:

$$\vec{\mathfrak{F}} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_r = \frac{dM}{dt}\left(\vec{u} - \vec{v}_0\right) = \frac{q}{g}\left(\vec{u} - \vec{v}_0\right),$$

gde je $\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}_0$ relativna brzina dodatne mase, onda se jednačina svodi na oblik:

$$\frac{q}{g}\left(\vec{u} - \vec{v}_0\right) + \vec{G} + \vec{F}_w + \vec{F}_n + \vec{F} = 0.$$

Projektovanjem ove jednačine na ose x i y dobijamo dve jednačine:

$$\frac{q}{g}\left(-u\sin\alpha - v_0\right) - G\sin\alpha - F_w + F = 0$$

$$-\frac{q}{g}u\cos\alpha - G\cos\alpha + F_n = 0,$$

iz druge jednačine sledi:

$$F_n = \left(\frac{q}{g}u + G\right)\cos\alpha,$$

i kako je $F_w = \mu F_n$, to dobijamo izraz za tarćenu veličinu sile:

$$F = \frac{q}{g}\left[(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)u + v_0\right] + G(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

gde je $G = G_0 + qt$, tenutna težina vagona sa rudom.