XIII vežba

Giroskopski efekat; Sudar

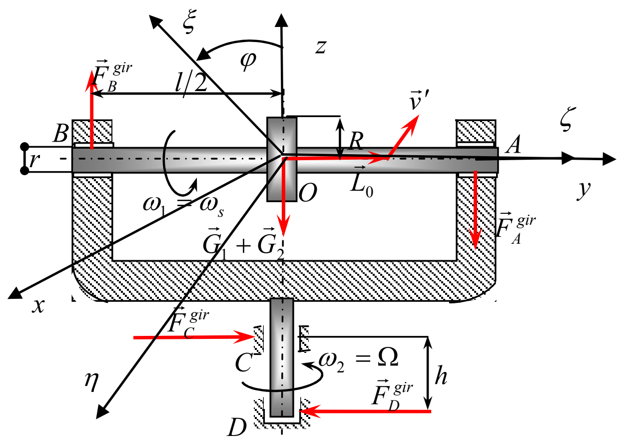
- Giroskopski efekat
- Centar udara
- Upravni centralni sudar
- Kosi centralni sudar

Zadatak 1. Materijalni sistem na *slici 4*., sastoji se od vratila AB, mase M_1, kružnog poprečnog preseka poluprečnika r, koje se obrće oko horizontalne ose AB brojem obrtaja $n_1[o/\min]$ i homogenog diska (zamajca) mase M_2 i poluprečnika R, koji je nasadjen na sredini raspona tog vratila. Ako se lak nosač ležišta A i B, zanemarljive mase, obrće oko vertikalne ose brojem obrtaja $n_2[o/\min]$, odrediti ukupne reakcije ležišta A i B, ako je rastojanje između ležišta l. Odrediti i dopunske sile (usled giroskopskog efekta) u ležištima C i D koja su na rastojanju h.

Rešenje:

Kako disk, zajedno sa vratilom dobija sve komponente brzine jednu *ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja* oko horitontalne ose $\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{k}' = \frac{\pi n_1}{30}\vec{k}'$ i drugu *prenosnu ugaonu brzinu obrtanja* oko vertikalne ose $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k} = \frac{\pi n_2}{30}\vec{k}$, to je njegova *trenutna ugaona vrzina obrtanja* jednaka zbiru ovih dveju:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\Omega} = \omega_s \vec{k}' + \Omega \vec{k} = \frac{\pi n_1}{30}\vec{k}' + \frac{\pi n_2}{30}\vec{k}$$



i stalno prolazi kroz tačku O presečnu tačku osa sopstvenog obrtanja i prenosnog obrtanja. Na osnovu toga taključujemo da disk sa vratilom, iako nije učvršćen u tački O izvodi obrtanje oko nepomične tačke O, kao da je u njoj učvršćen. Ovde smo već usvojili da je nepokretni sistem sa koordinatnim početkom u tački O i sa koordinatnom osom Oz u vertikalnom pravcu, a da smo pokretni sistem koordinata $O\xi\eta\zeta$ usvojili sa koordinatnim početkom O u preseku osa sopstvenog i prenosnog kretanja, a osu $O\zeta$ u pravcu ose vratila (sopstvenog obrtanja). Zaključujemo da je ugao izmedju tih osa uvek $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, te ugao nutacije konstantan, augaona brzina nutacije jednaka nuli.

Kako sklop disk i vratilo, čije mase nisu zanemarljive ima ose simetrije u pravcu ose vratila i dve upravne na istu i kroz nepokretnu tačku O, to su te ose istovremeno i glavne ode inercije i za te ose devijacioni momenti masa su jednaki nuli, te postoje samo aksijalni momenti inervije masa diska i vratila za ose pokretnog sistema koordinata. Ti aksijalni momenti inercije masa vratila i diska su:

$$J_{O\xi} = J_{O\eta} = \frac{1}{12}M_1\left(\ell^2 + 3r^2\right) + \frac{1}{4}M_2R^2 = J_{O2} = J_{O3},$$

$$J_{O\zeta} = \frac{1}{2}M_1r^2 + \frac{1}{2}M_2R^2 = J_{O1}$$

pri čemu je za disk usvojeno da je male debljine (kao poloča), a za Vratilo da je homogeni cilindar dužine jednake rastojanju ležišta vratila $AB = \ell$, a kružnog poprečnog preseka poluprečnika r, kao što je zadato tekstom zadatka. Istovremeno to su i glavni momenti inercije za pol u tački O sistema vratilo disk-

Sada Ort $\vec{k}$ možemo izraziti u pokretnom sistemu koordinata sistemu $O\xi\eta\zeta$ koji je vezan za vratilo i disk. Označimo sa φ ugao sopstvenog obrtanja oko ose $O\zeta$ te je $\varphi = \omega_s t$, dok je

$$\vec{k} = \cos\varphi\vec{i}\,' - \sin\varphi\vec{j}\,'$$

Sad možemo ugaonu brzinu da napisšemo u sledećem obliku:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\Omega} = \omega_s\vec{k}\,' + \Omega\vec{k} = \frac{\pi n_1}{30}\vec{k}\,' + \frac{\pi n_2}{30}\vec{k} = \Omega\left(\cos\varphi\vec{i}\,' - \sin\varphi\vec{j}\,'\right) + \omega_s\vec{k}\,'$$

Te su komponente ugaone brzine u pravcima koordinatnih osa pokretnog sistema koordinata:

$$\omega_\xi = \Omega\cos\varphi = \Omega\cos\omega_s t$$

$$\omega_\eta = -\Omega\sin\varphi = -\Omega\sin\omega_s t$$

$$\omega_\zeta = \omega_s$$

A vektori momenata masa su:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i}\,')} = J_{O\xi}\vec{i}\,' = \left[\frac{1}{12}M_1\left(\ell^2 + 3r^2\right) + \frac{1}{4}M_2R^2\right]\vec{i}\,' = J_{O2}\vec{i}\,',$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{j}\,')} = J_{O\eta}\vec{j}\,' = \left[\frac{1}{12}M_1\left(\ell^2 + 3r^2\right) + \frac{1}{4}M_2R^2\right]\vec{j}\,' = J_{O3}\vec{j}\,'$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{k}\,')} = J_{O\zeta}\vec{k}\,' = \left[\frac{1}{2}M_1r^2 + \frac{1}{2}M_2R^2\right]\vec{k}\,' = J_{O1}\vec{k}\,'$$

Moment količine kretanja kretanja za tačku O možemo napisati u obliku:

$$\vec{L}_O = \omega\iiint_V [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm = \omega\vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

onosno

$$\vec{L}_O = \omega_\xi\vec{J}_O^{(\vec{i}\,')} + \omega_\eta\vec{J}_O^{(\vec{j}\,')} + \omega_\zeta\vec{J}_O^{(\vec{k}\,')} = \Omega J_{O2}\left(\vec{i}\,'\cos\omega_s t - \vec{j}\,'\sin\omega_s t\right) + J_{O1}\omega_s\vec{k}\,'$$

Kao i da je na osnovu teoreme o promeni mometa impulsa

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overset{*}{\vec{L}}_O + \left[\vec{\omega},\vec{L}_O\right] = \sum_{k=1}^{S}\left[\vec{r}_k,\vec{F}_k\right] + \left[\vec{r}_C,\vec{G}\right] = \vec{\mathfrak{M}}_0$$

Sada možemo odrediti relativni izvod momenta količine kretanja $\vec{L}_O$:

$$\overset{*}{\vec{L}}_O = \Omega\omega_s J_{O2}\left(-\vec{i}\,'\sin\omega_s t - \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right)$$

Potrebno je odrediti i prenosni deo izvoda momenta količine kretanja $\vec{L}_O$ ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ Č

$$\left[\vec{\omega},\vec{L}_0\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ \Omega\cos\omega_s t & -\Omega\sin\omega_s t & \omega_s \\ \Omega J_{O2}\cos\omega_s t & -\Omega J_{O2}\sin\omega_s t & \omega_s J_{O1} \end{vmatrix}$$

$$\left[\vec{\omega},\vec{L}_0\right] = -\vec{i}\,'\Omega\omega_s\left(J_{O1} - J_{O2}\right)\sin\omega_s t - \vec{j}\,'\Omega\omega_s\left(J_{O1} - J_{O2}\right)\cos\omega_s t$$

$$\left[\vec{\omega},\vec{L}_0\right] = -\Omega\omega_s\left(J_{O1} - J_{O2}\right)\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right)$$

Sada koristeći teoremu o promeni momenta impulsa dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overset{*}{\vec{L}_O} + \left[\vec{\omega}, \vec{L}_O\right] = \vec{\mathfrak{M}}_0$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Omega\omega_s J_{O2}\left(-\vec{i}\,'\sin\omega_s t - \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) - \Omega\omega_s\left(J_{O1} - J_{O2}\right)\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = \vec{\mathfrak{M}}_0$$

Imajući u vidu da jednom treba ovaj moment da ''prime'' ležišta A i B, a posredno i ležišta C i D to pretpostavljamo da se u njima javljaju u paru po dve suprotne sile na rastojanjima ℓ, odnosno h pa možemo da napišemo sledeću relaciju:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Omega\omega_s J_{O1}\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = \vec{\mathfrak{M}}_0 = \left[\ell\vec{k}\,', \vec{F}_A^{gir}\right] = \left[h\vec{k}, \vec{F}_C^{gir}\right] = h\left[\vec{i}\,'\cos\omega_s t - \vec{j}\,'\sin\omega_s t, \vec{F}_C^{gir}\right]$$

Sada izjednačavanjem koeficijenata uz iste jedinične vektore pokretnog sistema koordinata dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Omega\omega_s J_{O1}\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = \vec{\mathfrak{M}}_0 = \left[\ell\vec{k}\,', \vec{F}_A^{gir}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ 0 & 0 & \ell \\ F_{A\xi}^{gir} & F_{A\eta}^{gir} & F_{A\zeta}^{gir} \end{vmatrix} = -\vec{i}\,'\ell F_{A\eta}^{gir} + \vec{j}\,'\ell F_{A\xi}^{gir}$$

Odavde zaključujemo da je $F_{A\zeta} = 0$ *i*

$$F_{A\eta}^{gir} = -\frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{\ell}\sin\omega_s t = -F_{B\eta}^{gir}$$

$$F_{A\xi}^{gir} = \frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{\ell}\cos\omega_s t = -F_{B\xi}^{gir}$$

Te je

$$\vec{F}_A^{gir} = F_{A\xi}^{gir}\vec{i}\,' + F_{A\eta}^{gir}\vec{j}\,' = \frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{\ell}\left(\vec{i}\,'\cos\omega_s t - \vec{j}\,'\sin\omega_s t\right) = -\vec{F}_B^{gir} = \frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{\ell}\vec{k}$$

jer je

$$\vec{k} = \cos\varphi\vec{i}\,' - \sin\varphi\vec{j}\,'$$

Intenzitet ovih kinetičkih pritisaka na lišta vratila u suportu je:

$$F_A^{gir} = \frac{\Omega\omega_s}{2\ell}\left(M_1 r^2 + M_2 R^2\right) = F_B^{gir}$$

i padaju u pravac ose precesije Oz.

Sada razmotrimo kinetičke pritiske usled giroskopskog efekta na ležišta C i D suporta.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Omega\omega_s J_{O1}\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = \vec{\mathfrak{M}}_0 = \left[h\vec{k}, \vec{F}_C^{gir}\right] = h\left[\vec{i}\,'\cos\omega_s t - \vec{j}\,'\sin\omega_s t, \vec{F}_C^{gir}\right]$$

$$\Omega\omega_s J_{O1}\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = h\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ \cos\omega_s t & -\sin\omega_s t & 0 \\ F_{C\xi}^{gir} & F_{C\eta}^{gir} & F_{C\zeta}^{gir} \end{vmatrix}$$

$$\Omega\omega_s J_{O1}\left(\vec{i}\,'\sin\omega_s t + \vec{j}\,'\cos\omega_s t\right) = -\vec{i}\,'hF_{C\zeta}^{gir}\sin\omega_s t - \vec{j}\,'hF_{C\zeta}^{gir}\cos\omega_s t + \vec{k}\,'h\left(F_{C\eta}^{gir}\cos\omega_s t + F_{C\xi}^{gir}\sin\omega_s t\right)$$

Izjednačavanjem koeficijenat sa leve i desne strane uz iste jedinične vektore pokretnog sistema koordinata dobijamo:

$$F_{C\eta}^{gir}\cos\omega_s t + F_{C\xi}^{gir}\sin\omega_s t = 0 \qquad F_{C\eta}^{gir} = -F_{C\xi}^{gir}tg\omega_s t = 0$$

$$F_{C\zeta}^{gir} = -\frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{h} = -F_{D\zeta}^{gir} \qquad \vec{F}_C^{gir} = -\frac{\Omega\omega_s J_{O1}}{h}\vec{k}\,' = -\vec{F}_D^{gir}$$

i padaju u pravac ose $O\zeta$ i rotiraju oko ose Oz ugaonom brzinom precesije Ω.

Ovako dobijenim komponentama treba dodati komponente statičkih pritisaka usled sila težine vratila i diska, koje nije teško odrediti:

$$\vec{F}_A^{st} = \vec{F}_B^{st} = -\frac{M_1 + M_2}{2} g\vec{k}$$

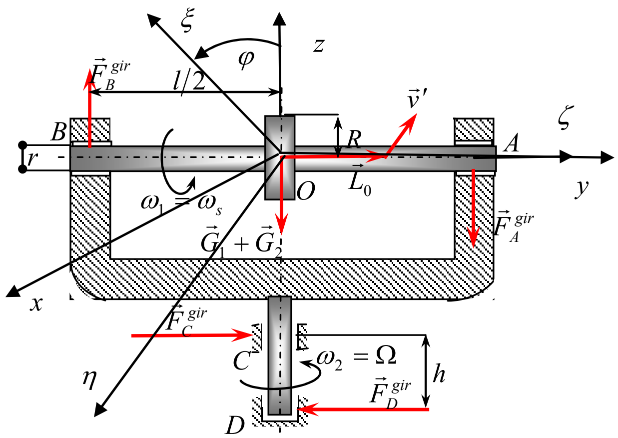
$$\vec{F}_D^{st} = -(M_1 + M_2) g\vec{k}$$

Drugi način rešavanja: Zbog promene pravca ose giroskopa, kraj vektora momenta količine kretanja za tačku O, $\vec{L}_0$ dobija brzinu $\vec{V}_L$:

$$\vec{V}_L = [\vec{\omega}_2, \vec{L}_0]$$

$$V_L = L_0 \omega_2 = J\omega_1\omega_2 = v'$$

gde je $J_{O\zeta} = J = \frac{1}{2} M_1 r^2 + \frac{1}{2} M_2 R^2$.



Slika 4.

Giroskopski spreg $\vec{\mathfrak{M}}_0$ ima pravac brzine $\vec{v}'$ vektora momenta količine kretanje, a smer suprotan od nje pa su giroskopski otpori u ležištima A i B:

$$v' = \frac{1}{2g}\left(G_1 r^2 + G_2 R^2\right)\omega_1\omega_2 = \mathfrak{M}_0 = F_A^{gir} \cdot l = F_B^{gir} \cdot l .$$

Kako su $\omega_s = \omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$ i $\Omega = \omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$ dobijamo:

$$F_A^{gir} = F_B^{gir} = \frac{\left(G_1 r^2 + G_2 R^2\right)\pi^2 n_1 n_2}{1800 gl}$$

Ukupnu rezultujući otpori ležišta se dobijaju dodavanjem i statičkih komponenti, koje su zbog simetrije $F_A^{st} = F_B^{st} = \frac{G_1 + G_2}{2}$, pa su :

$$F_A = \frac{G_1 + G_2}{2} - F_A^{gir}, \quad F_B = \frac{G_1 + G_2}{2} + F_B^{gir} .$$

Giroskopske komponente otpora ležišta C i D obrazuju spreg $\mathfrak{M}_0 = v'$ pa su:

$$F_C^{gir} = F_D^{gir} = \frac{\mathfrak{M}_0}{h} = \frac{\left(G_1 r^2 + G_2 R^2\right)\pi^2 n_1 n_2}{1800 gh} .$$

Zadatak 2. Odrediti koordinate centra udara C_u homogene tanke pločice oblika kružnog kvadranta poluprečnika R, *slika 4.*

Rešenje:

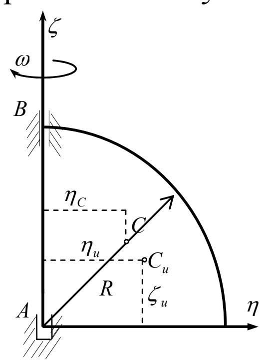
Centar udara C_u je ona tačka u kojoj treba da dejstvuje udarna trenutna impulsna sila, da bi reaktivne udarne impulsne reakcije veza u ležištima vratila bile jednake nuli.

U naznačenom sistemu koordinata koordinate centra udara C_u su:

$$\xi_u = 0, \qquad \eta_u = \frac{J_{Az}}{M\eta_C}, \qquad z_u = \zeta_u = \frac{J_{A\eta\zeta}}{M\eta_C}$$

Zato je potrebno odrediti aksijalni moment inercije mase pločice osu Az oko koje se obrće i centrifugalni moment mase za ose ξ i η kroz nepokretno ležište A na osi oko koje se pličica obrće. Kako je pločica nomogenog rasporeda masa i tanka, male debljine, umesto aksijalnig momenta inercije mase i centrifugalnog momenta mase mogu se koristiti aksijalni moment inercije površine pločice i centrifugalni moment površine za odgovarajuće osei površina umesto mase pločice.

Aksijalni moment inercije površine pločice za osu ζ i centrifugalni moment površine za ose ξ i η su:



Slika 4

$$I_z = I_\zeta = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{16} R^4 \pi = \frac{1}{4} AR^2$$

$$I_{\eta z} = I_{\eta\zeta} = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{8} R^4 = \frac{1}{2}\frac{AR^2}{\pi}$$

Položaj težišta pločice je $\eta_C = \frac{4R}{3\pi}$ (kao i centra masa tanke homogene pločije).

Koordinate centra udara su:

$$\xi_u = 0, \qquad \eta_u = \frac{i_z^2}{\eta_C}, \qquad z_u = \zeta_u = \frac{I_{\eta\zeta}}{A\eta_C}$$

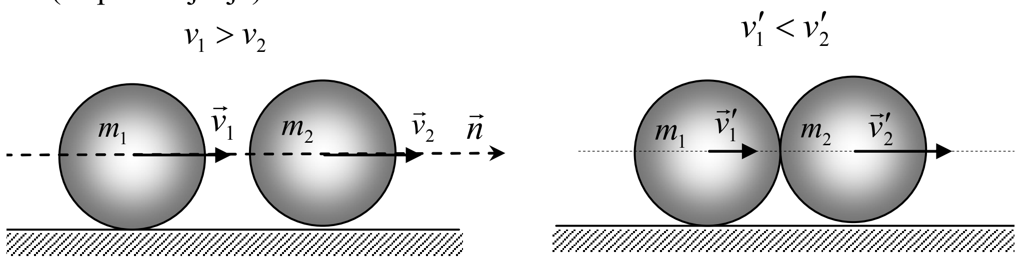
Centar udara poklapa se sa onom tačkom konture jezgra čija je neutralna osa sama osa oko koje se obrće pločica.

gde je $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ poluprečnik inercije.

Za zadatu pločicu dobijamo:

$$\eta_u = \frac{3R\pi}{16}, \qquad z_u = \zeta_u = \frac{3}{8R}.$$

Zadatak 3. Kuglica M_1, mase m_1, kreće se pravolinijski i udari brzinom v_1 kuglicu M_2 mase m_2, koja je do udara bila u stanju mirovanja, pri tome se brzina kuglice M_1 smanji za polovinu. Pretpostavljajući da je udar upravni i centralni, odrediti masu m_2 kuglice M_2 i njenu brzina neposredno posle udara, ako je koeficijent sudara (uspostavljanja) $k = 0.5$.



Slika 1.

Rešenje:

Da bi telo mase m_1 udarilo u telo mase m_2 mora biti uslov brzina $v_1 > v_2$, kao i dopunski uslovi koji se odnose na saglasnist vremena i položaja na putanji. Odnos projekcija relativnih brzina težišta tela posle i pre sudara, naziva se koeficijent sudara (uspostavljanja) :

$$k = \frac{v_r'}{v_r} = \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|} = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

On ne zavisi od oblika, veličine i brzine tela već samo od njihovih elastičnih osobina, neimenovan je broj i određuje se eksperimentalno.

Kako je uslovima zadatka definisano kuglicu M_2 mase m_2, je do udara bila u stanju mirovanja, i pri tome se brzina kuglice M_1 smanji za polovinu tj.

$$v_2 = 0 \qquad v_1' = \frac{1}{2}v_1$$

i kako je zadat koeficijent sudara: $k = \frac{1}{2}$, to sledi da je brzina druge kuglice neposredno posle sudara:

$$v_2' = v_1$$

Iz teoreme o održanju količine kretanja

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

slede izrazi za brzine kuglica neposredno posle sudara :

$$v_1' = v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$v_2' = v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

Iz prethodnih jednačina za zadatkom zadate podatke sledi sistem jednačina:

$$\frac{1}{2}v_1 = v_1 - \frac{3}{2}\frac{m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

$$v_2' = \frac{3}{2}\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

$$3m_2 = m_1 + m_2$$

$$v_2' = \frac{3}{2}\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

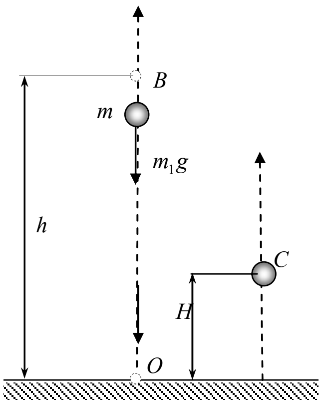
odakle rešavanjem dobijamo traženi odnos:

$$m_2 = \frac{1}{2}m_1$$

Kao i brzinu druge kuglice:

$$v_2' = \frac{3}{2}\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{3}{2}\frac{m_1}{\frac{3}{2}m_1} = v_1$$

Zadatak 4. Kuglica mase m slobodno pada sa visine h i udari upravno o horizontalnu nepokretnu ravan i odbije se od nje. Odrediti maksimalnu visinu penjanja H kuglice nakon odbijanja, ako je koeficijent sudara (uspostavljanja) k. Koliko je koeficijent udara ako kugla odskoči do visine $h/2$? Odrediti broj udara u podlogu posle kog neće dostici visinu $h/2^n$, gde je n ceo broj? Za koliko vremena će proteći dok kuglica počne da odskaće ispod visine $h/2^n$?



Slika 2

Rešenje:

Konačna jednačina kretanja materijalne (dinamičke) tačke puštene u bezvazdušnom prostoru sa visine h na rastojanju BO je:

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2,$$

u trenutku udara o nepokretnu ravan , $z=0$, iz te jednačine dobija se vreme slobodnog pada:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Brzina dinamičke tačke pri slobodnom padu je:

$$v = -gt,$$

a u trenutku udara posle vremena t_0 je:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Koeficijent udara o nepokretnu ravan je :

$$k = \frac{v_1}{v_0},$$

gde je v_1 brzina kuglice posle udara i ako je zadat koeficijent udara k, ona iznosi:

$$v_1 = k\sqrt{2gh}.$$

Posle udara kuglia se kreće po zakonu vertikalnog hica naviše, na rastojanju OC, po zakonu

$$z = v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad ,$$

pri čemu je zakon promene brzine

$$v = v_1 - gt,$$

u trenutku dostizanja maksimalne visine kuglica se zaustavi tj. $v=0$ iz koga uslova dobijamo vreme potrebno da kuglica stigne na maksimalnu visinu H:

$$t_C = \frac{v_1}{g} = k\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Sama visina H je

$$z(t = t_C) = H = k^2 h$$

odnosno:

$$H = k^2 h\,.$$

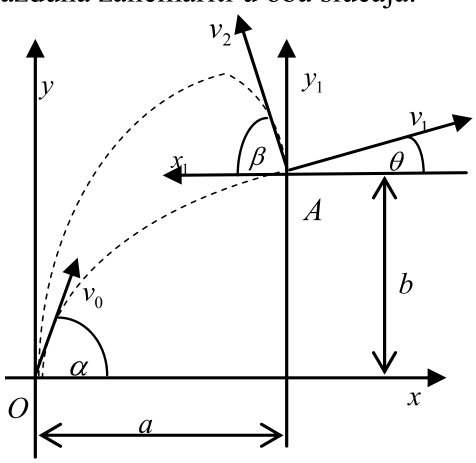
Ako kuglica odskoči na visunu $H = \frac{h}{2}$ sledi da je koeficijent udara $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 5. Kuglica mase m bačena je iz tačke O, početnom brzinom v_0, koja sa horizontalom gradi ugao α i udari u vertikalni glatki zid Ay_1 i posle odbijanja prođe kroz svoj početni položaj O.

a* Odrediti rastojanje a početnog položaja materijalne tačke od zida, ako se zna da je koeficijent sudara (uspostavljanja) k.

b* Posle sudara sa horizontalnim podom u tački O, pri čemu se može usvojiti isti koeficijent sudara i odbijanja u koju tačku vertikalnog zida će udariti? Da li je ta tačka na višem ili nižem položaju od tačke udara u prethodnom sudaru sa istim zidom?

Otpor vazduha zanemariti u oba slučaja.



Slika 3.

Rešenje:

a* Kuglica će udariti u vertikalni zid brzinom v_1 pod uglom θ, koji čini tangenta povučena na njenu putanju sa normalom udara, a odbiće se pod uglom β. Obe su putanje parabole pa možemo smatarti da je parabola povratne putanje parabola kosog hica početne brzine v_2 i elevacionog ugla β. Konačne jednačine kretanja dinamičke tačke po zakonu kosog hica su:

$$x = v_0 t\cos\alpha$$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

pa je putanja pre udara:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\cos^2\alpha$$

i odnos projekcija brzina na pravac ose x:

$$v_1\cos\theta = v_0\cos\alpha\,.$$

Vreme dostizanja tačke A dobija se iz uslova:

$$x = a \text{ pa sledi: } t_A = \frac{a}{v_0\cos\alpha}\,.$$

Tangens ugla θ je: $tg\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = tg\alpha - \frac{ga}{v_0^2 \cos^2\alpha}$.

Koeficijent sudara je:

$$k = \frac{|v_2 \cos\beta|}{|v_1 \cos\theta|}$$

pa sledi odnos početnih brzina i elevacionih uglova kosog hica pre udara i posle udara :

$$v_2 \cos\beta = -kv_1 \cos\theta = -kv_0 \cos\alpha \ .$$

Jednačina putanje kosog hica posle udara je:

$$y_1 = x_1 \cdot tg\beta - \frac{gx_1^2}{2v_2^2 \cos^2\beta} \ .$$

Iz uslova zadatka da kuglica posle odbijanja prođe kroz svoj početni položaj $O(a,-b)$ sledi sistem jednačina:

$$-b = a \cdot tg\beta - \frac{ga^2}{2v_2^2 \cos^2\beta}$$

$$b = a \cdot tg\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \ ,$$

sabiranjem ovih jednačina sledi veza:

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{ga}{2}\left(\frac{1}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{1}{v_2^2 \cos^2\beta}\right)$$

Kako za kosi udar kugle o vertikalni zid važi odnos: $k = \frac{tg\theta}{tg\beta}$ pa sledi relacija:

$$tg\alpha + \frac{tg\theta}{k} = \frac{ga}{2}\left(\frac{1}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{1}{k^2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right)$$

i kako je :

$$tg\theta = tg\alpha - \frac{ga}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

sledi tražena vrednost:

$$a = \frac{kv_0^2}{g(1+k)} \sin(2\alpha) \ .$$

b* Rešenje drugog dela zadatka nosi do 5 poena, ako se podnese u elektronskom obliku sa odgovarajućim crtežom..