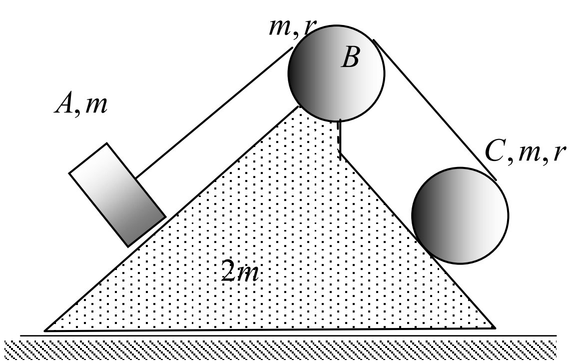
XI vežba

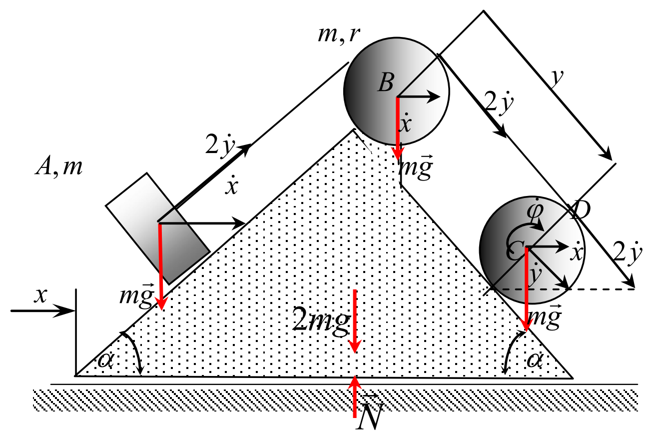
Dinamika krutih tela

- Primena principa rada, Lagrange-ovg principa, principa virtualnih pomeranja, D'Alamber-ov princip.
- Vektori momenata masa za pol i osu i momenti inercije mase tela
- Teoreme o promeni kinetičke energije sistema
- Dinamički pritisci na ležišta rotora

Zadatak 1. Na prizmi mase $2m$, koja može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni, nalazi se disk B, poluprečnika r i mase m vezan za prizmu osovinom B. Preko diska B prebačeno je nerastegljivo uže, zanemarljive težine, koje je jednim krajem vezano za teret A, mase m, a drugim krajem je obmotano na kotur C, poluprečnika r i mase m. Kotur se kotrlja bez klizanja a teret A klizi po prizmi.
Zanemujući trenje između prizme i podloge, između tereta A i prizme, kao i otpor obrtanju u ležištu B i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta.



Slika 8a.



Slika 8a.

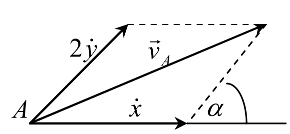
Rešenje:

Položaj materijalnog sistema određen je najmanje dvema koordinatama, te ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate izaberemo koordinate x i y, pri čemu je položaj prizme odredjen koordinatom x, dok za drugu generalisanu koordinatu y izaberemo udaljenje tačke C, centra diska od tačke B na prizmi.

Prvo, odredimo ozraz za kinetičku energiju pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = E_{k\Delta} + E_{kA} + E_{kB} + E_{kC}$$

Kinetička eknergija prizme koja se kreće translatorno brzinom $\dot{x}$ je:



Slika 8c.

$$E_{k\Delta} = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 = m\dot{x}^2 .$$

Brzina tereta A koji se kreće translatorno brzinom $\vec{v}_A$, koja se dobija slaganjem brzina translacija preniosne brzine brzibe suporta (prizme) $\dot{x}$ i relativne brzine kretanja po prizmi $2\dot{y}$, je na osnovu kosinusne teoreme, *slika 8c*:

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + (2\dot{y})^2 - 4\dot{x}\dot{y}\cos(\pi-\alpha) = \dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\ ,$$

pa je kinetička energija tereta A:

$$E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right)$$

Ovde smo uočili da je zbog nerastegljivosti užeta relativna brzina tačke , u odnosu na prizmu, jednaka relativnoj brzini tačke D na koturu koja je, opet, zbog kotrljanja bez klizanja kotura po prizmi, jednaka

$$v_{Dr} = 2\dot{y}\ .$$

Disk B vrši ravno kretanje, te je brzina njegovog središta B jednaka $\dot{x}$, a ugaona brzina ω_B obrtanja diska se dobija iz uslova da nema proklizavanja između diska i užeta,

$$\omega_B = \frac{2\dot{y}}{r},$$

pa je kinetička energija:

$$E_{kB} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{4\dot{y}^2}{r^2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),$$

gde je $J_B = \frac{1}{2}mr^2$ aksijalni moment inercije mase diska za osu upravnu na ravan diska kroz tačku B centra diska.

Kotur C vrši ravno kretanje. Brzina središta se dobija slaganjem prenosne i relativne brzine tačke C,

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos(\pi-\alpha) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\ ,$$

a ugaona brzina kotura iz uslova da je P trenutni pol brzine obrtanja je $\omega_C = \frac{\dot{y}}{r}$, pa je:

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{y}^2}{r^2} = \frac{1}{4}m\left(2\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right),$$

gde je $J_C = \frac{1}{2}mr^2$ aksijalni moment inercije mase kotura za osu upravnu na ravan kotura kroz tačku C centra kotura. Sada je:

$$E_k = \frac{1}{4}m\left(10\dot{x}^2 + 15\dot{y}^2 + 12\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right).$$

Kako se na sistem može primeniti teorema u promeni kinetičke energije koju možemo napisati u diferencijalnom obliku:

$$dE_k = dA\ ,$$

gde je dA ukupni elementarni rad spoljašnjih sila na elementarnom pomeranju sistema.

Kako je

$$dE_k = \frac{1}{2}m\left(10\dot{x}d\dot{x} + 15\dot{y}d\dot{y} + 6\dot{y}d\dot{x}\cos\alpha + 6\dot{x}d\dot{y}\cos\alpha\right) = m\left(5d\dot{x} + 3d\dot{y}\cos\alpha\right)\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(15d\dot{y} + 6d\dot{x}\cos\alpha\right)\dot{y}\ ,$$

a rad sila na elementarnim pomeranjima sistema, koje podrazumeva priraštaje izabranih generalisanig koordinata dx i dy, je:

$$dA = \left(m\vec{g}, d\vec{s}_A\right) + \left(m\vec{g}, d\vec{s}_C\right) = -mg\sin\alpha\cdot 2dy + mg\sin\alpha\cdot dy = -mg\sin\alpha\cdot dy$$

Radovi sile težine prizme $2m\vec{g}$ i sile težine diska $m\vec{g}$ jednaki su nuli pošto su pomeranja napadnih tačaka ovih sila upravna na vektore sila, takođe je i rad unutrašnjih sila $\vec{N}$ jednak nuli.

Sada imamo:

$$m\left(5d\dot{x} + 3d\dot{y}\cos\alpha\right)\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(15d\dot{y} + 6d\dot{x}\cos\alpha\right)\dot{y} = -mg\sin\alpha\cdot dy$$

posle sredjivanja prethodnog izraza imajući u vidu da je:

$$\dot{x}d\dot{x} = \frac{dx}{dt}d\dot{x} = dx\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}dx$$

dobijamo::

$$\left(5\ddot{x}+3\ddot{y}\cos\alpha\right)dx+\frac{1}{2}\left(15\ddot{y}+6\ddot{x}\cos\alpha\right)dy=-g\sin\alpha\cdot dy$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena u svakom trenutku tj. za svaku vrednost generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$, i diferencijalnih pomeranja moraju koeficijannti uz dx i dy sa leve i desne strane znaka jednakosti biti jednaki iz kog uslova sledi:

$$15\ddot{y}+6\ddot{x}\cos\alpha=-2g\sin\alpha$$

$$5\ddot{x}+3\ddot{y}\cos\alpha=0$$

Ovo su tražene diferencijalne jednačine kretanja. Ubrzanja su:

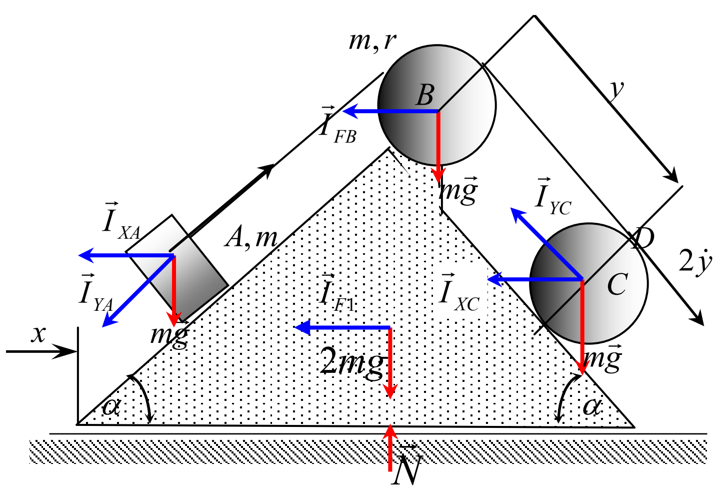
$$\ddot{x}=\frac{3g\sin 2\alpha}{75-18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad \ddot{y}=-\frac{10g\sin\alpha}{75-18\cos^2\alpha}$$

Odakle se vidi da su ubrzanja konstantna.

Zadatak 2. Na prizmi mase $2m$, koja može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni, nalazi se disk B, poluprečnika r i mase m vezan za prizmu osovinom B. Preko diska B prebačeno je nerastegljivo uže, zanemarljive težine, koje je jednim krajem vezano za teret A, mase m, a drugim krajem je obmotano na kotur C, poluprečnika r i mase m. Kotur se kotrlja bez klizanja a teret A klizi po prizmi.

Zanemujući trenje između prizme i podloge, kao i otpor obrtanju u ležištu B, ali uzimajući trenje između tereta A i prizme, kao i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta.

U tom slučaju pretpostaviti da između tereta A i prizme postoji trenje pri čemu je koeficijen trenja μ a krak otpora kotrljanju je ε. Odrediti takođe i sile u užadima i silu u ležištu B. Koristiti relacije principa dinamičke ravnoteže.



Slika 9a.

Rešenje:

Materijalni sismtem koji je predmet ovog zadatka je sličan kao i sistem iz prethodnog zadatka, tako da se analiza sila tamo izvrđena može koristiti i u režavanju ovog zadatka istim metodama, pri ćemu moraju da se uzmu efekti sila trenja usled neidealnosti veza , za razliku od veza iumedju prizme i kotura i prizme i tereta koji su bili idealne veze bez trenja.

Položaj materijalnog sistema, i u ovako postavljenom zadatku sa sistemomom sa neidealnim vezama i sa trenjem, je određen sa najmanje dvema koordinatama, te sistem ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate izaberemo koordinate x i y, pri čemu je položaj prizme odredjen koordinatom x, dok za drugu generalisanu koordinatu y izaberemo udaljenje tačke C, centra diska od tačke B na prizmi.

Na *slici 9a* prikazane su sve sile inercije i spoljašnje aktivne sile koje dejstvuju na ovaj mehanički sistem. Primetimo da su sile inercije suprotnih smerova od ubrzanja, koja se smatraju pozitivnim. Na osnovu vektorske relacije principa dinamičke ravnoteže („Ravnoteža" projekcija svih sila u pravcu ose x daje nam jednačinu) i njene projekcije na pravac x dobijamo:

$$I_{XA}+I_{XB}+I_{F1}+I_{XC}+I_{YA}\cos\alpha+I_{YC}\cos\alpha=0$$

gde su:

$$I_{XA}=-m\ddot{x},\ I_{XB}=-m\ddot{x},\ I_{XC}=-m\ddot{x},\ I_{F1}=-2m\ddot{x},\ I_{YA}=-m2\ddot{y}\ \text{ i }\ I_{YC}=-m\ddot{y}\,.$$

Ovde je i iskorišćena veza između ubrzanja tačaka A i C u odnosu na prizmu, koja se dobija diferenciranjem kinematičke jednačine koja povezuje brzine $\dot{y}_A$ i $\dot{y}_C$:

$$\dot{y}_A=2\dot{y}_C=2\dot{y}$$

odnosno

$$\ddot{y}_A=2\ddot{y}\,.$$

Zamenom navedenih sila inercije u jednačinu dinamičke ravnoteže projekcija sila u x pravcu dobija se sledeća diferenciojalna jednačina:

$$5\ddot{x}+3\ddot{y}\cos\alpha=0$$

Pošto u ovoj jednačini imamo dve nepoznate potrebno je napisati još jednu jednačinu. Rastavimo sistem na podsisteme i vodimo računa o svim silama i momentima koji dejstvuju na pojedine podsisteme, počevši sa spoljašnjim silama, preko unutrašnjih do sila inercije, koje dejstvuju na pojedina tela sistema, *slika 9b*.

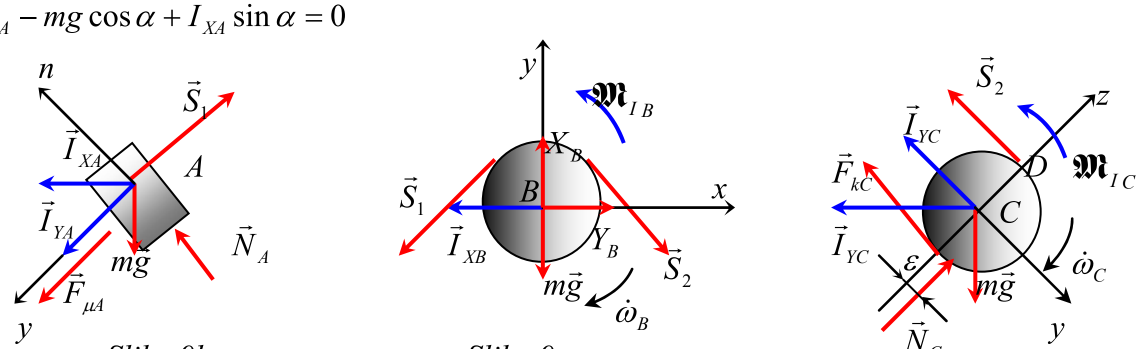
Pošzo se zadatkom traži da se koristite relacije principa dinamičke ravnoteže., to koristimo D'Alamber-ov princip „ravnoteže" sila koje dejstvuju na teret A ima oblik i nma osnovu toga pišemo sledeću vektorsku jednačinu:

$$\vec{I}_{XA}+\vec{I}_{YA}+\vec{S}_1+m\vec{g}+\vec{N}_A+\vec{F}_{\mu A}=0$$

koja projektovanjem na ose y i n daje dve skalarne jednačine oblika:

$$mg\sin\alpha-S_1+F_{\mu A}+I_{YA}+I_{XA}\cos\alpha=0$$

$$N_A-mg\cos\alpha+I_{XA}\sin\alpha=0$$



Slika 9b. *Slika 9c.* *Slika 9d.*

Iz druge od prethodnih jednaćina dobijamo:

$$N_A=mg\cos\alpha-m\ddot{x}\sin\alpha$$

a pošto je:

$$F_{\mu A}=\mu N_A=\mu m\left(g\cos\alpha-\ddot{x}\sin\alpha\right)$$

iz prve jednačine gornjeg sistema dobijamo:

$$mg\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-S_1+m\left(\cos\alpha-\mu\sin\alpha\right)\ddot{x}+2m\ddot{y}=0$$

Postavljanjem momentne jednačine za osu obrtanja dobija se:

$$S_1r-S_2r+\mathfrak{M}_{IB}=0$$

Disk B vrši ravno kretanje, pri čemu središte B ima ubrzanje $\ddot{x}$, dok je ugaona brzina ravnog kretanja

$$\omega_B=\frac{2\dot{y}}{r}$$

(koja podrazumeva da nema proklizavanja između užeta i diska). Kako je moment sila inercije za centar masa diska)

$$\mathfrak{M}_{IB} = J_B \dot{\omega}_B = \frac{1}{2} m r^2 \frac{2\ddot{y}}{r} = m r \ddot{y},$$

to možemo da napišemo:

$$S_1 r - S_2 r + \mathfrak{M}_{IB} = 0 \text{ odnosno}$$

$$S_1 - S_2 + m\ddot{y} = 0$$

Na *slici 9c* prikazani su smerovi ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}_B$ i momenta $\mathfrak{M}_{IB}$ sila inercije za momentnu tačku u centru masa. Postavljanje jednačina ravnoteže sila ostavljeno je za kasnije pošto za sada treba postaviti samo one jednačine iz kojih se mogu odrediti $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$.

Posmatrajmo sada kotur C koji vrši ravno kretanje. Na *slici 9d* prikazani su smerovi ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}_C$ i momenta sila inercije $\mathfrak{M}_{IC}$ za momentnu tačku u središtu diska, kao i ostale sile koje na kotur dejstvuju. Primetimo da je usled postojanja otpora protiv kotrljanja normalna reakcija N_C pomerena za krak ε, kojim se uzima u obzir efekat klizanja pri kotrljanju kotura po strmoj ravni, u smeru kotrljana. Jednačine dinamičke ravnoteže kotura koji se kotrlja su:

$$N_C - mg\cos\alpha + I_{XC}\sin\alpha = 0$$

$$mg\sin\alpha - S_2 - F_{kC} - I_{YC} - I_{XC}\cos\alpha = 0$$

$$S_2 r - F_{kC} r + \mathfrak{M}_{IC} + N_C \varepsilon = 0$$

Iz prve jednačine dinamičke ravnoteže sledi:

$$N_C = mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha$$

Kako je

$$\mathfrak{M}_{IC} = J_C \dot{\omega}_C = \frac{1}{2} m r^2 \frac{\ddot{y}}{r} = \frac{1}{2} m r \ddot{y},$$

gde je

$$\dot{\omega}_C = \frac{\ddot{y}}{r}$$

(iz kinematičke jednačine $\dot{y} = r\omega_C$ koja podrazumeva da nema klizavanja između kotura i prizme, koja diferenciranjem daje $\dot{\omega}_C$), to iz poslednje jednačine sistema sledi:

$$S_2 - F_{kC} + \frac{1}{2} m\ddot{y} + \left(mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha\right)\frac{\varepsilon}{r} = 0$$

druga jednačina se može napisati u obliku:

$$-F_{kC} - S_2 - m\ddot{y} - m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0$$

Sada prektično treba da rešimo sistem od pet jednačina sa pet nepozantih $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, S_1, S_2 i F_{kC} oblika:

$$5\ddot{x} + 3\ddot{y}\cos\alpha = 0$$

$$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - S_1 + m(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\ddot{x} + 2m\ddot{y} = 0$$

$$S_1 - S_2 + m\ddot{y} = 0$$

$$S_2 - F_{kC} + \frac{1}{2} m\ddot{y} + \left(mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha\right)\frac{\varepsilon}{r} = 0$$

$$-F_{kC} - S_2 - m\ddot{y} - m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0.$$

Iz prethodnog sistema diferencijalnih jednačina odredjujemo izraze za ubrzanja prizme i centra kotira:

$$\ddot{x} = \frac{6g\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} + 2\mu\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right]\cos\alpha}{75 - 6\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} - 2\mu\right)\sin\alpha + 3\cos\alpha\right]\cos\alpha} \quad \text{i} \quad \ddot{y} = -\frac{10g\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} + 2\mu\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right]}{75 - 6\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} - 2\mu\right)\sin\alpha + 3\cos\alpha\right]\cos\alpha}$$

Iz prethodnih izraza za ubrzanja, zanemarujući uticaj klizanja $(\varepsilon = 0)$ pri kotrljanju sa klizanjem kotura po strmoj ravni im otpor trenja $(\mu = 0)$ pri klizanju tereta po strmoj ravni dobićem izraze koje smo drugim metodama dobili za dinamiku materijalniog sistema sa idealnim vezama, koji je bio tredmet prethodnog zadataka i dobiti iste izraze kao i u prethodnom zadatku.

Ostale nepoznate unutrašnje sile u uzadima koje se javljaju u sistemu su:

$$S_1 = \frac{\left(55 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad , \quad S_2 = \frac{\left(45 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad F_{kC} = \frac{\left(40 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}$$

za $(\varepsilon = 0)$ i $(\mu = 0)$.

Može se primetiti da je sila kotrljanja $F_{\mu C}$ smatrana nepoznatom silom. Potrebno je to ovde i posebno podvući jer se pri rešavanju zadataka tu vrlo često prave greške. Naime, sila kotrljanja kotura po strmoj ravni se javlja kao sila između kotura C i prizme mora postojati da bi se moglo ostvariti kotrljanje po prizmi. Sila kotrljanja F_{kC} ne sme se, pri kotrljanu bez klizanja, dovoditi u vezu sa koeficijentom trenja μ_C između tela, tj.

$$F_{\mu C} \neq \mu_C N_C$$

i uvek je $F_{\mu C} < \mu_C N_C$. Međutim, ako sila trenja dostigne najveću moguću vrednost $F_{\mu C} = \mu N$ onda nastaj eproklizavanje pri kotrljanju (dodirna tačka između kotura i prizme nije trenutni pol). Sila trenja zavisi, što pokazuje rezultat) od veličina mg i α. Može se odrediti minimalni koeficijent trenja da pri datim uslovima (date sile koje dejstvuju na sistem) ne dođe do proklizavanja. Izračunajmo u ovom primeru $\mu_{C\min} = \mu_0$ u slučaju kad se zanemare otpor kotrljanja i trenje između tereta A i prizme. Iz jednačine $N_C = mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha$ se dobija $N_{C'}$,

$$N_{C'} = \frac{\left(81 - 24\cos^2\alpha\right)mg\cos\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}$$

a iz uslova $F_{\mu C} = \mu_0 N_{C'}$, sledi

$$\mu_{C\min} = \mu_0 = \frac{40 - 120\cos^2\alpha}{81 - 24\cos^2\alpha}tg\alpha \,.$$

Ako je $\mu_C > \mu_0$ kotrljanje je bez klizanja.

Iz gornje analize u vezi sile kotrljanja i sile trenja između tela pri njihovom međusobnom relativnom kotrljanju bez klizanja (bez proklizavanja), sila kotrljanja na dodirnoj površi je manja od granične (maksimalne) sile trenja koja iznosi μN i pri rešavanju zadataka silu trenja F_μ treba smatrati nepoznatom silom. Naravno, ako se to traži, mogu se iz jednačine $F_\mu = \mu N$ odrediti granične vrednosti od kojih sile F_μ i N zavise, uključujući i koeficijent trenja klizanja μ ,pa da do proklizavanja ne dođe.

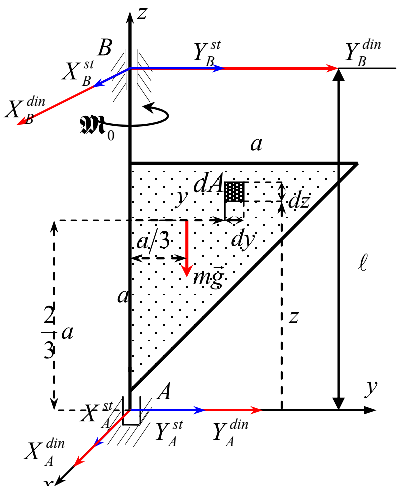
Sile u ležištu B određuju se iz uslova ravnoteže sila koje dejstvuju na disk B, uključujući i inercione sile:

$$X_B - I_{XB} - S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha = 0$$
$$Y_B - S_1\sin\alpha - S_2\sin\alpha - mg = 0$$

kako je $I_{XB} = m\ddot{x}$. To za slučaj $(\varepsilon = 0)$ i $(\mu = 0)$ imamo otpore ležišta B :

$$X_B = \frac{\left(10 - 6\cos\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad Y_B = \frac{175 - 6\left(3 + 4\sin^2\alpha\right)mg\cos^2\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}\,.$$

Zadatak 3. Homogena jednakokraka pravouglotrougaona tanka pločica, mase m, katete a, obrće se. pod dejstvom sprega konstantnog untenziteta $\mathfrak{M}_0$, oko vertikalne ose z, za koju je spojena jednom katetom. Ležišta nepokretno (sferno) A i pokretno (cilindrično) B su na rastojanju ℓ. Ako je maksimalna sila koju ležište B može preneti S_0, odrediti koliko vremena od pokretanja iz mirovanja može dejstvovati moment $\mathfrak{M}_0$, pa da sila u ležištu B ne pređe polovinu maksimalne sile S_0. Odrediti i silu u ležištu A.



Slika 3.

Rešenje:

Zadatak možemo rešavati na dva načina. Jedan je koristeći klasičan pristup, pomoću principa dinamičke tavnoteže, za taj pristup je potrebno odrediti aktivne sile i sile inercije i naznačiti sile otpora oslonaca i pstaviti pest uslova ravnoteže prostornog sistema sila, ili uslov da je glavni vektor svih sila jednak nuli i zbir momenata svih sila da je jednak nuli. Projektovanjem tih dveju vektorskih jednačina dobijamo šest skalarnih iz kojih je lako odrediti jednačinu obrtanja pločice oko ose i per komponenata otpora veza (ležišta) pločice.

Statičke komponente reakcije ležišta A i B, izražene u pokretnom koordinatnom sistemu x, y, z koji se obrće zajedno sa telom, dobijaju se iz jednačina ravnoteže sistema sila koje dejstvuju na pločicu koja miruje. Na osnovu toga pišemo:

$$\sum_{k=1}^{K} \vec{F}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{K} \left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] = 0$$

iz koji sledi šest skalarnih jednačina:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = 0 \qquad X_A^{st} + X_B^{st} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} Y_k = 0 \qquad Y_A^{st} + Y_B^{st} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} Z_k = 0 \qquad Z_A^{st} - mg = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Axk} = 0 \qquad -Y_B^{st}\ell - mg\frac{a}{3} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Ayk} \equiv 0 \qquad X_B^{st}\ell = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Azk} \equiv 0$$

, odakle sledi:

$$X_B^{st} = X_A^{st} = 0,\; Y_B^{st} = -\frac{mga}{3\ell},\; Y_A^{st} = \frac{mga}{3\ell},\; Z_A^{st} = mg\,.$$

Da bi odredili dinamičke reakcije odredimo prvo ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje ploče. Za to koristimo teoremu o promeni momenta impulsa kretanja za rotaciju materijalne pločice oko ose, koja daje relaciju da je izvod momenta količine kretanja (izvod zamaha) za osu rotacije po vremenu jednak momentu sila koje dejstvuju na pločicu, za osu rotacije:

$$\frac{dL_{Az}}{dt} = \mathfrak{M}_{Az}$$

te na osnovu te teoreme i toga da je tekstom zadatka zadato, da se pločica obrće pod dejstvom sprega konstantnog intenziteta $\mathfrak{M}_0$ možemo da napišemo jednačinu rotacije:

$$J_z\dot{\omega} = \mathfrak{M}_0$$

gde je J_z aksijalni moment inercije mase pločice za osu z rotacije pločice. Aksijalni moment inercije ,ase tela za neku osu je zbir elementarnih aksijalnih momenata inercije mase $dJ_{Az} = dJ_z = y^2dm = \rho y^2dA$ (proizvod kvadrata rastojanja y^2 elementarne mase od ose i te mase dm). Sada taj zbir elementarnih aksijalnih momenata inercije masa odredimo direktno integraljenjem po celoj zapremini pločice, prelazeći na integral po površini:

$$J_z = \int_M dJ_z = \int_M y^2dm = \rho\iint_A y^2dA = \rho\int_o^a dz\int_0^z y^2dy = \rho\int_0^a \frac{1}{3}z^3dz$$

$$J_z = \frac{1}{12}\rho a^4 = \frac{1}{6}ma^2,$$

gde je $\rho = \frac{m}{A} = \frac{2m}{a^2}$, pri čemu smo zanemarili debljinu ploče i zato se cela masa ploče nalazi u yz pokretnoj ravni.

Lako je sada odrediti ugaono ubrzanje ortanja pločice oko ose:

$$\dot{\omega} = \frac{\mathfrak{M}_0}{J_z} = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2} = const\,,$$

dok je ugaona brzina njenog obrtanja:

$$\omega = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t + \omega_0 = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t$$

jer je za $t = 0$, $\omega = \omega_0 = 0$. Da bi odredili dinamičke reakcije (kinetičke komponente otpora oslonaca) potrebno je da odredimo i centrifugalne momente masa J_{xz}, J_{xy} i J_{yz}. Odmah se vidi, da pošto je yz ravan u kojoj leži pločica zanemarljive debljine, te je $x \approx 0$, a osa x na nju upravna da je $J_{xz} = 0$, kao i $J_{xy} = 0$ (to sledi iz uslova da je masa u ravni yz, tj. $x = 0$ za sve tačke). Izračunajmo J_{yz} direktnim integraljenjem- sabiranjem centrifugalnih :,omenata elementarnih masa $dJ_{yz} = yzdm = \rho yzdA$:

$$J_{yz} = \rho\iint_A yzdA = \rho\int_o^a zdz\int_0^z ydy = \frac{1}{2}\rho\int_0^a z^3dz = \frac{1}{4}ma^2.$$

Na osnovu vektorekih relacija principa dinamičke ravnoteže možemo da napišemo:

$$\sum_{k=1}^{K}\vec{F}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{K}\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] = 0$$

pri čemu smo sada uzeli u obzir samo sile inercije i iz koji sledi šest skalarnih jednačina:

$$\sum_{k=1}^{K}X_k = 0 \qquad X_A^{din} + X_B^{din} + I_{Xin} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K}Y_k = 0 \qquad Y_A^{din} + Y_B^{din} + I_{Yin} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K}Z_k = 0 \qquad Z_A^{din} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Axk} = 0 \qquad -Y_B^{din}\cdot\ell - M_{Axin} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Ayk} = 0 \qquad X_A^{din}\ell - M_{Ayin} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Azk} \equiv 0 \qquad M_{Azin} + M_{Ax} = 0$$

Da bi smo odredili sile inercije i momente sila inercije pločice, koje dejstvuju na pločicu koja rotira oko nepokretne ose udaonom brzinom ω i ugaonim ubrzanjnem $\dot{\omega}$ izaberemo element mase pločice $dm = \rho dA$ i ta materijalna tačka elementarne mase na rastojanju y od ose z i rastojanju z od ose y pri rotaciji pločice dobija normalnu komponentu ubrzanja $a_N = -y\omega^2$, koja leži u ravni pločice paralelno y-osi i tangencijalnu komponentu $a_T = y\dot{\omega}$ ubrzanja upravno na pločicu u pravcu ose x. Sada je lako odrediti silu inercije u pravuma tih osa:

$$I_{Xin} = -\iint_A a_T dm = -\dot{\omega}\iint_A y dm = -\dot{\omega} y_C m = -\dot{\omega}\frac{2}{3}am$$

$$I_{Yin} = -\iint_A a_N dm = -\omega^2\iint_A y dm = -\omega^2 y_C m = -m\omega^2\frac{2}{3}a$$

$$M_{Axin} = -\iint_A z a_N dm = -\omega^2\iint_A zy dm = -\omega^2 J_{zy} = -\omega^2\frac{1}{4}ma^2$$

$$M_{Ayin} = -\iint_A z a_T dm = -\dot{\omega}\iint_A zy dm = -\dot{\omega} J_{yz} = -\dot{\omega}\frac{1}{4}ma^2$$

$$M_{Azin} = -\iint_A y a_T dm = -\dot{\omega}\iint_A y^2 dm = -\dot{\omega} J_z = -\dot{\omega}\frac{1}{6}ma^2$$

Sada prethodne jednačine dinamilke ravnoteže ,ožemo napisati u sledećem obliku;

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = 0 \qquad X_A^{din} + X_B^{din} - \dot{\omega}\frac{2}{3}am = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} Y_k = 0 \qquad Y_A^{din} + Y_B^{din} - m\omega^2\frac{2}{3}a = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} Z_k = 0 \qquad Z_A^{din} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Axk} = 0 \qquad -Y_B^{din}\cdot\ell - \omega^2\frac{1}{4}ma^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Ayk} = 0 \qquad X_A^{din}\ell - \dot{\omega}\frac{1}{4}ma^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} M_{Azk} \equiv 0 \qquad -\dot{\omega}\frac{1}{6}ma^2 + \mathfrak{M}_0 = 0$$

Iz poslednje jednaline prethodnog sistema lako je odrediti nepoznato ugaono ubrzanje ortanja pločice oko ose:

$$\dot{\omega} = \frac{\mathfrak{M}_0}{J_z} = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2} = const\,,$$

dok je ugaona brzina njenog obrtanja:

$$\omega = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t + \omega_0 = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t$$

a to smo dobili i iz teoreme o promeni impulsa kretanja pločice. Sada unošenjem u prvih pet jednačina prethodnog sistema jednačina dinamičke ravnoteže dobijenih izraza za brzine i ubrzanja one postaju:

$$X_A^{din} + X_B^{din} + m\frac{a}{3}\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2} = 0$$

$$Y_A^{din} + Y_B^{din} + m\frac{a}{3}\left(\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t\right)^2 = 0$$

$$-Y_B^{din}\cdot a - \frac{1}{4}ma^2\left(\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t\right)^2 = 0$$

$$X_B^{din}\cdot a + \frac{1}{4}ma^2\,\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2} = 0\,,$$

Sada rešavanjem prethodnog sistema jednačina lako je odrediti kinetičke komponente otpora veza (oslonaca) u sledećem obliku:

$$X_A^{din} = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}_0}{a}\,,$$

$$Y_A^{din} = -3\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2$$

$$X_B^{din} = -\frac{3\mathfrak{M}_0}{2a}$$

$$Y_A^{din} = -9\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2\,.$$

Ukupne – rezultujuće komponente reakcija u ležištima, koje obuhvataju i statičke i kinetilke komponente, su:

$$X_A = X_A^{din} + X_A^{st} = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}_0}{a}$$

$$Y_A = Y_A^{din} + Y_A^{st} = \frac{1}{3}mg - 3\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2$$

$$X_B = X_B^{din} + X_B^{st} = -\frac{3\mathfrak{M}_0}{2a}$$

$$Y_A = Y_A^{din} + Y_A^{st} = -\frac{1}{3}mg - 9\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2$$

$$Z_A = Z_A^{st} = mg\,.$$

Sila u ležištu B, F_B je:

$$F_B = \sqrt{X_B + Y_B} = \left[\frac{9}{4}\frac{\mathfrak{M}_0^2}{a^2} + \frac{1}{9}\left(mg + 27\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2\right)^2\right]^{1/2}$$

i , prema uslovima zadatka, treba da je $F_B \le \frac{S_0}{2}$, odakle dobijamo sledeću relaciju veze kinetičkih parametara dinamike rotacionog kretanja pločice oko nepokretne ose:

$$\frac{9}{4}\frac{\mathfrak{M}_0^2}{a^2} + \frac{1}{9}\left(mg + 27\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^3}t^2\right)^2 \le \frac{S_0^2}{4}\,,$$

odakle, zatim odredjujemo traženo vreme:

$$t \le \frac{a}{18}\frac{\sqrt{6m}}{\mathfrak{M}_0}\left(3\sqrt{S_0^2a^2 - 9\mathfrak{M}_0^2} - 2mga\right)^{1/2}.$$

Ako u ovom izrazu stavimo znak jednakosti dobija se trenutak kada ukupna sila u ležištu B dostigne vrednost $\frac{S_0}{2}$:

$$t_{krit} = \frac{a}{18}\frac{\sqrt{6m}}{\mathfrak{M}_0}\left(3\sqrt{S_0^2 a^2 - 9\mathfrak{M}_0^2} - 2mga\right)^{1/2}$$

Drugi način: Do istog rezultata možemo doći i koristeči se devijacionim komponentana vektora momenata masa za pol u nepokretnom ležištu i osu rotacije. Na predavanju smo izveli sledeće izraze za nepoznate otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze):

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G} - \left(\vec{F},\vec{n}\right)\vec{n}$$

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

a kako nema drugih aktivnih sila sem sila težine to se prethodni vektorski izrazi za otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze):
,

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G}$$

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Na predavanju snmo izveli i jednačinu rotacije:

$$J_{On}^{(\vec{n})}\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_n$$

gde je $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$, odnosno φ ugaona (generalisana koordinata) rotacije tela oko ose *orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$, $J_{On}^{(\vec{n})}$ aksijalni moment inercije mase tela koje se obrće oko ose vratila i za osu rotacije, *dok je* $\mathfrak{M}_n$ moment aktivnih sila za osu rotacije. Iz te jednačine rotacione dinamike pločice dobijamo:nepoznato ugaono ubrzanje ortanja pločice oko ose:

$$\dot{\omega} = \frac{\mathfrak{M}_0}{J_z} = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2} = const,$$

Kao i ugaonu brzinu njenog obrtanja:

$$\omega = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t + \omega_0 = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t$$

Kako nam je potrebna sila F_B *u osloncu B to je dovoljno odrediti sledeće:*

* *Devijacioni deo vektora* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$, a kako smo u prethodnom odreditli centrifugalne momente masa pločice i videli da su dva jednaka nuli, a treći $J_{yz} = \frac{1}{4}ma^2$, to je:

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{k})}\right| = \left|D_{Ayz}\right| = J_{yz} = \frac{1}{4}ma^2$$

Vektor rotator je:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0,$$

te je u našem slučaju:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}\vec{i} + \left(\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t\right)^2\vec{j}$$

Pa sledi da je:

$$\overline{F}_B = \frac{ma^2}{4\ell}\left[\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}\vec{i} + \left(\frac{6\mathfrak{M}_0}{ma^2}t\right)^2\vec{j}\right] + \frac{a}{3\ell}mg\vec{j}$$

$$X_B = \frac{3\mathfrak{M}_0}{2\ell} \qquad Y_A = \frac{a}{3\ell}mg + 9\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^2\ell}t^2$$

Intenzitet sile otpora veze u osloncu je:

$$F_B = \sqrt{X_B + Y_B} = \sqrt{\left[\frac{9}{4}\frac{\mathfrak{M}_0^2}{\ell^2} + \frac{1}{9}\left(mg\frac{a}{\ell} + 27\frac{\mathfrak{M}_0^2}{ma^2\ell}t^2\right)^2\right]}$$

A što je isti izraz koji smo dobili u prethodnom pristupu tom zadatku za $\ell = a$.

Zadatak 4. Homogeni kružni cilindar mase m, poluprečnika r i visine $2l$ obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose Oz, koja prolazi kroz njegovo središte. Centar cilindra leži na sredini rastojanja $OB = 2h$, kako je na *slici 4* prikazano. Naći dinamičke pritiske ležišta u tačkama O i B.

Rešenje:

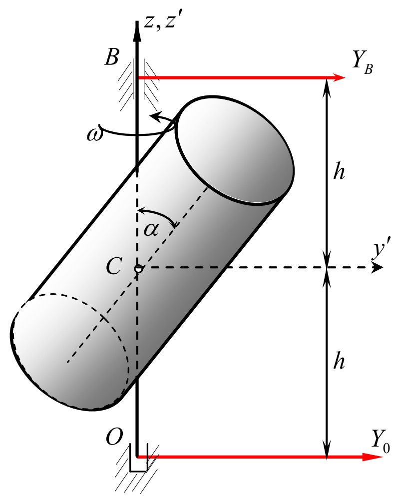
Pošto nema ugaonog ubrzanja, a i stoga što je raspored masa simetričan u odnosu na ravan Oyz sile u ležištima biće raspoređene u ravni Oyz. Na osnovu vektorekih relacija principa dinamičke ravnoteže možemo da napišemo:

$$\sum_{k=1}^{K}\vec{F}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{K}\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] = 0$$

Jednačine dinamičke ravnoteže sada daju:

$$Y_0 + Y_B = 0$$

$$-Y_B 2h - J_{yz}\omega^2 = 0$$



Slika 4.

odakle su reakcije:

$$Y_0 = -Y_B,$$

$$Y_B = -\frac{J_{yz}\omega^2}{2h}$$

Za izračunavanje centrifugalnog momenta mase J_{yz} poslužimo se ranije izvedenim izrazima za centrifugalni moment mase cilindra. Ako primenimo Štajner-ovu teoremu pa pređemo sa centralnih osa $y'z'$ na ose yz imaćemo:

$$J_{yz} = J_{y'z'} + m y_c z_c = J_{y'z'} = \frac{m}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{h^2}{3}\right)\sin 2\alpha \,,$$

pa nalazimo:

$$Y_B = \frac{m\omega^2 \sin 2\alpha}{4h}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right) = -Y_0 \,.$$

Odakle možemo zaključiti i da sile reakcije obrazuju spreg sila, koji je devijacioni spreg..

Drugi način: Do istog rezultata možemo doći i koristeči se devijacionim komponentana vektora momenata masa za pol u nepokretnom ležištu i osu rotacije. Na predavanju smo izveli sledeće izraze za nepoznate otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze):

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G} - \left(\vec{F}, \vec{n}\right)\vec{n}$$

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P, \vec{F}\right], \vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C, \vec{G}\right], \vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F, \vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P, \vec{F}\right], \vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C, \vec{G}\right], \vec{n}\right]\right]$$

a kako nema drugih aktivnih sila sem sila težine, a težište tela je na osi rotacuihe, to se prethodni vektorski izrazi za kinetičke otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze) svodi na devijacioni spreg:

,
$$\vec{F}_{AN} = -\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

Kako nam je potrebna sila F_B u osloncu B to je dovoljno odrediti sledeće:

* *Devijacioni deo vektora* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$, a kako smo u prethodnom odreditli centrifugalne momente masa pločice i videli da su dva jednaka nuli, a treći $J_{yz} = \frac{m}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{h^2}{3}\right)\sin 2\alpha$, to je:

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| = \left|\vec{\mathfrak{D}}_A^{(\vec{k})}\right| = \left|D_{Ayz}\right| = J_{yz} = \frac{m}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{h^2}{3}\right)\sin 2\alpha$$

Vektor rotator je:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0 \,,$$

te je u našem slučaju:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \omega^2\vec{w} = \omega^2\vec{j}$$

Pa sledi da je:

$$F_B = \omega^2 \frac{m}{4h}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{h^2}{3}\right)\sin 2\alpha = -F_A$$

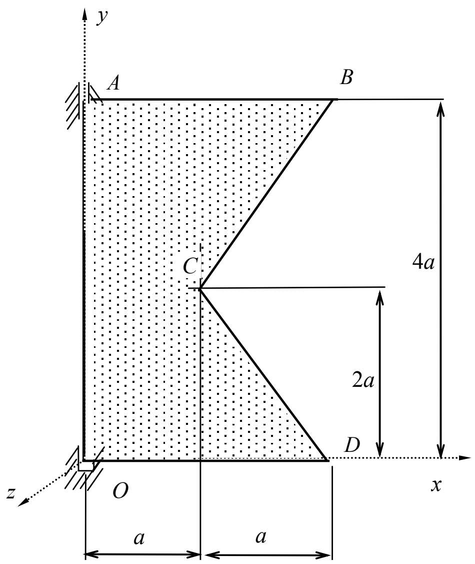
Zadatak 5. Materijalna pločica $OABCD$, oblika i dimenzija kao na *slici 5*, mase m, obrće se oko ose OE konstantnom ugaonom brzinom ω. Odrediti dinamičke pritiske u ležišima O i A.

Rešenje:

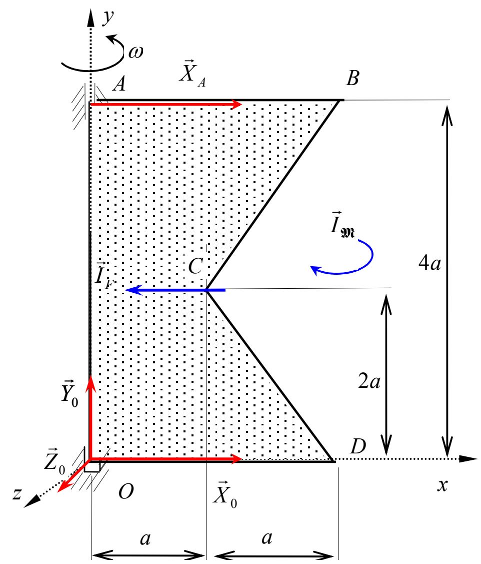
Zadatak se rešava na sličan način kao i u prethodna dva, samo je potrebno odrediti odgovarajuće aksijalne momente inercije masa i centrifuga momente masa.

Izračunajmo površinu ove pločice direktno integraljenjem: $A = a4a + \int_a^{2a}\left(\int_0^{y_1} dy\right)dx + \int_a^{2a}\left(\int_{y_2}^{4a} dy\right)dx = 6a^2$, pri čemu smo vodili računa da je prava $\overline{CB}$ jednačine $y_2 = 2x$ i prava $\overline{CD}$ jednačine $y_1 = -2x + 4a$.

Površinska gustina pločice je: $\rho'' = \dfrac{m}{A} = \dfrac{1}{6}\dfrac{m}{a^2}$.



Slika 5a.



Slika 5b.

Izračunajmo sile inercije i momente sila inercije za svaki deo pločice koju podelimo na tri dela: pravougaonu pločicu stranica a i $4a$, i dve pravouglo trougaone pločice stranica a i $2a$, direktno integraleći za centrifugalne momente masa, i to za svaki deo pločice posebno, tako da su sile inercije:

$$I_{F1} = \omega^2 \rho'' \left(\int_0^a \left(\int_0^{4a} dy\right)\cdot x dx\right) = 2\omega^2 \rho'' a^3 = \frac{1}{3} m\omega^2 a,$$

$$I_{F2} = \omega^2 \rho'' \left(\int_a^{2a} \left(\int_0^{y_1} dy\right)\cdot x dx\right) = \frac{4}{3}\omega^2 \rho'' a^3 = \frac{4}{18} m\omega^2 a,$$

$$I_{F3} = \omega^2 \rho'' \left(\int_a^{2a} \left(\int_{y_2}^{4a} dy\right)\cdot x dx\right) = \frac{4}{3}\omega^2 \rho'' a^3 = \frac{4}{18} m\omega^2 a,$$

i momenti sila inercije pločica za osu rotacije:

$$I_{\mathfrak{M}1} = \omega^2 \rho'' \left(\int_0^a \left(\int_0^{4a} y dy\right)\cdot x dx\right) = 4\omega^2 \rho'' a^4 = \frac{2}{3} m\omega^2 a^2,$$

$$I_{\mathfrak{M}2} = \omega^2 \rho'' \left(\int_a^{2a} \left(\int_0^{y_1} y dy\right)\cdot x dx\right) = \frac{5}{6}\omega^2 \rho'' a^4 = \frac{5}{36} m\omega^2 a^2,$$

$$I_{\mathfrak{M}3} = \omega^2 \rho'' \left(\int_a^{2a} \left(\int_{y_2}^{3a} y dy\right)\cdot x dx\right) = \frac{9}{2}\omega^2 \rho'' a^4 = \frac{3}{4} m\omega^2 a^2.$$

Ukupna sila inercije cele mase pločice je:

$$I_F = I_{F1} + I_{F2} + I_{F3} = \frac{7}{9} m\omega^2 a \ ,$$

a ukupni inercioni moment cele mase pločice je:

$$I_{\mathfrak{M}} = I_{\mathfrak{M}1} + I_{\mathfrak{M}2} + I_{\mathfrak{M}3} = \frac{14}{9} m\omega^2 a^2$$

Sada su jednačine dinamičke ravnoteže:

$$X_A + X_o = I_F = \frac{7}{9} m\omega^2 a$$

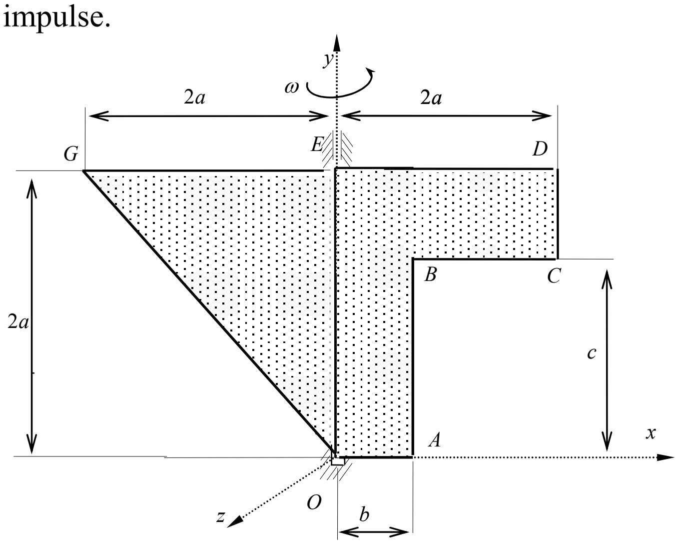
$$4aX_A = I_{\mathfrak{M}} = \frac{14}{9} m\omega^2 a$$

Pa su traženi dinamički pritisci u ležištima:

$$X_A = \frac{7}{18} m\omega^2 a$$

$$X_o = \frac{7}{18} m\omega^2 a$$

Zadatak 6. Materijalna pločica $OABCDEGO$, oblika i dimenzija kao na *slici 6*, mase m, obrće se oko ose OE konstantnom ugaonom brzinom ω. Odrediti veličine b i c tako da ležišta u O i E ne trpe dinamičke pritiske. Za tako sračunate geometrijske veličine b i c odrediti kinetičku energiju pločice. U kojoj tački pločice treba da dejstvuje trenutba sila, krtkovremenog trajanja i velikog intenziteta te da ležišta ne trpe udarne impulse.



Slika 6.

Rešenje:

Da ležišta ne bi trpila dinamičke pritiske sile inercije i momenti sila inercije za osu rotacije pločice, usled obrtanja sa leve i desne strane vratila oko koga se pločica obrće moraju da budu jednaki,. Zato prvo odredimo sile inercije i momente sila inercije delova mase pločice levo i desno od ose, za tu osu i izjednačimo ih i dobićemo tražene geometrijske veličine b i c.

Sila inercije i momenti sila inercije za osu rotacije pločice usled obrtanja konstantnom ugaonom brzinom za deo pločice sa jedne (leve na slicio) strane vratila su:

$$I_{F1} = \omega^2 \rho" \int_0^b \left(\int_0^{2a} dy \right) \cdot x dx + \omega^2 \rho" \int_b^{2a} \left(\int_c^{2a} dy \right) \cdot x dx = \omega^2 \rho" \left(4a^3 - 2ca^2 + \frac{1}{2} cb^2 \right)$$

$$I_{\mathfrak{M}1} = \omega^2 \rho" \int_0^b \left(\int_0^{2a} y dy \right) \cdot x dx + \omega^2 \rho" \int_b^{2a} \left(\int_c^{2a} y dy \right) \cdot x dx = \omega^2 \rho" \left(4a^4 - c^2 a^2 + \frac{1}{4} c^2 b^2 \right)$$

dok sa druge (desne ne slici) strane imamo:

Prava $\overline{OG}$ je jednačine $y = x$, pa imamo:

$$I_{F2} = \omega^2 \rho" \int_0^{2a} \left(\int_y^{2a} dy \right) \cdot x dx = \omega^2 \rho" \frac{4}{3} a^3$$

$$I_{\mathfrak{M}2} = \omega^2 \rho" \int_0^{2a} \left(\int_y^{2a} y dy \right) \cdot x dx = \omega^2 \rho" 2a^4$$

Kako treba da budu ispunjeni uslovi:

$$I_{F1} = I_{F2}, \quad I_{\mathfrak{M}1} = I_{\mathfrak{M}2}$$

to iz sistema jednačina:

$$4a^3 - 2ca^2 + \frac{1}{2} cb^2 = \frac{4}{3} a^3$$

$$4a^4 - c^2 a^2 + \frac{1}{4} c^2 b^2 = 2a^4$$

slede rešenja: $c = \frac{3}{2} a$ i $b = \frac{2}{3} a$

Kinetička energija pločice je:

$$E_k \frac{1}{2} \omega^2 \rho" \left(\int_0^{2a/3} \left(\int_0^{2a} dy \right) \cdot x^2 dx + \int_{2a/3}^{2a} \left(\int_{3a/2}^{2a} dy \right) \cdot x^2 dx + \int_0^{2a} \left(\int_y^{2a} dy \right) \cdot x^2 dx \right) = \omega^2 \frac{1}{8} \frac{m}{a^2} \frac{76}{27} a^4 = \frac{19}{54} m \omega^2 a^2$$

gde je površinska gustina pločice: $\rho" = \frac{m}{A} = \frac{1}{4} \frac{m}{a^2}$.

Zadatak 7. Materijalna pločica ADC, mase $5m$, ograničena pravim dužima AD i DC, i lukom parabole drugog reda AC, čije teme je u tački A, obrće se konstantnom ugaonom brzinom oko nepokretne ose AB. Za osovinu je pomoću lakog štapa kruto vezana materijalna tačka M, mase m, kako je prikazano na *slici 7*. Odrediti položaj materiojalne tačke M pod uslovom da je sistem dinamički uravnotežen. Takođe, odrediti moment količine kretanja za obrtnu osu i kinetičku energiju sistema. Dimenzije pločice su date na *slici 7*.

Rešenje:

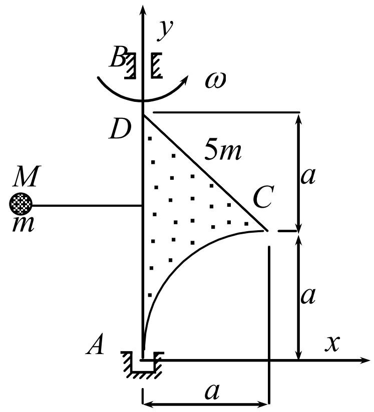
Da bi sistem bio dinamički uravnotzežen i da ležišta ne bi trpila dinamičke pritiske sile inercije i momenti sila inercije pločice sa materijalnom tačkom usled obrtanja sa jedne i sa druge (leve i desne) strane vratila oko koga se pločica obrće moraju da budu jednaki. Zato sračunajmo prvo sile inercije i momenti sila inercije delova sistema sa jedne i sa druge (leve i desne) strane od ose rotacije, i izjednačimo ih, tako da iz tog uslova dobijamo traženi položaj materijalne tačke sa druge strane vratila.

Površina pločice sa desne strane vratila je: $A = \int_0^a \left(\int_{y_1}^{y_2} dy \right) dx = \frac{5}{6} a^2$, gde smo vodili računa da su duž - linija $\overline{AC}$ jednačine $y_1 = \sqrt{ax}$ i duž linija $\overline{CD}$ jednaline $y_2 = -x + 2a$ u koordinatnom sistemu xAy. Površinska gustina plоćice je: $\rho" = \frac{5m}{A} = 6 \frac{m}{a^2}$

Sila inercije i moment sila inercije usled obrtanja konstantnom ugaonom brzinom sa desne strane vratila su:

$$I_{F1} = \omega^2 \rho" \int_0^a \left(\int_{y_1}^{y_2} dy \right) \cdot x dx = \frac{4}{15} \omega^2 \rho" a^3 = \frac{8}{5} m\omega^2 a$$

$$I_{\mathfrak{M}1} = \omega^2 \rho" \int_0^a \left(\int_{y_1}^{y_2} y dy \right) \cdot x dx = \frac{7}{24} \omega^2 \rho" a^3 = \frac{7}{4} m\omega^2 a^2$$



Slika 7.

Sila inercije i moment sila inercije usled obrtanja konstantnom ugaonom brzinom sa leve strane vratila usled obrtanja konstantnom ugaonom brzinom potiču od materijalne tačke mase m pa su:

$$I_{F2} = m\omega^2 x_M$$

$$I_{\mathfrak{M}2} = m\omega^2 x_M y_M$$

Iz uslova da:

$$I_{F1} = I_{F2}$$

$$I_{\mathfrak{M}1} = I_{\mathfrak{M}2}$$

slede koordinate položaja tačke M

$$x_M = \frac{8}{5} a \qquad \text{i} \qquad y_M = \frac{35}{32} a .$$

Momenti količine kretanja delova sistema za obrtnu osu y su:

$$L_1 = \omega \rho" \int_0^a \left(\int_{y_1}^{y_2} dy \right) \cdot x^2 dx = \frac{11}{84} \omega^2 \rho" a^4 = \frac{11}{14} m\omega a^2$$

i $$L_2 = m\omega x_M^2 = \frac{64}{25} m\omega a^2$$

Moment količine kretanja sistema, zamah sistema, za obrtnu osu je:

$$L = L_1 + L_2 = \frac{1171}{350} m\omega a^2$$

Kinetičke energije delova sistema su:

Kinetička energija rotacije pločice:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho" \int_0^a \left(\int_{y_1}^{y_2} dy \right) \cdot x^2 dx = \frac{11}{168} \omega^2 \rho" a^4 = \frac{11}{28} m\omega^2 a^2$$

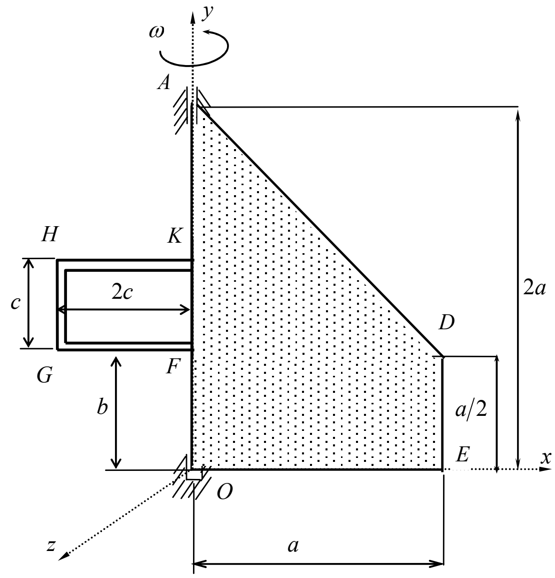
i kinetička energija rotacije materijalne tačke:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \omega^2 m x_M^2 = \frac{32}{25} m\omega^2 a^2$$

Pa je ukupna kinetička energija sistema:

‘ $$E_k = \frac{1171}{700} m\omega^2 a^2$$

Zadatak 8. Tanka, materijalna pločica $OADEO$, oblika i dimenzija kao na *slici 8*, mase m, obrće se oko ose OA konstantnom ugaonom brzinom ω. Za pločicu je čvrsto vezan ugaonik $FGHK$, u tačkama F i K. Ugaonik se sastoji iz tri štapa, jednakih dužina, po c, ukupne mase $m/2$. Štapovi su međusobno spojeni pod pravim uglom, kao i štapovi GF i HK u odnosu na obrtnu osu OA. Odrediti dužinu štapova ($c = ?$) i visinu ($b = ?$) na kojoj treba pričvrstiti ugaonik tako da ležišta u O i A ne trpe dinamičke pritiske. Za tako sračunate vrednosti odrediti kinetičku energiju sistema.



Slika 8.

Rešenje:

Da bi sistem bio dinamički uravnotzežen i da ležišta ne bi trpila dinamičke pritiske sile inercije i momenti sila inercije usled obrtanja konstantnom ugaonom brzinom i sa leve i desne strane vratila oko koga se pločica obrće moraju da budu jednaki, Zato sračunajmo zato prvo sile inercije i momente sila inercije delova sistema levo i desno od ose, zatim ih izjednačimo i dobijamo tražene geometrijske veličine b i c.

Površina pločice je $A = a\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{2}a = \frac{5}{4}a^2$, a njena površinska gustina je: $\rho'' = \frac{m}{A} = \frac{4}{5}\frac{m}{a^2}$

Prava duž $\overline{AD}$ u koordinatnom sistemu xOy je na pravoj koja ima jednačinu $y_2 = -\frac{3}{2}x + 2a$. Direktnin integraljenjem dobijamo odredjujemo izraze za sile inercije i momenti sila inercije delova materijalnog sistema sa desne strane ose oko koje se sistem obrće:

$$I_{F1} = \omega^2\rho''\int_0^a\left(\int_0^{y_2} dy\right)\cdot x dx = \frac{1}{2}\omega^2\rho'' a^3 = \frac{2}{5}m\omega^2 a$$

$$I_{\mathfrak{M}1} = \omega^2\rho''\int_0^a\left(\int_0^{y_2} y dy\right)\cdot x dx = \frac{9}{32}\omega^2\rho'' a^4 = \frac{9}{40}m\omega^2 a^2 .$$

Ukupna dužina štapova u ugaoniku sa leve strane ose je: $L = c + 2c + 2c = 5c$, a linijska gustina materijala ugaonika je: $\rho' = \frac{m}{L} = \frac{1}{10}\frac{m}{c}$. Direktnin integraljenjem izraze za sile inercije i momenti sila inercije delova materijalnog sistema sa leve strane ose:

$$I_{F2} = \omega^2\rho'\int_0^{2c} x dx + \omega^2\rho'\int_0^{2c} x dx + \rho' c\omega^2 2c = 6\omega^2\rho' c^2 = \frac{3}{5}m\omega^2 c$$

$$I_{\mathfrak{M}2} = b\cdot\omega^2\rho' \int_0^{2c} x dx + (b+c)\cdot\omega^2\rho' \int_0^{2c} x dx + \left[b+\frac{c}{2}\right]\cdot\rho' c\omega^2 2c = \omega^2\rho'\cdot c^2(6b+3c) = \frac{1}{10}\omega^2\rho'\cdot c(6b+3c)$$

Iz uslova da:

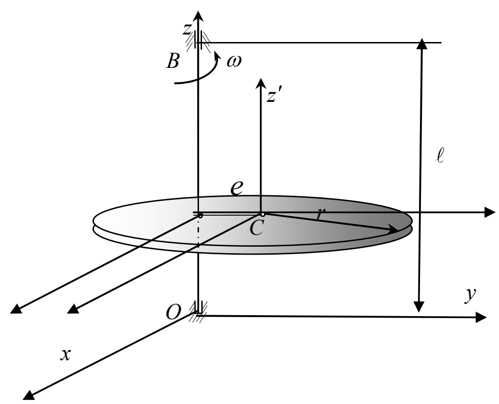
$$I_{F1} = I_{F2}$$

$$I_{\mathfrak{M}1} = I_{\mathfrak{M}2}$$

slede tražene geometrijske veličine:

$$c = \frac{2}{3}a \qquad \text{i} \qquad b = \frac{11}{48}a\,.$$

Zadatak 9. Izračunati glavni moment količine kretanja za obrtnu osu diska , mase m, poluprečnika r, ekscentrično nasađenog na obrtnu osu, oko koje se disk obrće ugaonom brzinom ω. Ravan diska upravna je na obrtnu osu, ekscentričnost diska je jednaka polovini poluprečnika $e = \frac{r}{2}$. Naći kinetičke pritiske na ležišta u tačkama O i B usled rotacije diska..



Slika 9.

Rešenje:

Usmerimo osu z duž obrtne ose. Glavni moment količine kretanja krutog tela za obrtnu osu je $L_z = J_z\omega_z$ gde je J_z moment inercije krutog tela za obrtnu osu da bi smo ga izračunali primenimo Štajner-ovu teoremu.

$$J_z = J_{z'} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2}{4} = \frac{3mr^2}{4},$$

pa je glavni moment količine kretanja diska za obrtnu osu je: $L_z = \frac{3mr^2}{4}\omega_z$.

Da bi smo odredili kinetičke pritiske koristićemo se devijacionim komponentana vektora momenata masa za pol u nepokretnom ležištu i osu rotacije. Na predavanju smo izveli sledeće izraze za nepoznate otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze):

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G} - (\vec{F},\vec{n})\vec{n}$$

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

a kako nema drugih aktivnih sila sem sila težine, a težište tela je na osi rotacuihe, to se prethodni vektorski izrazi za kinetičke otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze) svodi na devijacioni spreg:

,
$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}$$

gde su:

* *Devijacioni deo vektora* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$, za koji je potrebno odreditli centrifugalne momente masa ekscentričnog diska:

$$J_{Ozx} = J_{Cz'x'} + x_C z_C M = 0$$

$$J_{Ozy} = J_{Cz'y'} + z_C y_C M = e\frac{\ell}{2}m$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{k})}\right| = \left|D_{Ozx}\vec{i} + D_{Ozy}\vec{j}\right| = \frac{me\ell}{2}$$

Vektor rotator je:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0\,,$$

te je u našem slučaju:

$$\vec{\mathfrak{R}} = \omega^2\vec{w} = \omega^2\vec{j}$$

Vektor momenta mase prvog reda za ekscentrično nasadjen disk je:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{k},\vec{r}_C]m = m[\vec{k},e\vec{j}] = -me\vec{i}$$

a njegov rotator:

$$\vec{\mathfrak{R}}_1 = \omega^2\vec{u} = \omega^2\vec{i}$$

Pa sledi da su kinetiki pritisci:

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}} = me\omega^2\vec{i} - \frac{me}{2}\omega^2\vec{j}$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\ell}\frac{me\ell}{2}\sqrt{2}\omega^2\vec{j} = \frac{me}{2}\omega^2\vec{j}$$