X vežba

Dinamika sistema tela

- Primena principa rada, Lagrange-ovg principa, principa virtualnih pomeranja, D'Alamber-ov princip.
- Vektori momenata masa za pol i osu i momenti inercije mase tela
- Teoreme promeni kinetičke energije sistema
- Lagrange-ove jednačine druge vrste

Pri rešavanju prvih nekoliko zadataka koristićemo iskaz Lagrange-ovog principa mogućih ili virtualnih pomeranja:

U slučaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila za virtualna pomeranja koja dopuštaju veze koje dejstvuju na materijalne tačke sistema, ne može biti pozitivan.

Za slučaj idealnih obostrano zadržavajućih veza taj rad je jednak nuli,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\delta\mathbf{A}_i+\sum_{k=1}^{N}\delta\mathbf{A}_{uki}\right)=0$$

jer je tada rad otpora idealnih veza jednak nuli.

U slučaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka, koje su podvrgnute dejstvu idealnih obostrano zadržavajućih veza, zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila za virtualna pomeranja koja dopuštaju veze koje dejstvuju na materijalne tačke sistema je jednak nuli.

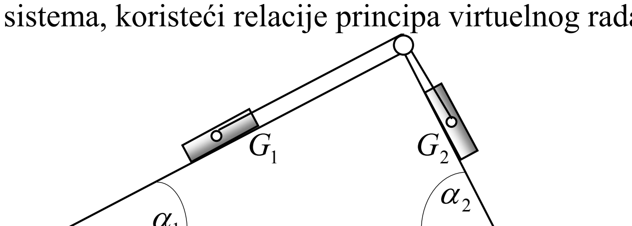
Broj stepeni slobode kretanja nekog materijalnog sistema jednak je broju potrebnih uslova za ravnotežu tog sistema.

U broj tih uslova ubrajaju se i uslovi za sprečavanje pomeranja i obrtanja materijalnog sistema, ili nekih njegovih delova.

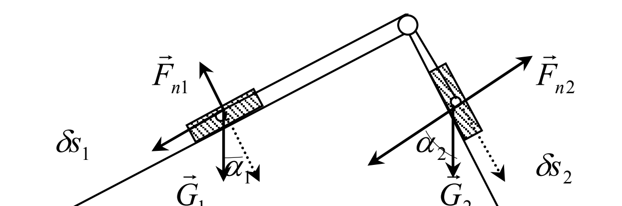
Kako su sile težine aktivne sile, odnosno spoljašnje sile koje dejstvuju na materijalni sistem, a i kako se u tehničkoj praksi javljaju najčešće kao opterećenja konstrukcija to se princip virtualnog rada može izraziti u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{A}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{G}_i,\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Zadatak 1. Duž dve glatke strme ravni nagibnih uglova α_1 i α_2 mogu da klize dva tela - tereti težine G_1 i G_2, koja su spojena nerastegljivim lakim užetom prebačenim preko malog kotura, zanemarljive mase, *slika 1a*. Odrediti odnos masa i težina tela - tereta u uslovima mirovanja i u ravnotrežnom položaju materijalnog sistema, koristeći relacije principa virtuelnog rada.



Slika 1a.



Slika 1a.

Rešenje:

Kako tela mogu da klize niz strme ravni, to ih možemo smatrati teškim materijalnim tačkama na koje dejstvuju veze u obliku strmih ravni, te su moguća pomeranja tih materijalnih tačaka (tereta koji se translatorno kreću niz strme ravni) u ravnima, a kako ceo sistem možemo smatrati ''u ravni crteža'', to su ta pomeranja u pravcima trasa tih ravni i označimo ih sa $\delta\vec{s}_1$ i $\delta\vec{s}_1$. Kako je uže nerstegčjivo to sistem ima jedan stepen slobode kretanja jer postoji jedna veza izmedju ovih pomeranja $\delta s_1=-\delta s_2$. Sila u užetu koje spaja materijalne tačke (terete) je unutrašnja sila sistema i javlja se u paru suprotnih dejatava jednog tereta na drugi, tako da su aktivne sile sile težine tereta G_1 i G_2 . Kao sile veze koje dejstvuju na materijalni sistem su sile otpora veza- normalni otpor strmih ravni koje su idealne veze. Kako je rad sile na nekom putu jednak skalarnom prozvodu izmedju vektiora sile i vektora puta, to je rad sila idealnih veza jednak nuli. Sada iz relacije principa vitrualnog rada sila sistema na mogućim putevuma kretanja materijalnih tačaka posmatranog sistema, pišemo da je virtualni rad jednak samo radu aktivnih spoljašnjih sila težine.

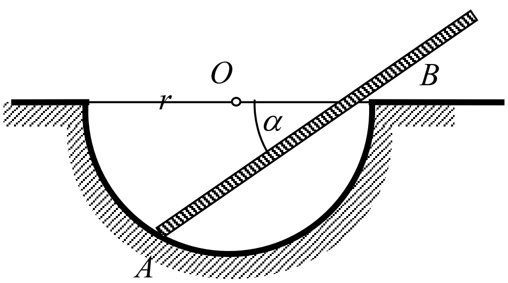
$$\delta A = G_1 \delta s_1 \sin\alpha_1 - G_2 \delta s_2 \sin\alpha_2 = 0$$

jer je rad unutrašnjih sila jednak nuli, kao i rad sila otpora idealnih veza koje su upravne na put kretanja odgovarajućeg materijalnog sistema. Isto tako je uzeto u obzir da je $\delta s_1 = -\delta s_2$, jer je uže nerastegljivo, te u uslovima kada je system u mirovanju i ravnoteži dobijamo sledeći odnos težina tereta:

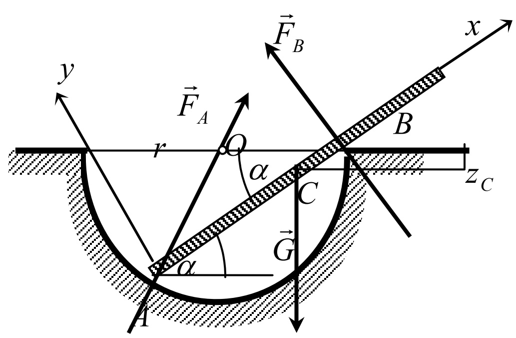
$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1},$$

jer otpori idealnih veza F_{ni}, $i = 1,2$ ne vrše radove, pošto su upravni na moguća pomeranja, asile inercije su jednake nuli.

Zadatak 2. Homogeni prizmatični štap AD, težine G, dužine $2l$, oslanja se krajem A na glatku podlogu oblika polukruga poluprečnika r a u tački B naleže na njen obod, slika 2a. Ceo materijalni sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Odrediti ugao α koji gradi štap sa horizontalnim poluprečnikom OB u stanju mirovanja sistema i u ravnotežnom položaju, kao i otpore veza (oslonaca), koristeći pri tome relacije principa virtualnog rada. (usvoji da je $r = \sqrt{3}\ [m]$, $2l = 4\ [m]$)



Slika 2a.



Slika 2b.

Rešenje:

Materijalni sistem prikazan na slici 2a, sastoji se od jednog materijalnog tela, štapa ćiji položaj u vertikalnoj ravni može biti odredjen jednim uglom α nagiva ose štapa prema horizontu. Prema tome sistem ima jedan stepen slobode kretanja, i za generalisanu koordinatu možemoiabrati taj ugao. Ostala virtualna pomeranja sistema mogu de izraziti pomoću virtualne promene tog ugla $\delta\alpha$.

Za rešavanmje postavljenog zadatak koristimo sledeću teoremu:

Materijalni sistem pod dejstvom sila težina je u ravnoteži ako se ne menja visina njegovog težišta (središta masa) za ma koje virtualno pomeranje koje dopuštaju veze čijem je dejstvu sistem podvrgnut.

Kako sile težine dejstvuju u vertikalnom pravcu, to se relacija iskaza principa virtualnog rada može uprostiti:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^{N} G_i \delta z_i = z_C \sum_{i=1}^{N} G_i = z_C G = 0$$

gde je z_C koordinata središta siistema ili težišta. Ovo je iskaz *Toričelijevog principa* (Evangelista Torricelli, 1608-1647):

Zato je potrebno da odredimo koordinatu središtea sistema - centra inercije posmatranog sistema, ovde materijalnog tela u vidu štapa. Koordinata težišta ptapa je:

$$z_C = r\sin 2\alpha - l\sin\alpha$$

dok je moguće virtualno pomeranje težišta štapa

$$\delta z_C = (2r\cos 2\alpha - l\cos\alpha)\delta\alpha\,,$$

kako nije $\delta\alpha \neq 0$, a kako je za ravnotežu štapa potreban uslov da je virtualno pomeranje središta tela jednako nuli, odnosno $\delta z_C = 0$ to sledi uslov :

$$2\cos^2\alpha - b\cos\alpha = 0\,,$$

gde je $b = \dfrac{l}{2r} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Moguće rešenje je:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{tj}\ \alpha = 60^0\,.$$

Ako sada zamislimo da je štap zaokrenut oko tačke A za ugao $\delta\alpha$, onda na mogućim pomeranjima dobijamo zbir radova:

$$\delta A = (F_B 2r\cos 2\alpha - Gl\cos\alpha)\delta\alpha = 0\,,$$

koji mora biti jednak nuli, odakle sledi da je:.

$$F_B = Gb = \frac{Gl}{2r}\,.$$

Ako zamislimo da je štap zaokrenut oko tačke B za ugao $\delta\alpha$, onda na mogućim pomeranjima dobijamo zbir radova:

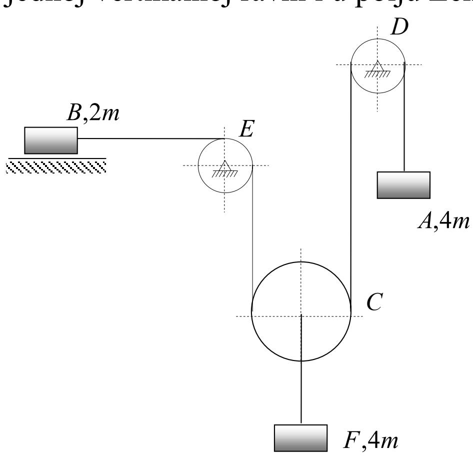
$$\delta A = [(F_A\sin\alpha)2r\cos\alpha - G\cos\alpha(2r\cos\alpha - l)]\delta\alpha = 0\,,$$

koji mora biti jednak nuli, odakle sledi da je:.

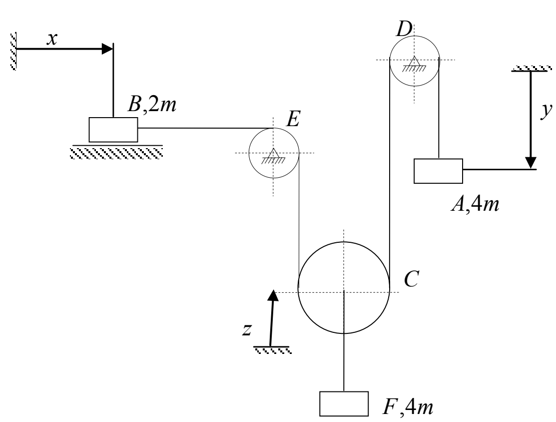
$$F_A = \frac{G(\cos\alpha - b)}{\sin\alpha} = \frac{G\sqrt{3}}{3}\,.$$

Pokazali smo da pomođu relacija principa virtualnog rada možemo odrediti i otpore veza (oslonaca).

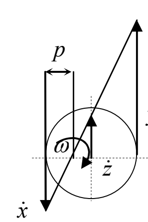
Zadatak 3. Materijalni sistem prikazan na *slici 3a*, sastoji se od lakih koturova C, D i E, zanemarljivih masa, zatim od tereta A mase $4m$, tereta B mase $2m$ i tereta F mase $4m$. Teret B klizi po horizontalnoj ravni koeficijenta trenja μ, i vezan je lakim užetom, koje prebačeno preko koturova i svojim drugim krajem vezano za teret A. Teret F je vezan lakim užetom za centar kotura C. Ceo system se nalazi u jednoj vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže. Odrediti ubrzanja tereta i sile u delovima užeta.



Slika 3a.



Slika 3b.



Slika 3c.

Rešenje:

Kako se ceo sistem nalazi u vertikalnoj ravni, to možemo pretpostaviti da materijalni sistem ne izlazi iz te ravni i da svaki od tereta vrši samo translatorno kretanje te ih možemo smatrati teškim materijalnim tačkama. Analizirajući koliko nam je potrebno koordinata da bi smo odredili položaj svakog tereta u toj ravni zaključujemo da nam je za to potrebno tri koordinate, ali da pomoću dve od njih možemo izraziti treću, kao i ostale potrebne uglove obrtanja koturova, pa uzimajući u obzir da je uže nerastegljivo, kao i kompatibilnost brzina obrtanja koturova možemo naći sve potrebne veze. Zato za a generalisane koordinate biramo translatorna pomeranja tereta A i B, x i y, kao što je to naznačeno na *slici 3b*, a odgovarajuće generalisane brzine su onda $\dot{x}$ i $\dot{y}$

Kotur C vrši ravansko kretanje obrćući se ugaonom brzinom ω oko pokretnog trenutnog pola na rastojanju p od tačke odvajanja užeta od kotura (vidi sliku). Iz trougla brzina, *slika 3c*, za kotur C sledi da je ugaona brzina njegovog obrtanja oko trenutnog pola (ali i oko centra):

$$\omega = \frac{\dot{x}}{p} = \frac{\dot{y}}{2R-p} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R} = \frac{\dot{y}-\dot{x}}{2(R-p)} = \frac{\dot{z}}{R-p}$$

$$\omega = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R} \qquad ,$$

a posle diferenciranja prethodnog izrata dobijamo i ugaono ubrzanje:

$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{2R}.$$

Brzina translatornog pomeranja centra kotura C je:

$$\dot{z} = \frac{\dot{y}-\dot{x}}{2} ,$$

a veza kordinate z i generalizanih koordinata x i y daje :

$$\delta z = \frac{\delta y - \delta x}{2},$$

a posle diferenciranja dobijamo i ubrzanje: $\ddot{z} = \dfrac{\ddot{y}-\ddot{x}}{2}$.

Da bi smo rešili postavljeni zadatak koristićemo prvo Lagrage-pve jednačine druge vrste za generalisane koordinate x i y , da bi smo odredili ubrzanja tereta, i dobili jednačine kretanja tereta, a zatim relacije principa dinamičke ravnoteže da bi smo odredili sile u užadima, mada iz istog je moguće odrediti i ubrzanja.

Izrazimo prvo kinetičku energiju sistema pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = E_{kA} + E_{kB} + E_{kF}$$

odnosno imaćemo:

$$E_k = \frac{1}{2}4m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}4m\left(\frac{\dot{y}-\dot{x}}{2}\right)^2,$$

a posle sređivanja:

$$E_k = \frac{m}{2}\left(3\dot{x}^2 + 5\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\right)$$

Da bi smo odredili generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama, potrebno je odrediti virtualni rad – rad aktivnih sila i sile trenja koje dejstvuju na sistem na virtualnim pomeranjima sistema. Taj rad je:

$$\delta A = \delta A_A + \delta A_B + \delta A_F \quad ,$$

odnosno

$$\delta A = -2\mu mg\delta x - 4mg\frac{\delta y - \delta x}{2} + 4mg\delta y,$$

što posle sređivanja daje:

$$\delta A = Q_x\delta x + Q_y\delta y = 2mg(1-\mu)\delta x + 2mg\delta y \qquad ,$$

gde su Q_x i Q_y generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama.

Lagrange-ove jednačine druge vrste za izabrane generalisane koordinate posmatranog materijalnog sistema su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial y}=Q_y$$

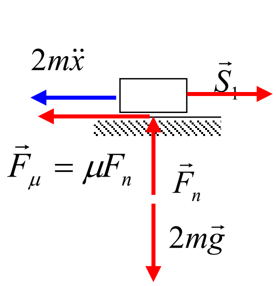
Sada unišenjem u prethodni sistem izraza za kinetičku energiju koju smo izrazili pomoću generalisanih koordinata dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina kretanja sistema:

$$3\ddot{x}-\ddot{y}=2g(1-\mu)$$
$$-\ddot{x}+5\ddot{y}=2g$$

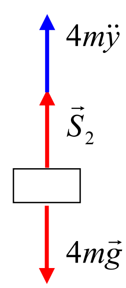
odakle su generalisana ubrzanja tereta dobijamo sledeće izraze:

$$\ddot{x}=\frac{(6-5\mu)}{7}g$$
$$\ddot{y}=\frac{(4-\mu)}{7}g \; .$$

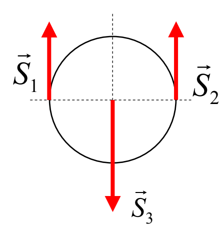
Da bi smo odredili sile u delovima užeta, zamislićemo da smo izveli dekompoziciju materijalnog sistema na podsistenme, a medjusobne uticaje zamenili odgovarajućim silama medudejstva, a ovde je to oslobadjanje od veza, zamišljeno prekidanje užeta i zamena dejstva odgovarajućim silama u delobima ožeta. Na slici su prikazani kao podsistemi tereti i kotur C i prikazane su sile koje dejstvuju na svaki od njih, uključujući i odgovarajuće sile inercije. Koristeći relacije principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema na koje smo dekomponovali materijalni sistema možemo napisati odgovarajuće uslove dinamićke ravnoteže.



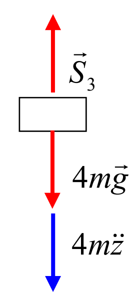
Slika 3d.



Slika 3e.



Slika 3f.



Slika 3g.

$$F_n = 2mg$$
$$S_1 = 2m\ddot{x}+2\mu mg$$

$$4mg = S_2 + 4m\ddot{y}$$

$$S_1 = S_2$$
$$S_3 = S_1 + S_2$$

$$S_3 = 4m\ddot{z} + 4mg$$

Rešavajanjem prethodnog sistema dobijenih jednačina po nepoznatim silama u užadima I vodeći računa o dobijenim izrazima za ubrzanja dobijamo izraze za sile u delovima užadi:

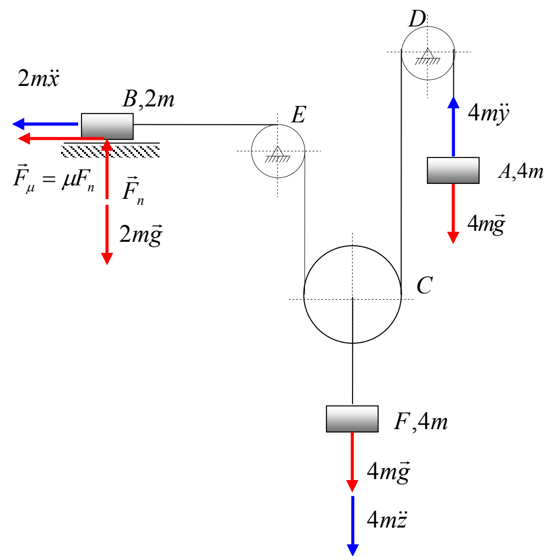
$$S_1=\frac{4(3+\mu)}{7}mg$$
$$S_2=\frac{4(3+\mu)}{7}mg \; .$$
$$S_3=\frac{8(3+\mu)}{7}mg$$

Drugi pristup:

Isti rezultat u rešavanju postavljenog zadatka možemo dobiti i iz principa rada za sistem materijalnih tačaka, u tom smislu odredićemo elementarne radove spoljasnjih sila i sila inercije koje se javljaju u sistemu, a na virtualnim pomeranjima po generalisanim koordinatama, *slika 3f*:

$$(-2\mu mg-2m\ddot{x})\delta x+(-4mg-4m\ddot{z})\delta z+(4mg-4m\ddot{y})\delta y=0$$

koji se posle zamene $\dot{z}=\frac{\dot{y}-\dot{x}}{2}$ i izjednačavanja koeficijenata uz virtualna pomeranja sa nulama svodi na sistem diferencijalnih jednačina kretanja:



Slika 3f.

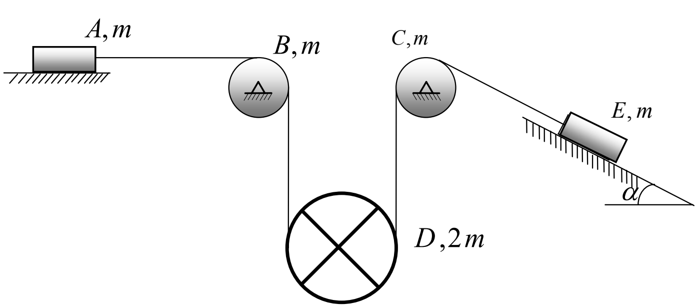
$$\begin{aligned} 3\ddot{x} - \ddot{y} &= 2g(1-\mu) \\ \ddot{x} - 5\ddot{y} &= -2g \end{aligned},$$

odakle su

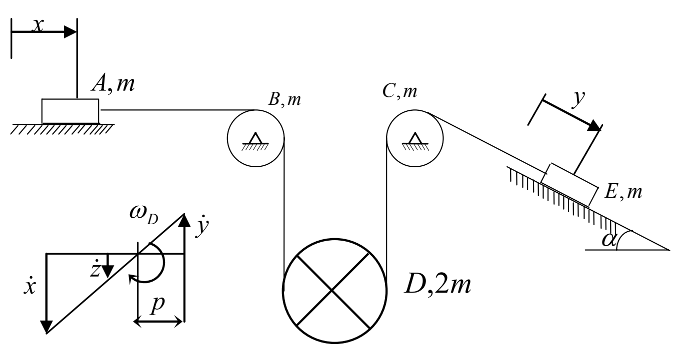
$$\ddot{x} = \frac{(6-5\mu)}{7}g \qquad \ddot{y} = \frac{(4-\mu)}{7}g\,.$$

što su ista rešenja, koja smo već i ranije dobili.

Zadatak 4. Materijalni sistem prikazan na sledećoj slici sastoji se od tereta A i E, koturova B i C, i točka D. Točak D je ukupne mase $2m$, poluprečnika R, a sastoji se od obruča, mase $m_o = m/2$, i četiri žbice u obliku dva homogena štapa masa po $m_s = 3m/4$, dužina po $2R$. Koturove B i C smatrati homogenim diskovima, masa po m, poluprečnika po r. Teret A, mase m, klizi po horizonatalnoj hrapavoj ravni koeficijenta trenja $\mu_1 = 1/12$, a teret E, mase m, klizi po hrapavoj strmoj ravni koefijenta trenja $\mu_1 = \sqrt{3}/12$ i nagibnog ugla $\alpha = 30^0$. Veze među elementima ostvarene su pomoću lake nerastegljive užadi. Ceo sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Odrediti ubrzanja tereta A i E.



Slika 4a.



Slika 4b.

Rešenje:

Ovaj zadatk je sličan prethodnom pa ćemo isti rešavati istim metodama, ali pri tome ćemo imati u vidu razliku, jer su u ovom slučaju koturovi nezanemarljive mase, a sa tim i inercionih svojstava, pa utiču na kinetičku energuiju kojoj se moraju obuhvatiti kinetičke energije rotacija koturova i kao i kinetička energija translacije i rotacije točka.

Zato je potrebno odrediti aksijalne momente inercija masa za centralne ose diskova – koturova kao i točka. Aksijalni momenti inercije masa koturova B i C za ose normalne na ravan koturova kroz tačke središta su:

$$J_B = \frac{1}{2}mR^2, \quad J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

dok je moment inercije mase točka koji predstavlja zbir momenata inercije masa obruča i štapova za centralnu osu:

$$J_D = \frac{m}{2}R^2 + 2\left(\frac{1}{12}\frac{3m}{4}(2R)^2\right) = mR^2.$$

Kako se ceo sistem nalazi u vertikalnoj ravni, to možemo pretpostaviti da materijalni sistem ne izlazi iz te ravni i da svaki od tereta vrši samo translatorno kretanje te ih možemo smatrati teškim materijalnim tačkama. Analizirajući koliko nam je potrebno koordinata da bi smo odredili položaj svakog tereta u toj ravni zaključujemo da nam je za to potrebno tri koordinate, ali da pomoću dve od njih možemo izraziti treću, kao i ostale potrebne uglove obrtanja koturova, pa uzimajući u obzir da je uže nerastegljivo, kao i kompatibilnost brzina obrtanja koturova možemo naći sve potrebne veze. Zato za a generalisane koordinate biramo translatorna pomeranja tereta A i B, x i y, kao što je to naznačeno na *slici 4b*, a odgovarajuće generalisane brzine su onda $\dot{x}$ i $\dot{y}$

Kotur D vrši ravansko kretanje obrćući se ugaonom brzinom ω_D oko pokretnog trenutnog pola na rastojanju p od tačke odvajanja užeta od kotura (vidi sliku). Iz trougla brzina, *slika 4c*, za kotur D sledi da je ugaona brzina njegovog obrtanja oko trenutnog pola (ali i oko centra):

$$\omega_D = \frac{\dot{y}}{p} = \frac{\dot{x}}{2R-p} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2(R-p)} = \frac{\dot{z}}{R-p}$$

$$\omega_D == \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}$$

odnosno posle diferenciranja ugaono ubrzanje

$$\dot{\omega}_D = \frac{\ddot{x}+\ddot{y}}{2R}.$$

Brzina translatornog pomeranja centra točka je:

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2}$$

a veza kordinate z i generalizan koordinata x i y daje :

$$\delta z = \frac{\delta y - \delta x}{2}$$

a posle diferenciranja dobijamo i ubrzanje:

$$\ddot{z} = \frac{\ddot{x}-\ddot{y}}{2}.$$

Koturovi B i C se obrću oko nepomičnih tačaka ugaonim brzinama:

$$\omega_C = \frac{\dot{y}}{R} \qquad \text{i} \qquad \omega_B = \frac{\dot{x}}{R},$$

što posle diferenciranja daje i ugaona ubrzanja:

$$\dot{\omega}_C = \frac{\ddot{y}}{R} \qquad \text{i} \qquad \dot{\omega}_B = \frac{\ddot{x}}{R}.$$

Izrazimo prvo kinetičku energiju sistema pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = E_{kA} + E_{kB} + E_{kD} + E_{kC} + E_{kE}$$

Pri sastavljanju izraza za kinetičku energiju koridtimo Koenig-ovu teoremu:

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru kinetičke energije translacije brzinom $\vec{v}_C$ središta sistema, kao da je celokupna masa M svih materijalnih tačaka sažeta u središtu sistema materijalnih tačaka i kinetičke energije relativnog kretanja materijalnih tačaka sistema u odnosu na središte sistema.

Ova teorema je poznata pod imenom Kenigova teoreme (***Samuel König*** 1712-1757). Ovaj holandki naučnik izveo je ovu teoremu 1751. Formulacija Kenigove teoreme je:

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka za slučaj apsolutnog kretanja sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru kinetičke energije njegovog središta (spoljašnje kinetičke energije) i relativne kinetičke energije u odnosu na središte (unutrašnja kinetička energija).

Ovu teoremu primenjujemo za odredjivanje kinetičke energije kotira D, tako što odredjujemo deo kinetičke energije translacije brzinom centra kotura i kinetičke energije rotacije oko ose kroz centar kotura. Ukupna kinetička energija sistema se sastoji iz kinetičkih energija translacija tegova, kinetičkih energija rotacija koturova i kinetičke energije translacije i rotacije kotura D:

$$E_k=\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)+\left(\frac{1}{2}J_B\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{2}2m\left(\frac{\dot{x}-\dot{y}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}J_D\left(\frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{2}J_C\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right),$$

Kinetička energija translacije je polovina proizvoda iz mase materijalne tačke i kvadrata njene brzine, a kinetička energija rotacije je polovina proizvoda aksijalnog momenta inercije tela za osu rotacije i kvadrata njegove ugaone brzine rotacije. Posle sredjivanja izraza za kinetičku energiju materijalnog sistema dobijamo:

$$E_k=\frac{m}{8}\left(9\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{y}+9\dot{y}^2\right).$$

Da bi smo odredili generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama, potrebno je odrediti virtualni rad – rad aktivnih sila i sile trenja koje dejstvuju na sistem na virtualnim pomeranjima sistema. Taj rad je:

$$\delta A=-\frac{1}{12}mg\cdot\delta x+2mg\cdot\delta z+\frac{1}{2}mg\cdot\delta y-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{\sqrt{3}}{3}mg\cdot\delta y,$$

što posle sređivanja daje:

$$\delta A=\frac{11}{12}mg\cdot\delta x-\frac{5}{8}mg\cdot\delta y$$

pa su Q_x i Q_y generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama:

$$Q_x=\frac{11}{12}mg \quad \text{i} \quad Q_y=-\frac{5}{8}mg$$

Lagrange-ove jednačine druge vrste za izabrane generalisane koordinate posmatranog materijalnog sistema su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial x}=Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial y}=Q_y$$

Sada unišenjem u prethodni sistem izraza za kinetičku energiju koju smo izrazili pomoću generalisanih koordinata dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina kretanja sistema:

$$\frac{9}{4}\ddot{x}-\frac{1}{4}\ddot{y}=\frac{11}{12}g$$

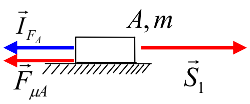
$$-\frac{1}{4}\ddot{x}+\frac{9}{4}\ddot{y}=-\frac{5}{8}g$$

odakle su tražena ubrzanja:

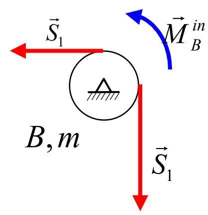
$$\ddot{x}=\frac{61}{160}g \qquad \ddot{y}=-\frac{113}{480}g\,.$$

Da bi smo odredili sile u delovima užeta, zamislićemo da smo izveli dekompoziciju materijalnog sistema na podsistenme, a medjusobne uticaje zamenili odgovarajućim silama medudejstva, a ovde je to oslobadjanje od veza, zamišljeno prekidanje užeta i zamena dejstva odgovarajućim silama u delobima ožeta. Na

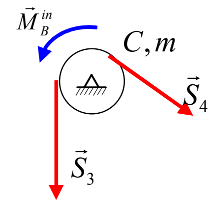
slici su prikazani kao podsistemi tereti i koturovi i prikazane su sile koje dejstvuju na svaki od njih, uključujući i odgovarajuće sile inercije. Koristeći relacije principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema na koje smo dekomponovali materijalni sistema možemo napisati odgovarajuće uslove dinamićke ravnoteže.
:



Slika 4c.



Slika 4d.



Slika 4e.

Na teret A, *slika 4c.* dejstvuje sila inercije intenziteta $I_{F_A} = m\ddot{x}$, normalna komponenta reakcije veze $F_{nA} = mg$ i tangencijalna komponenta reakcije veze $F_{\mu A} = \frac{1}{12}mg$, i jednačina dinamičke ravnoteže sila :

$$S_1 - m\ddot{x} - F_{\mu A} = 0\,;$$

Na kotur B, *slika 4d.* dejstvuje moment inercije usled obrtanja kotura ugaonom brzinom ω_B te je moment sila inercije – izvod momenta impulsa kretanja po vremenu za osu obrtanja kotura (proizvod aksijalnog momenta inercije mase za osu rotacije i ugaonog ubrzanja kotura za istu osu):

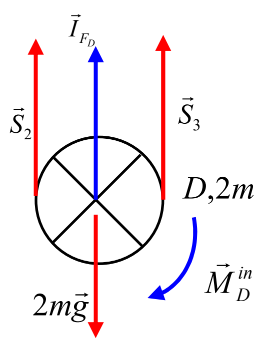
$$M_B^{in} = J_B\dot{\omega}_B = \frac{1}{2}mR\ddot{x}$$

i jednačinu dinamičke ravnoteže za obrtanje kotura oko ose pišemo pomoću jednačine ravnoteže momenata sila uključujući i sile inercije za osu rotacije kroz tačku B oko koje se obrće kotur:

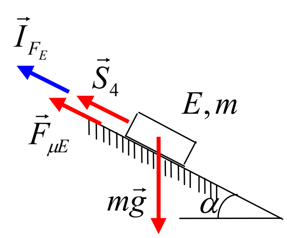
$$S_1R + M_B^{in} - S_2R = 0\,;$$

Na kotur C, *slika 4e.* dejstvuje moment inercije usled obrtanja kotura ugaonom brzinom ω_C te je moment inercije – izvod momenta impulsa kretanja po vremenu za osu obrtanja kotura (proizvod aksijalnog momenta sila inercije mase za osu rotacije i ugaonog ubrzanja kotura za istu osu):

$$S_3R + M_C^{in} - S_4R = 0\,;$$



Slika 4f.



Slika 4g.

Na točak D, *slika 4f.* dejstvuje moment inercije usled obrtanja točka ugaonom brzinom ω_D te je moment sila inercije – izvod momenta impulsa kretanja po vremenu za osu obrtanja točka (proizvod aksijalnog momenta inercije mase za osu rotacije i ugaonog ubrzanja kotura za istu osu):

$$M_D^{in} = J_D\dot{\omega}_D = \frac{1}{2}mR(\ddot{x} + \ddot{y})$$

Kako se točak kreće i translatorno to sa napadnom tačkom u njegovom centru na isti dejstvuje i sila inercije usled translatornog kretanja

$$I_{F_D} = 2m\ddot{z} = m(\ddot{x} - \ddot{y})$$

i jednačine dinamičke ravnoteže materijalnog sistema su jednačine ravnoteže sila i momenata sila za tačku u centru mase točka:

$$S_2 + I_{F_D} + S_3 - 2mg = 0$$

$$S_2 R + M_D^{in} - S_3 R = 0$$

Na teret E, *slika 4g.* dejstvuje sila inercije po intenzitetu jednaka $I_{F_E} = m\ddot{y}$, normalna komponenta reakcije veze hrapave strme ravni $F_{nE} = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$ i tangencijalna komponenta reakcije veze hrapave strme ravni

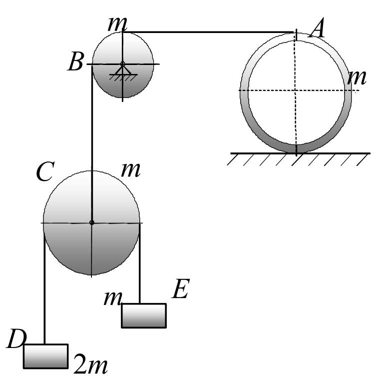
$$F_{\mu E} = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{\sqrt{3}}{2} mg = \frac{1}{8} mg,$$

kao i jednačinu ravnoteže sila :

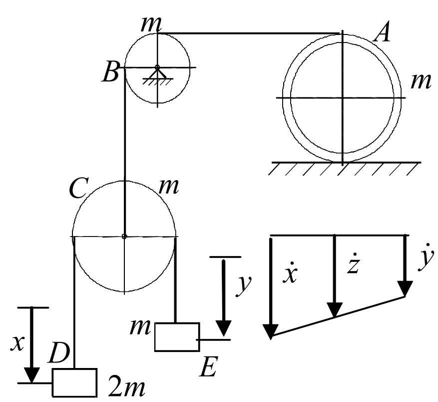
$$S_4 + I_{F_E} + F_{\mu E} - \frac{1}{2} mg = 0$$

Iz ovih jednačina ravnoteže za sviki podsistem (element) sistema mogu se odrediti i sile u nerastegljivim užadima.

Zadatak 5. Materijalni sistem prikazan na *slici 5a* sastoji se od obruča A, mase m, diskova B i C, masa po m i tereta D i E, masa $2m$ i m. Obruč A se kotrlja bez klizanja po horizontalnom putu, a disk B se obrće oko nepokretne ose. Uže koje je jednim krajem namotano na obruč A, prebačeno je preko diska B i drugim krajem vezano je za centar diska C. Za krajeve drugog užeta koje je prebačeno preko diska C, vezani su tereti D i E. Ceo sistem leži u vertikalnoj ravni. Odrediti ubrzanja tereta.



Slika 5a.



Slika 5b.

Rešenje:

Kako se ceo sistem nalazi u vertikalnoj ravni, to možemo pretpostaviti da materijalni sistem ne izlazi iz te ravni i da svaki od tereta vrši samo translatorno kretanje te ih možemo smatrati teškim materijalnim tačkama. Analizirajući koliko nam je potrebno koordinata da bi smo odredili položaj svakog tereta u toj ravni zaključujemo da nam je za to potrebno tri koordinate, ali da pomoću dve od njih možemo izraziti treću, kao i ostale potrebne uglove obrtanja koturova, pa uzimajući u obzir da je uže nerastegljivo, kao i kompatibilnost brzina obrtanja koturova možemo naći sve potrebne veze. Zato za a generalisane koordinate biramo translatorna pomeranja tereta D i E, x i y, kao što je to naznačeno na *slici 5b*, a odgovarajuće generalisane brzine su onda $\dot{x}$ i $\dot{y}$.

Za rešavanje zadatka ćemo koristiti Lagrange-ove jednačine druge vrste i zato je potrebno odrediti kinetičku energiju sistema i generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama.

Aksijalni momenti inercija masa diskova B i C i obruča A za ose kroz centre su:

$$J_B = \frac{1}{2}mR^2,\ J_C = \frac{1}{2}mR^2 \ \text{ i } \ J_A = mR^2.$$

Disk C vrši ravansko kretanje obrćući se ugaonom brzinom ω_C oko trenutnog pola. Iz trougla brzina, *slika 5b*, za disk C sledi da je ugaona brzina:

$$\omega_C = \frac{\dot{x} - \dot{y}}{2R}$$

i ugaono ubrzanje

$$\dot{\omega}_C = \frac{\ddot{x} - \ddot{y}}{2R},$$

i brzina translacije centra mase

$$\dot{z} = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{2}$$

a veza kordinate z i generalizan koordinata x i y je :

$$\delta z = \frac{\delta y + \delta x}{2},$$

odnosno ubrzanje $\ddot{z} = \dfrac{\ddot{x} + \ddot{y}}{2}$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje kotura B koji se obrće oko nepomične ose su

$$\omega_B = \frac{\dot{z}}{R} = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{2R} \quad \text{i} \quad \dot{\omega}_B = \frac{\ddot{z}}{R} = \frac{\ddot{x} + \ddot{y}}{2R}.$$

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje obruča, koji se kotrlja bez klizanja po glatkoj ravni i obrće oko trenutnog pola u dodirnoj tački sa podlogom su

$$\omega_A = \frac{\dot{z}}{2R} = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{4R} \quad \text{i} \quad \dot{\omega}_A = \frac{\ddot{z}}{2R} = \frac{\ddot{x} + \ddot{y}}{4R}.$$

Izrazimo prvo kinetičku energiju sistema pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = \left(\frac{1}{2}2m\dot{x}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) + \left(\frac{1}{2}J_C\left(\frac{\dot{x} - \dot{y}}{2R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}J_B\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2R}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}J_A\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{4R}\right)^2\right)$$

odnosno posle matematičkog sređivanja imaćemo kinetičku energiju ovakvog sistema:

$$E_k = \frac{21}{16}m\dot{x}^2 + \frac{3}{8}m\dot{x}\dot{y} + \frac{13}{16}m\dot{y}^2.$$

Elementarni rad spoljašnjih sila na elementarnim pomeranjima po generalisaniM koordinatama sistema je:

$$\delta A = 2mg \cdot \partial x + mg \cdot \partial y + mg \cdot \partial z$$

odnosno

$$\delta A = \frac{5}{2}mg \cdot \partial x + \frac{3}{2}mg \cdot \partial y,$$

pa su Q_x i Q_y generalisane sile za generalisane koordinate:

$$Q_x = \frac{5}{2}mg \quad \text{i} \quad Q_y = \frac{3}{2}mg.$$

Lagrange-ove jednačine druge vrste za izabrane generalisane koordinate x i y posmatranog materijalnog sistema su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q_y$$

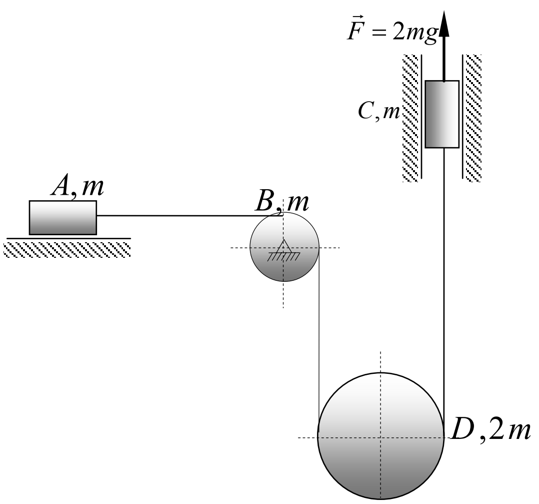
Sada unišenjem u prethodni sistem izraza za kinetičku energiju koju smo izrazili pomoću generalisanih koordinata dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina kretanja sistema:

$$\frac{21}{8}\ddot{x}+\frac{3}{8}\ddot{y}=\frac{5}{2}g$$
$$\frac{3}{8}\ddot{x}+\frac{13}{8}\ddot{y}=\frac{3}{2}g$$

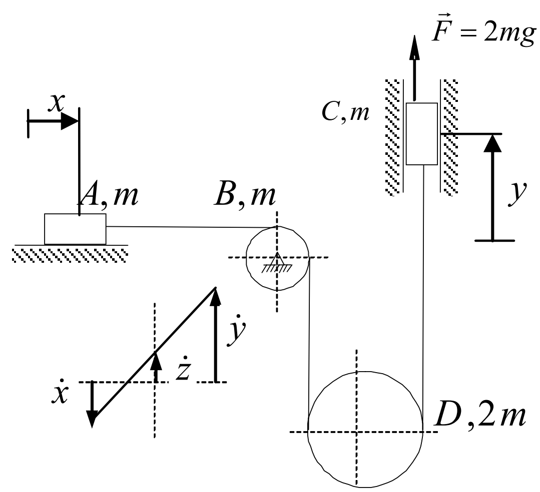
odakle su tražena ubrzanja tereta D i E:

$$\ddot{x}=\frac{22}{33}g$$
$$\ddot{y}=\frac{8}{11}g \; .$$

Zadatak 6. Materijalni sistem prikazan na *slici 6a* sastoji se od tereta A i C, masa po m, kotura B, mase m i kotura D, mase $2m$. Teret A klizi po glatkoj horizontalnoj ravni, a teret C po glatkom vertikalnom žlebu. Kotur B se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz njegov centar. Nerastegljivo uže je vezano za terete A i C, prebačeno preko kotura B i obmotano oko kotura D. Na teret C dejstvuje sila konstantnog intrenziteta $F=2mg$, u pravcu žleba, smera datog na *slici 6a*. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Odrediti ubrzanja tereta A i C i sile u svim delovima užadi. Koturove smatrati homogenim diskovima.



Slika 6a.



Slika 6b.

Rešenje:

Kako se ceo sistem nalazi u vertikalnoj ravni, to možemo pretpostaviti da materijalni sistem ne izlazi iz te ravni i da svaki od tereta vrši samo translatorno kretanje te ih možemo smatrati teškim materijalnim tačkama. Analizirajući koliko nam je potrebno koordinata da bi smo odredili položaj svakog tereta u toj ravni zaključujemo da nam je za to potrebno tri koordinate, ali da pomoću dve od njih možemo izraziti treću, kao i ostale potrebne uglove obrtanja koturova, pa uzimajući u obzir da je uže nerastegljivo, kao i kompatibilnost brzina obrtanja koturova možemo naći sve potrebne veze. Za generalisane koordinate biramo veličine translatornih pomeranja tereta A i C, x i y, *slika 6b*, a generalisane brzine su onda $\dot{x}$ i $\dot{y}$.

Aksijalni momenti inercija masa koturova B i D za ose kroz njihove centre su:

$$J_B=\frac{1}{2}mR^2 \qquad J_D=\frac{1}{2}2mR^2=mR^2$$

Kotur D vrši ravansko kretanje obrćući se ugaonom brzinom ω_D oko trenutnog pola.

Iz trougla brzina, *slika 6b*, za disk C sledi da je ugaona brzina: $\omega_D = \dfrac{\dot{y}-\dot{x}}{2R}$, kao i da je brzina translacije centra mase tog diska $\dot{z} = \dfrac{\dot{y}-\dot{x}}{2}$, odakle su ugaono ubrzanje kotura

$$\dot{\omega}_D = \frac{\ddot{y}+\ddot{x}}{2R}$$

i ubrzanje centra mase

$$\ddot{z} = \frac{\ddot{y}-\ddot{x}}{2}\ .$$

Veza kordinate z i generalizanih koordinata x i y je : $\delta z = \dfrac{\delta y - \delta x}{2}$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje kotura B koji se obrće oko nepomićne ose su:

$$\omega_B = \frac{\dot{x}}{R} \qquad \text{i} \qquad \dot{\omega}_B = \frac{\ddot{x}}{R}.$$

Sada prvo, izrazimo kinetičku energiju sistema pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \left(\frac{1}{2}J_B\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}2m\left(\frac{\dot{y}-\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}J_D\left(\frac{\dot{y}+\dot{x}}{2R}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)$$

odnosno

$$E_k = \frac{m}{8}\left(9m\dot{x}^2 - 2m\dot{x}\dot{y} + 7m\dot{y}^2\right)$$

Virtualni rad spoljašnjih sila na virtualnim pomeranjima duž generalisanih koordinata sistema je:

$$\delta A = -2mg\cdot\delta z + F\cdot\delta y - mg\cdot\delta y$$

odnosno

$$\delta A = mg\cdot\delta x + \left(F-2mg\right)\cdot\delta y$$

pa su Q_x i Q_y generalisane sile za generalisane koordinate:

$$Q_x = mg \quad \text{i} \quad Q_y = \left(F-2mg\right) = 0\,.$$

Lagrange-ove jednačine druge vrste za izabrane generalisane koordinate x i y posmatranog materijalnog sistema su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q_y$$

Sada unišenjem u prethodni sistem izraza za kinetičku energiju koju smo izrazili pomoću generalisanih koordinata dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina kretanja sistema:

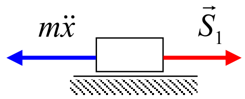
$$9\ddot{x} - \ddot{y} = 4g$$

$$-\ddot{x} + 7\ddot{y} = 0$$

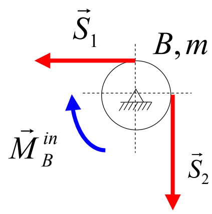
odakle su tražena ubrzanja tereta A i C:

$$\ddot{x} = \frac{14}{31}g \quad \text{i} \quad \ddot{y} = \frac{2}{31}g\,.$$

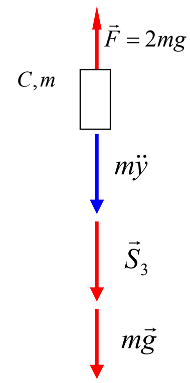
Da bi smo odredili sile u delovima užeta, zamislićemo da smo izveli dekompoziciju materijalnog sistema na podsistenme, a medjusobne uticaje zamenili odgovarajućim silama medudejstva, a ovde je to oslobadjanje od veza, zamišljeno prekidanje užeta i zamena dejstva odgovarajućim silama u delobima ožeta. Na slici *6 c,d,e* su prikazani kao podsistemi tereti i koturovi i prikazane su sile koje dejstvuju na svaki od njih, uključujući i odgovarajuće sile inercije. Koristeći relacije principa dinamičke ravnoteže za svaki od podsistema na koje smo dekomponovali materijalni sistema možemo napisati odgovarajuće uslove dinamićke ravnoteže.



Slika 6c.



Slika 6d.



Slika 6e.

$$S_1 - m\ddot{x} = 0$$

$$M_B^{in} = J_B \dot{\omega}_B = \frac{1}{2} mR\ddot{x}$$

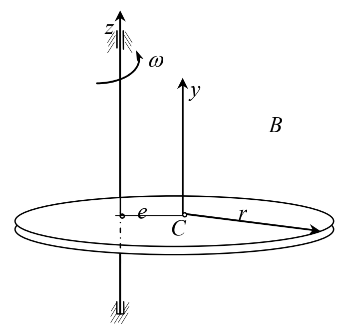
$$-S_1 R + \frac{1}{2} mR\ddot{x} + S_2 R = 0$$

$$2mg - m\ddot{y} - S_3 - mg = 0$$

Odakle su tražene sile u užadima:

$$S_1 = \frac{14}{31} g \qquad S_2 = \frac{21}{31} g \qquad S_3 = \frac{29}{31} g$$

Zadatak 7. Izračunati moment količine kretanja diska za obrtnu osu, ako je poznata masa diska m, kao i njegiov poluprečnik r, ako je ekscentrino nasađen na osu (vratilo), oko koga se obrće ugaonom brzinom ω. Ravan diska upravna je na obrtnu osu, ekscentričnost diska je jednak polovini poluprečnika $e = \frac{r}{2}$.



Rešenje:

Usmerimo osu z duž obrtne ose. Moment količine kretanja krutog tela za osu oko koje se obrće je

$$L_z = J_z \omega_z$$

gde je J_z moment inercije krutog tela za obrtnu osu da bi smo ga izračunali primenimo Štajner-ovu teoremu.

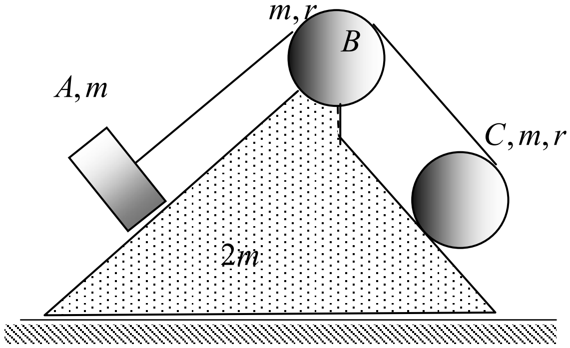
$$J_z = J_y + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2}{4} = \frac{3mr^2}{4},$$

pa je glavni moment količine kretanja diska za obrtnu osu je:

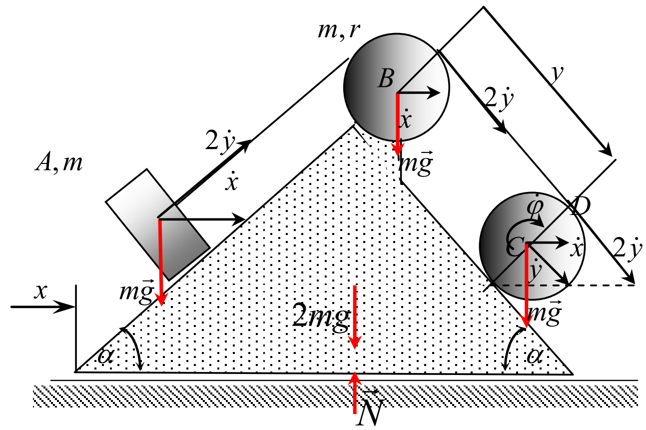
$$L_z = \frac{3mr^2}{4} \omega_z .$$

Zadatak 8. Na prizmi mase $2m$, koja može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni, nalazi se disk B, poluprečnika r i mase m vezan za prizmu osovinom B. Preko diska B prebačeno je nerastegljivo uže, zanemarljive težine, koje je jednim krajem vezano za teret A, mase m, a drugim krajem je obmotano na kotur C, poluprečnika r i mase m. Kotur se kotrlja bez klizanja a teret A klizi po prizmi.

Zanemujući trenje između prizme i podloge, između tereta A i prizme, kao i otpor obrtanju u ležištu B i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta.



Slika 8a.



Slika 8a.

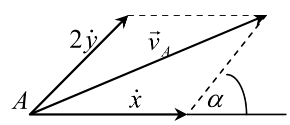
Rešenje:

Položaj materijalnog sistema određen je najmanje dvema koordinatama, te ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate izaberemo koordinate x i y, pri čemu je položaj prizme odredjen koordinatom x, dok za drugu generalisanu koordinatu y izaberemo udaljenje tačke C, centra diska od tačke B na prizmi.

Prvo, odredimo ozraz za kinetičku energiju pomoću generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$:

$$E_k = E_{k\Delta} + E_{kA} + E_{kB} + E_{kC}$$

Kinetička eknergija prizme koja se kreće translatorno brzinom $\dot{x}$ je:



Slika 8c.

$$E_{k\Delta} = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 = m\dot{x}^2 .$$

Brzina tereta A koji se kreće translatorno brzinom $\vec{v}_A$, koja se dobija slaganjem brzina translacija preniosne brzine brzibe suporta (prizme) $\dot{x}$ i relativne brzine kretanja po prizmi $2\dot{y}$, je na osnovu kosinusne teoreme, *slika 8c*:

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + (2\dot{y})^2 - 4\dot{x}\dot{y}\cos(\pi - \alpha) = \dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha ,$$

pa je kinetička energija tereta A:

$$E_{kA} = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right)$$

Ovde smo uočili da je zbog nerastegljivosti užeta relativna brzina tačke , u odnosu na prizmu, jednaka relativnoj brzini tačke D na koturu koja je, opet, zbog kotrljanja bez klizanja kotura po prizmi, jednaka

$$v_{Dr} = 2\dot{y} .$$

Disk B vrši ravno kretanje, te je brzina njegovog središta B jednaka $\dot{x}$, a ugaona brzina ω_B obrtanja diska se dobija iz uslova da nema proklizavanja između diska i užeta,

$$\omega_B = \frac{2\dot{y}}{r} ,$$

pa je kinetička energija:

$$E_{kB} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m r^2 \frac{4\dot{y}^2}{r^2} = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),$$

gde je $J_B = \frac{1}{2}mr^2$ aksijalni moment inercije mase diska za osu upravnu na ravan diska kroz tačku B centra diska.

Kotur C vrši ravno kretanje. Brzina središta se dobija slaganjem prenosne i relativne brzine tačke C,

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos(\pi - \alpha) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\,,$$

a ugaona brzina kotura iz uslova da je P trenutni pol brzine obrtanja je $\omega_C = \frac{\dot{y}}{r}$, pa je:

$$E_{kC} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{y}^2}{r^2} = \frac{1}{4}m\left(2\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 4\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right),$$

gde je $J_C = \frac{1}{2}mr^2$ aksijalni moment inercije mase kotura za osu upravnu na ravan kotura kroz tačku C centra kotura. Sada je:

$$E_k = \frac{1}{4}m\left(10\dot{x}^2 + 15\dot{y}^2 + 12\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right).$$

Kako se na sistem može primeniti teorema u promeni kinetičke energije koju možemo napisati u diferencijalnom obliku:

$$dE_k = dA\,,$$

gde je dA ukupni elementarni rad spoljašnjih sila na elementarnom pomeranju sistema.

Kako je

$$dE_k = \frac{1}{2}m\left(10\dot{x}d\dot{x} + 15\dot{y}d\dot{y} + 6\dot{y}d\dot{x}\cos\alpha + 6\dot{x}d\dot{y}\cos\alpha\right) = m\left(5d\dot{x} + 3d\dot{y}\cos\alpha\right)\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(15d\dot{y} + 6d\dot{x}\cos\alpha\right)\dot{y}\,,$$

a rad sila na elementarnim pomeranjima sistema, koje podrazumeva priraštaje izabranih generalisanig koordinata dx i dy, je:

$$dA = \left(m\vec{g}, d\vec{s}_A\right) + \left(m\vec{g}, d\vec{s}_C\right) = -mg\sin\alpha\cdot 2dy + mg\sin\alpha\cdot dy = -mg\sin\alpha\cdot dy$$

Radovi sile težine prizme $2m\vec{g}$ i sile težine diska $m\vec{g}$ jednaki su nuli pošto su pomeranja napadnih tačaka ovih sila upravna na vektore sila, takođe je i rad unutrašnjih sila $\vec{N}$ jednak nuli.

Sada imamo:

$$m\left(5d\dot{x} + 3d\dot{y}\cos\alpha\right)\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(15d\dot{y} + 6d\dot{x}\cos\alpha\right)\dot{y} = -mg\sin\alpha\cdot dy$$

posle sredjivanja prethodnog izraza imajući u vidu da je:

$$\dot{x}d\dot{x} = \frac{dx}{dt}d\dot{x} = dx\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}dx$$

dobijamo::

$$\left(5\ddot{x} + 3\ddot{y}\cos\alpha\right)dx + \frac{1}{2}\left(15\ddot{y} + 6\ddot{x}\cos\alpha\right)dy = -g\sin\alpha\cdot dy$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena u svakom trenutku tj. za svaku vrednost generalisanih brzina $\dot{x}$ i $\dot{y}$, i diferencijalnih pomeranja moraju koeficijannti uz dx i dy sa leve i desne strane znaka jednakosti biti jednaki iz kog uslova sledi:

$$15\ddot{y} + 6\ddot{x}\cos\alpha = -2g\sin\alpha$$

$$5\ddot{x} + 3\ddot{y}\cos\alpha = 0$$

Ovo su tražene diferencijalne jednačine kretanja. Ubrzanja su:

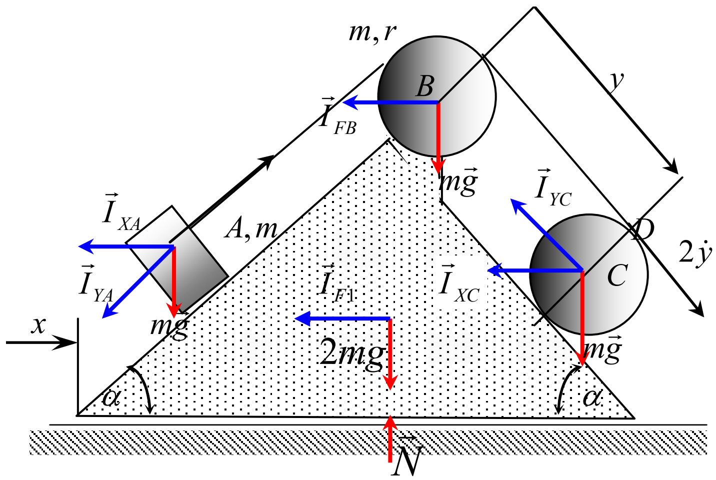
$$\ddot{x} = \frac{3g\sin 2\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad \ddot{y} = -\frac{10g\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}$$

Odakle se vidi da su ubrzanja konstantna.

Zadatak 9. Na prizmi mase $2m$, koja može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni, nalazi se disk B, poluprečnika r i mase m vezan za prizmu osovinom B. Preko diska B prebačeno je nerastegljivo uže, zanemarljive težine, koje je jednim krajem vezano za teret A, mase m, a drugim krajem je obmotano na kotur C, poluprečnika r i mase m. Kotur se kotrlja bez klizanja a teret A klizi po prizmi.

Zanemujući trenje između prizme i podloge, kao i otpor obrtanju u ležištu B, ali uzimajući trenje između tereta A i prizme, kao i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta.

U tom slučaju pretpostaviti da između tereta A i prizme postoji trenje pri čemu je koeficijen trenja μ a krak otpora kotrljanju je ε. Odrediti takođe i sile u užadima i silu u ležištu B. Koristiti relacije principa dinamičke ravnoteže.



Slika 9a.

Rešenje:

Materijalni sismtem koji je predmet ovog zadatka je sličan kao i sistem iz prethodnog zadatka, tako da se analiza sila tamo izvrđena može koristiti i u režavanju ovog zadatka istim metodama, pri ćemu moraju da se uzmu efekti sila trenja usled neidealnosti veza , za razliku od veza iumedju prizme i kotura i prizme i tereta koji su bili idealne veze bez trenja.

Položaj materijalnog sistema, i u ovako postavljenom zadatku sa sistemomom sa neidealnim vezama i sa trenjem, je određen sa najmanje dvema koordinatama, te sistem ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate izaberemo koordinate x i y, pri čemu je položaj prizme odredjen koordinatom x, dok za drugu generalisanu koordinatu y izaberemo udaljenje tačke C, centra diska od tačke B na prizmi.

Na *slici 9a* prikazane su sve sile inercije i spoljašnje aktivne sile koje dejstvuju na ovaj mehanički sistem. Primetimo da su sile inercije suprotnih smerova od ubrzanja, koja se smatraju pozitivnim. Na osnovu vektorske relacije principa dinamičke ravnoteže („Ravnoteža“ projekcija svih sila u pravcu ose x daje nam jednačinu) i njene projekcije na pravac x dobijamo:

$$I_{XA} + I_{XB} + I_{F1} + I_{XC} + I_{YA}\cos\alpha + I_{YC}\cos\alpha = 0$$

gde su:

$$I_{XA} = -m\ddot{x},\ I_{XB} = -m\ddot{x},\ I_{XC} = -m\ddot{x},\ I_{F1} = -2m\ddot{x},\ I_{YA} = -m2\ddot{y} \ \text{ i } \ I_{YC} = -m\ddot{y}.$$

Ovde je i iskorišćena veza između ubrzanja tačaka A i C u odnosu na prizmu, koja se dobija diferenciranjem kinematičke jednačine koja povezuje brzine $\dot{y}_A$ i $\dot{y}_C$:

$$\dot{y}_A = 2\dot{y}_C = 2\dot{y}$$

odnosno

$$\ddot{y}_A = 2\ddot{y}.$$

Zamenom navedenih sila inercije u jednačinu dinamičke ravnoteže projekcija sila u x pravcu dobija se sledeća diferenciojalna jednačina:

$$5\ddot{x}+3\ddot{y}\cos\alpha=0$$

Pošto u ovoj jednačini imamo dve nepoznate potrebno je napisati još jednu jednačinu. Rastavimo sistem na podsisteme i vodimo računa o svim silama i momentima koji dejstvuju na pojedine podsisteme, počevši sa spoljašnjim silama, preko unutrašnjih do sila inercije, koje dejstvuju na pojedina tela sistema, *slika 9b*.

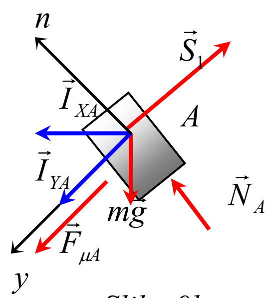
Požšo se zadatkom traži da se koristite relacije principa dinamičke ravnoteže., to koristimo D'Alamber-ov princip „ravnoteže" sila koje dejstvuju na teret A ima oblik i nma osnovu toga pišemo sledeću vektorsku jednačinu:

$$\vec{I}_{XA}+\vec{I}_{YA}+\vec{S}_1+m\vec{g}+\vec{N}_A+\vec{F}_{\mu A}=0$$

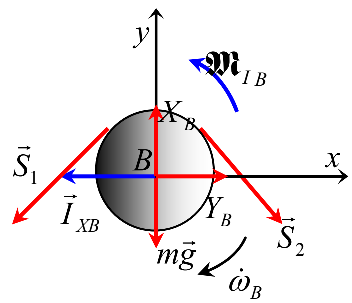
koja projektovanjem na ose y i n daje dve skalarne jednačine oblika:

$$mg\sin\alpha-S_1+F_{\mu A}+I_{YA}+I_{XA}\cos\alpha=0$$

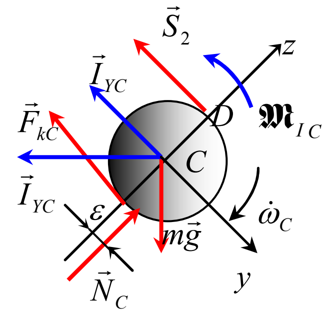
$$N_A-mg\cos\alpha+I_{XA}\sin\alpha=0$$



Slika 9b.



Slika 9c.



Slika 9d.

Iz druge od prethodnih jednaćina dobijamo:

$$N_A=mg\cos\alpha-m\ddot{x}\sin\alpha$$

a pošto je:

$$F_{\mu A}=\mu N_A=\mu m(g\cos\alpha-\ddot{x}\sin\alpha)$$

iz prve jednačine gornjeg sistema dobijamo:

$$mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-S_1+m(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)\ddot{x}+2m\ddot{y}=0$$

Postavljanjem momentne jednačine za osu obrtanja dobija se:

$$S_1r-S_2r+\mathfrak{M}_{IB}=0$$

Disk B vrši ravno kretanje, pri čemu središte B ima ubrzanje $\ddot{x}$, dok je ugaona brzina ravnog kretanja

$$\omega_B=\frac{2\dot{y}}{r}$$

(koja podrazumeva da nema proklizavanja između užeta i diska). Kako je moment sila inercije za centar masa diska)

$$\mathfrak{M}_{IB}=J_B\dot{\omega}_B=\frac{1}{2}mr^2\frac{2\ddot{y}}{r}=mr\ddot{y},$$

to možemo da napišemo:

$$S_1r-S_2r+\mathfrak{M}_{IB}=0 \text{ odnosno}$$

$$S_1-S_2+m\ddot{y}=0$$

Na *slici 9c* prikazani su smerovi ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}_B$ i momenta $\mathfrak{M}_{IB}$ sila inercije za momentnu tačku u centru masa. Postavljanje jednačina ravnoteže sila ostavljeno je za kasnije pošto za sada treba postaviti samo one jednačine iz kojih se mogu odrediti $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$.

Posmatrajmo sada kotur C koji vrši ravno kretanje. Na *slici 9d* prikazani su smerovi ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}_C$ i momenta sila inercije $\mathfrak{M}_{IC}$ za momentnu tačku u središtu diska, kao i ostale sile koje na kotur dejstvuju. Primetimo da je usled postojanja otpora protiv kotrljanja normalna reakcija N_C pomerena za krak ε, kojim se uzima u obzir efekat klizanja pri kotrljanju kotura po strmoj ravni, u smeru kotrljana. Jednačine dinamičke ravnoteže kotura koji se kotrlja su:

$$N_C - mg\cos\alpha + I_{XC}\sin\alpha = 0$$
$$mg\sin\alpha - S_2 - F_{kC} - I_{YC} - I_{XC}\cos\alpha = 0$$
$$S_2 r - F_{kC} r + \mathfrak{M}_{IC} + N_C\varepsilon = 0$$

Iz prve jednačine dinamičke ravnoteže sledi:

$$N_C = mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha$$

Kako je

$$\mathfrak{M}_{IC} = J_C\dot{\omega}_C = \frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{y}}{r} = \frac{1}{2}mr\ddot{y},$$

gde je

$$\dot{\omega}_C = \frac{\ddot{y}}{r}$$

(iz kinematičke jednačine $\dot{y} = r\omega_C$ koja podrazumeva da nema klizavanja između kotura i prizme, koja diferenciranjem daje $\dot{\omega}_C$), to iz poslednje jednačine sistema sledi:

$$S_2 - F_{kC} + \frac{1}{2}m\ddot{y} + \left(mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha\right)\frac{\varepsilon}{r} = 0$$

druga jednačina se može napisati u obliku:

$$-F_{kC} - S_2 - m\ddot{y} - m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0$$

Sada prektično treba da rešimo sistem od pet jednačina sa pet nepozantih $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, S_1, S_2 i F_{kC} oblika:

$$5\ddot{x} + 3\ddot{y}\cos\alpha = 0$$
$$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - S_1 + m(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\ddot{x} + 2m\ddot{y} = 0$$
$$S_1 - S_2 + m\ddot{y} = 0$$
$$S_2 - F_{kC} + \frac{1}{2}m\ddot{y} + \left(mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha\right)\frac{\varepsilon}{r} = 0$$
$$-F_{kC} - S_2 - m\ddot{y} - m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0.$$

Iz prethodnog sistema diferencijalnih jednačina odredjujemo izraze za ubrzanja prizme i centra kotira:

$$\ddot{x} = \frac{6g\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} + 2\mu\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right]\cos\alpha}{75 - 6\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} - 2\mu\right)\sin\alpha + 3\cos\alpha\right]\cos\alpha} \quad \text{i} \quad \ddot{y} = -\frac{10g\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} + 2\mu\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right]}{75 - 6\left[\left(\frac{\varepsilon}{r} - 2\mu\right)\sin\alpha + 3\cos\alpha\right]\cos\alpha}$$

Iz prethodnih izraza za ubrzanja, zanemarujući uticaj klizanja $(\varepsilon = 0)$ pri kotrljanju sa klizanjem kotura po strmoj ravni im otpor trenja $(\mu = 0)$ pri klizanju tereta po strmoj ravni dobićem izraze koje smo drugim metodama dobili za dinamiku materijalniog sistema sa idealnim vezama, koji je bio tredmet prethodnog zadataka i dobiti iste izraze kao i u prethodnom zadatku.

Ostale nepoznate unutrašnje sile u uzadima koje se javljaju u sistemu su:

$$S_1 = \frac{\left(55 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}, \quad S_2 = \frac{\left(45 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad F_{kC} = \frac{\left(40 - 12\cos^2\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}$$

za $(\varepsilon = 0)$ i $(\mu = 0)$.

Može se primetiti da je sila kotrljanja $F_{\mu C}$ smatrana nepoznatom silom. Potrebno je to ovde i posebno podvući jer se pri rešavanju zadataka tu vrlo često prave greške. Naime, sila kotrljanja kotura po strmoj ravni se javlja kao sila između kotura C i prizme mora postojati da bi se moglo ostvariti kotrljanje po prizmi. Sila kotrljanja F_{kC} ne sme se, pri kotrljanu bez klizanja, dovoditi u vezu sa koeficijentom trenja μ_C između tela, tj.

$$F_{\mu C} \neq \mu_C N_C$$

i uvek je $F_{\mu C} < \mu_C N_C$. Međutim, ako sila trenja dostigne najveću moguću vrednost $F_{\mu C} = \mu N$ onda nastaj eproklizavanje pri kotrljanju (dodirna tačka između kotura i prizme nije trenutni pol). Sila trenja zavisi, što pokazuje rezultat) od veličina mg i α. Može se odrediti minimalni koeficijent trenja da pri datim uslovima (date sile koje dejstvuju na sistem) ne dođe do proklizavanja. Izračunajmo u ovom primeru $\mu_{C\min} = \mu_0$ u slučaju kad se zanemare otpor kotrljanja i trenje između tereta A i prizme. Iz jednačine $N_C = mg\cos\alpha + m\ddot{x}\sin\alpha$ se dobija $N_{C'}$,

$$N_{C'} = \frac{\left(81 - 24\cos^2\alpha\right)mg\cos\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}$$

a iz uslova $F_{\mu C} = \mu_0 N_{C'}$, sledi

$$\mu_{C\min} = \mu_0 = \frac{40 - 120\cos^2\alpha}{81 - 24\cos^2\alpha} tg\alpha \,.$$

Ako je $\mu_C > \mu_0$ kotrljanje je bez klizanja.

Iz gornje analize u vezi sile kotrljanja i sile trenja između tela pri njihovom međusobnom relativnom kotrljanju bez klizanja (bez proklizavanja), sila kotrljanja na dodirnoj površi je manja od granične (maksimalne) sile trenja koja iznosi μN i pri rešavanju zadataka silu trenja F_μ treba smatrati nepoznatom silom. Naravno, ako se to traži, mogu se iz jednačine $F_\mu = \mu N$ odrediti granične vrednosti od kojih sile F_μ i N zavise, uključujući i koeficijent trenja klizanja μ ,pa da do proklizavanja ne dođe.

Sile u ležištu B određuju se iz uslova ravnoteže sila koje dejstvuju na disk B, uključujući i inercione sile:

$$X_B - I_{XB} - S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha = 0$$

$$Y_B - S_1\sin\alpha - S_2\sin\alpha - mg = 0$$

kako je $I_{XB} = m\ddot{x}$. To za slučaj $(\varepsilon = 0)$ i $(\mu = 0)$ imamo otpore ležišta B:

$$X_B = \frac{\left(10 - 6\cos\alpha\right)mg\sin\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad Y_B = \frac{175 - 6\left(3 + 4\sin^2\alpha\right)mg\cos^2\alpha}{75 - 18\cos^2\alpha}\,.$$