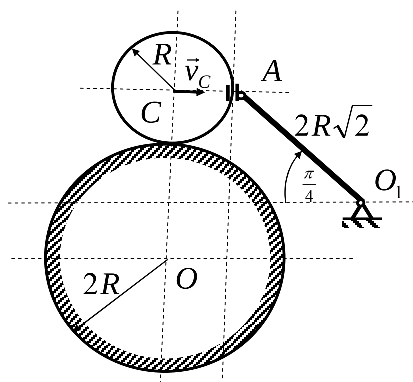
PRIPREMA ZA MAŠINIJADU 2007.
MOGUĆI ZADACI I REŠENJA SA TAKMIČENJA IZ OBLASTI MEHANIKE (KINEMATIKE I DINAMIKE)

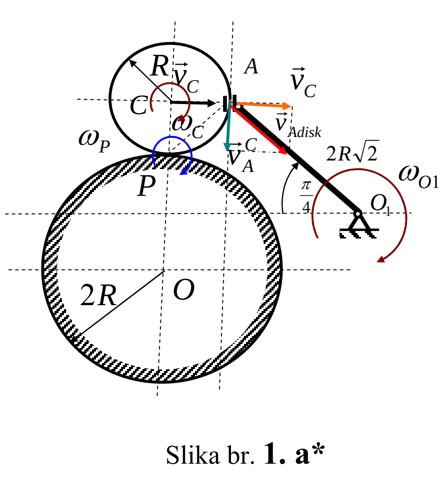
PRVI ZADATAK . (Kinematika): Disk poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po cilindričnoj kružnoj površi poluprečnika $2R$ sa centrom u tački O. Ravan diska je upravna na osu cilindrične površi. Po konturi diska može da klizi klizač A za koji je zglobno vezan jedan kraj štapa AO_1, dužine $2R\sqrt{2}$, dok je drugi njegov kraj O_1 vezan, takodje, zglobno za nepokretni oslonac na podu, tako da u posmatranom položaju zaklapa ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ sa pravcem normale na spojnu duž OC koja spaja centar diska i tačku prodora ose cilindrične površi kroz ravan diska. Ako znamo da se centar diska C pri njegovom kotrljanju bez klizanja po cilindričnoj površi kreće brzinom $v_C = \cos nt$ konstantnog intenziteta, potrebno je u posmatranoj konfiguraciji kinematičkog sistema prikazanom na slici br 1, odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa AO_1.



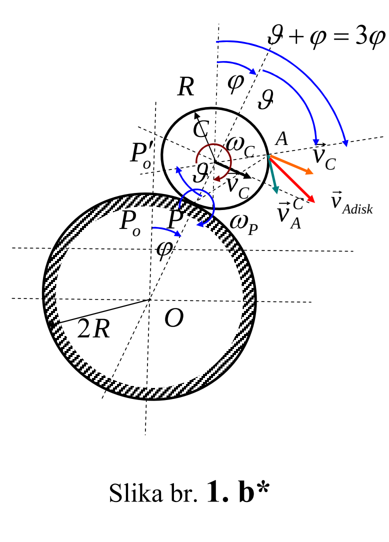
Slika br. **1**

REŠENJE PRVOG ZADATKA: Na slici 1. a* , b* i c* prikazan je plan brzina pojedinih tačaka diska, C i A kao i ugaona brzine kotrljanja diska po polukruđnoj površi ω_P i ugaona brzinasopstvenog obrtanja diska oko njegovog centra ω_C. Tačka dodira diska i križne cilindrične površi P je trenutni pol rotacije diska pri kotrljanju te je ugaona brzine kotrljanja diska po polukruđnoj površi ω_P:

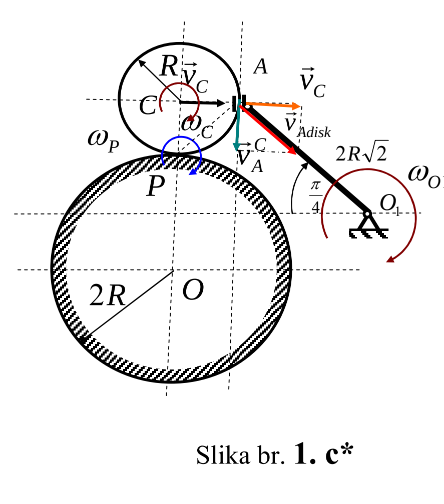
$$\omega_P = \frac{v_C}{R}$$



Slika br. **1. a***



Slika br. **1. b***



Slika br. **1. c***

I jednaka je ugaonoj brzini sopstvene rotacije diska oko svoje ose ω_C :

$$\omega_C = \omega_P = \frac{v_C}{R}$$

Do tog zaključka možemo doći i na sledeci način: Pri kotrljanju diska po cilindričnoj površi trenutni pol se pomeri po luku od P_O do P dok se po disku pomeri od tačke P'_O do P, a to su lukovi centralnih uglova φ i ϑ te važi:

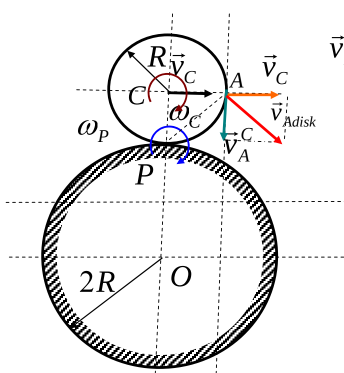
$$2R\varphi = R\vartheta$$

te se disk pri tom kotrljanju okretao brzinom ω'_C

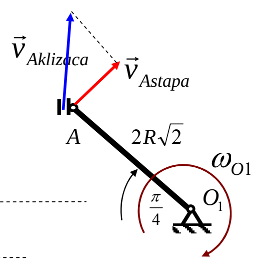
$$\omega'_C = \dot{\vartheta} = 2\dot{\varphi} = 2\frac{v_C}{3R}$$

medjutim s obzirom da se i površ spuštala to je diks imao i dodatno zaokretanje od ugla φ, tako da je ukupan ugao za koji se disk zaokrenuo pri kotrljanju bez klizanja u odnosu na svoj početni položaj naznačen na slici 1. a* je $\vartheta + \varphi$, te je ugaona brzina njegovog sopstvenog obrtanja ω_C oko svog centra:

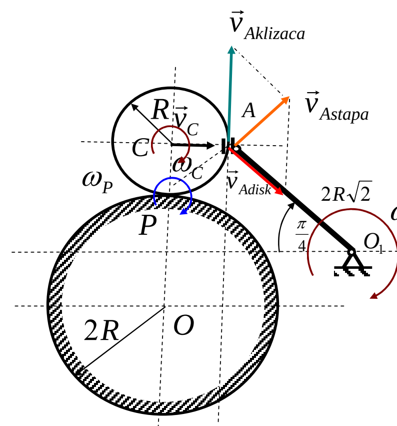
$$\omega_C = \omega'_C + \omega''_C = \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} = 3\dot{\varphi} = \frac{v_C}{R} = \omega_P$$



Slika br. **1. d***



Slika br. **1. e***



Slika br. **1. f***

Brzinu tačke A diska se može odrediti kao brzina rotacije oko trenutnog pola brzine P ugaonom brzinom $\omega_P = \frac{v_C}{R}$, ako se zna da je njeno udaljenje od trenutnog pola $\overline{PA} = R\sqrt{2}$ i da pada u pravac normale na to rsatojanje, te je:

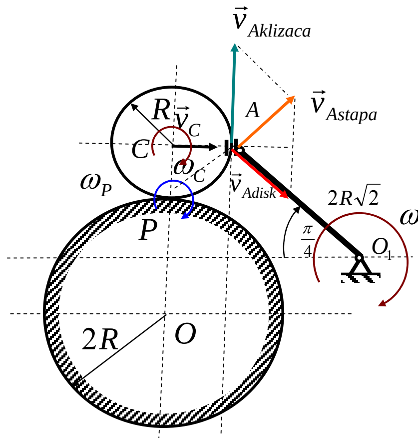
$$\vec{v}_{Adiska} = \overline{PA}\omega_P\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} - \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}\right) = R\sqrt{2}\frac{v_C}{R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = v_C\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$$

Do istog rezultata možemo doći koristeći teorijska znanja iz kinematike ravanskih kretanja. Brzina tačke A diska jednaka je vektorskom zbiru brzine tačke C kao referentne i relativne brzine tačke A u odnosu na tačku C:

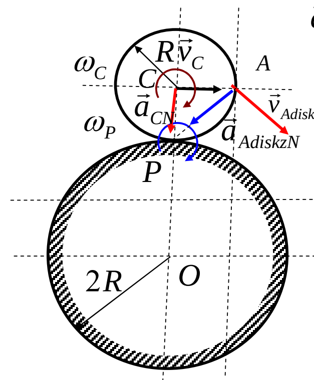
$$\vec{v}_{Adiska} = \vec{v}_C + \vec{v}_A^{(C)} = v_C\vec{i} - R\omega_C\vec{j} = v_C\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$$

Brzina $\vec{v}_{Astapa}$ tačke A štapa treba da ima pravac normale na štap i jednaka je po intenzitetu proizvodu rastojanja te tačke od ose obrtanja štapa kroz zglob u tački O_1 i za sada nepoznate ugaone brzine ω_{O1} obrtanja štapa oko te ose. Na osnovu toga pišemo:

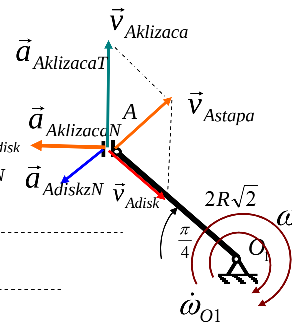
$$\vec{v}_{Astapa} = \overline{O_1A}\omega_{O1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}\right) = 2R\sqrt{2}\omega_{O1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = 2R\omega_{O1}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$



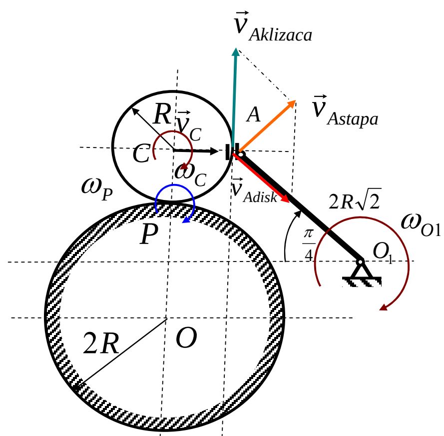
Slika br. **1. g***



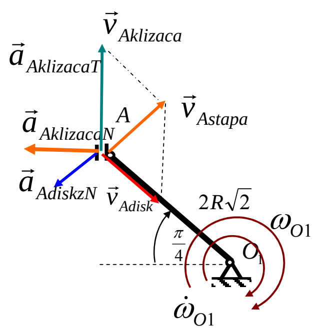
Slika br. **1. h***



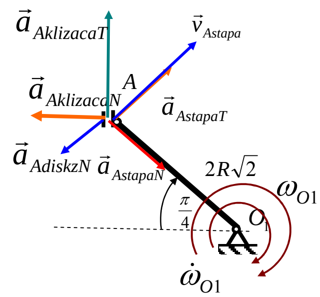
Slika br. **1. l***



Slika br. **1. m***



Slika br. **1. n***



Slika br. **1. p***

Relativna brzina klizača A u odnosu na disk pada u pravac tangente na konturu dikska po kojoj klizač klizi te se može postaviti veza izmedju triju brzina u zački A, diska klizača i štapa: brzine $\vec{v}_{Adiska}$ tačke A diska, brzine $\vec{v}_{Astapa}$ tačke A štapa i brzine $\vec{v}_{Akliya;a}$ tačke A klizača:

$$\vec{v}_{Astapa} = \vec{v}_{Adiska} + \vec{v}_{Akliya;a}$$

$$\vec{v}_{Astapa} = 2R\omega_{O1}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = v_C\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + v_{Aklizaca}\vec{j}$$

Iz prethodne vektorske jednačine , odr+ujemo trenutnu ugaonu brzinu ω_{O1} obrtanja štapa oko ose kroz zglob O_1 i relativnu brzinz klizača:

$$\omega_{O1} = \frac{v_C}{2R}$$

dok je relativna brzina klizača

$$v_{Aklizaca} = 2R\omega_{O1} + v_C = 2v_C \,.$$

Sada ćemo pristupiti odredjivanju ubrzanja štapa. S obzirom da se disk kotrlja konstantnom ugaonom brzinom $\omega_P = \dfrac{v_C}{R}$ i njegov centar se kreće po krugu poluprečnika $3R$ sa centrom krivine u tački O, to će ubrzanje tačke C imati samo normalnu komponentu oko tog centra krivine.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT} = \vec{a}_{CN} = -\frac{v_C^2}{3R}\vec{j}$$

Ubrzanje tačke A diska odredjujemo pomoću vektorskog zbira ubrzanja referentne tačke diska C i relativnog ubrzanja tačke A oko tačke konstantnom ugaonom brzinom ω_C, tako da se javlja samo normalna komponenta tog relativnog ubrzanja: Na osnovu toga je:

$$\vec{a}_{Adiska} = \vec{a}_{CdiskaN} + \vec{a}^{(C)}_{AdiskaT} = -\frac{v_C^2}{3R}\vec{j} - R\omega_C^2\vec{i} = -\frac{v_C^2}{3R}\left(\vec{j} - 3\vec{i}\right)$$

Ubrzanje tačke A, pod pretpostavkom da se štap obrće ugaonom brzinom ω_{O1} i ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}_{O1}$ je:

$$\vec{a}_{Astapa} = \vec{a}_{AstapaN} + \vec{a}_{AstapaT} = 2R\sqrt{2}\omega_{O1}^2\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} - \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}\right) + 2R\sqrt{2}\dot{\omega}_{O1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_{Astapa} = 2R\sqrt{2}\left(\frac{v_C}{2R}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + 2R\sqrt{2}\dot{\omega}_{O1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_{Astapa} = \frac{v_C^2}{2R}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + 2R\dot{\omega}_{O1}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Ubrzanje relativnog kretanja klizača po disku je:

$$\vec{a}_{Aklizaca} = \vec{a}_{AklizacaN} + \vec{a}_{AklizacaRT} = -\frac{v_{Akliyaca}^2}{R}\vec{i} + a_{ZklizT}\vec{j} = -\frac{4v_C^2}{R}\vec{i} + a_{ZklizT}\vec{j}$$

Sada pomoću vektorskog zbira

$$\vec{a}_{Astapa} = \vec{a}_{Adiska} + \vec{a}_{Akliyaca}$$

$$\vec{a}_{Astapa} = \frac{v_C^2}{2R}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + 2R\dot{\omega}_{O1}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = -\frac{v_C^2}{3R}\left(\vec{j} - 3\vec{i}\right) + -\frac{4v_C^2}{R}\vec{i} + a_{ZklizT}\vec{j}$$

$$\frac{v_C^2}{2R} + 2R\dot{\omega}_{O1} = -\frac{v_C^2}{R} - \frac{4v_C^2}{R}$$ odakle sledi da je $$\dot{\omega}_{O1} = -\frac{11v_C^2}{4R^2}$$

$$-\frac{v_C^2}{2R} + 2R\dot{\omega}_{O1} = -\frac{v_C^2}{3R} + a_{ZklizT}$$ odakle sledi da je $$a_{AklizT} = -\frac{17v_C^2}{3R}$$

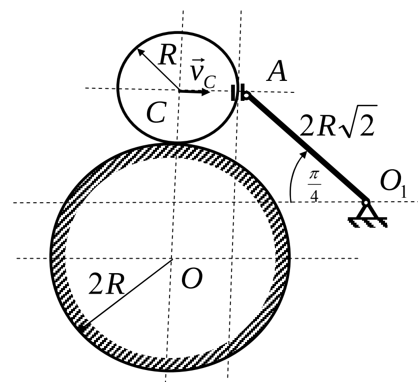
Time smo zadatak rešili. I da zaključim:

Ugaono ubrzanje štapa je $\dot{\omega}_{O1} = -\frac{11v_C^2}{4R^2}$, dok je ubrzanje klizača A

$$\vec{a}_{Aklizaca} = \vec{a}_{AklizacaN} + \vec{a}_{AklizacaRT} = -\frac{v_C^2}{3R}\left(12\vec{i} + 17\vec{j}\right).$$

DRUGI ZADATAK . (Dinamika): Disk mase m, poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po cilindričnoj kružnoj površi poluprečnika $2R$ sa centrom u tački O. Ravan diska je upravna na osu cilindrične površi. Po konturi diska može da klizi klizač A za koji je zglobno vezan jedan kraj štapa AO_1, mase M dužine $2R\sqrt{2}$, dok je drugi njegov kraj O_1 vezan, takodje, zglobno za nepokretni oslonac na podu, tako da u posmatranom početnom položaju zaklapa ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ sa pravcem normale na spojnu duž OC koja spaja centar diska i tačku prodora ose cilindrične površi kroz ravan diska. Ako znamo da se centar diska C u početnom trenutku imao brzinu centra v_{C0} potrebno je odrediti broj stepeni slobode kretanja sistema, izabrati generalisane koordinate i napisati izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema, kao i integral energije sistema.

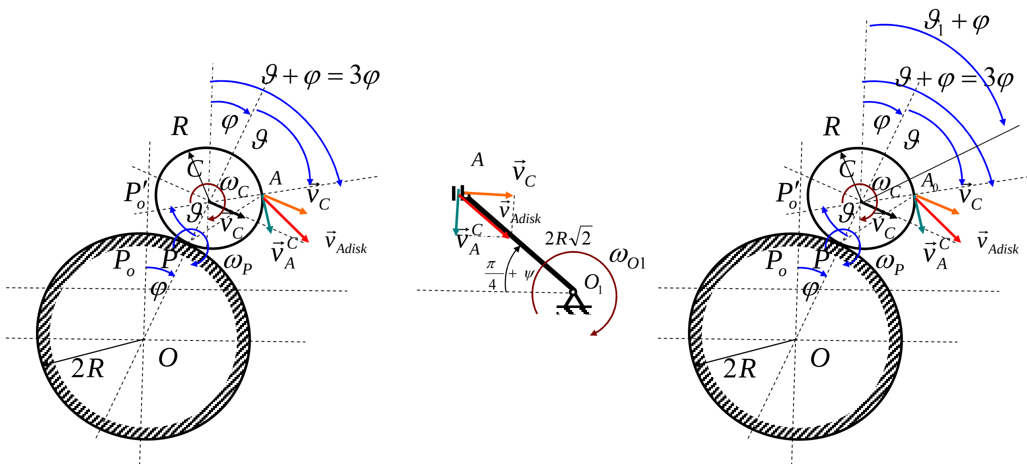
Koliku je, u početnom trenutku imao kinetičku energiju taj sistem, a koliku potencijalnu energiju? Da li mehanizam ograničava oblast kotrljanja diska po cilindričnoj površi?



SLIKA BR. **2**

REŠENJE DRUGOG ZADATKA: Iz naznačene konfiguracije sistema na slici 2., kotrljanje diska je moguuće samo u smeru prema štapu, ali je to moguće samo u u ograničenoj oblasti koju ograničavaju geometrijske konačne veze štapa, diska i cilindrične površi. To je vidljivo na slici 2. a* , b* i c* na kojoj je prikazan sistem sa naznačenim koordinatama φ i ϑ kojim se odredjuje položaj diska na cilindričnoj površi i u odnosu na štap. Pri kotrljanju diska po cilindričnoj površi trenutni pol se pomeri po luku od P_O do P dok se po disku pomeri od tačke P_O' do P, a to su lukovi centralnih uglova φ i ϑ te važi:

$$2R\varphi = R\vartheta$$



te postoji jedna veza izmedju tih koordinata. Položaj štapa ćemo meriti pd njegovog položaja u početnom trenutku i naznačimo taj otklon uglom ψ . S obzirom da klizač vezuje disk i štap, to ćemo iz te veze napisati vezu izmedju koordinata φ , ϑ i ψ, postavljajući geometrijske veze na slici br. 2.

$$3R\cos\varphi + R\cos(\vartheta_1+\varphi) = R + 2R\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\psi\right)$$

$$3R\sin\varphi + R\sin(\vartheta_1+\varphi) + 2R\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\psi\right) = 3R$$

ili

$$3\cos\varphi + \cos(\vartheta_1+\varphi) = 1 + 2(\sin\psi + \cos\psi)$$

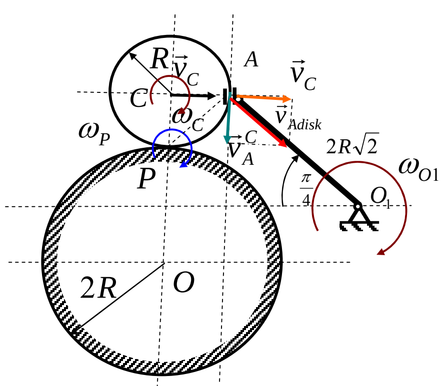
$$3\sin\varphi + \sin(\vartheta_1+\varphi) + 2(\cos\psi - \sin\psi) = 3$$

odnosno

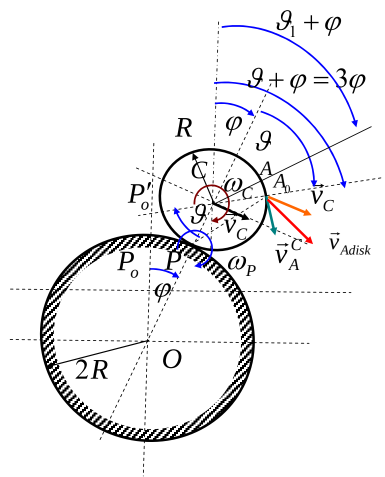
$$3\cos\varphi + \cos(\vartheta_1+\varphi) - 1 = 2(\sin\psi + \cos\psi)$$

$$3\sin\varphi + \sin(\vartheta_1+\varphi) - 3 = 2(-\cos\psi + \sin\psi)$$

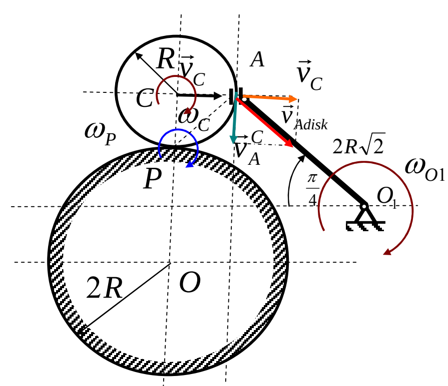
odnosno kada saberemo, odnosno oduzmemo prethodne jednačine dobijamo:



Slika br. **2. a***



Slika br. **2. b***



Slika br. **2. c***

$$\sin\psi = \frac{1}{4}\left[3(\cos\varphi + \sin\varphi) + (\cos(\vartheta_1+\varphi) + \sin(\vartheta_1+\varphi)) - 4\right]$$

$$\cos\psi = \frac{1}{4}\left[3(\cos\varphi - \sin\varphi) + (\cos(\vartheta_1+\varphi) - \sin(\vartheta_1+\varphi)) + 2\right]$$

$$\cos(\vartheta_1+\varphi) = 1 + 2(\sin\psi + \cos\psi) - 3\cos\varphi$$

$$\sin(\vartheta_1+\varphi) = 3 + 2(-\cos\psi + \sin\psi) - 3\sin\varphi$$

Veza iymedju generalisane koordinate φ i ugla ψ je:

$$[3 + 2(-\cos\psi + \sin\psi) - 3\sin\varphi]^2 + [1 + 2(\sin\psi + \cos\psi) - 3\cos\varphi]^2 = 1$$

Diferenciranjem

$$2[3 + 2(-\cos\psi + \sin\psi) - 3\sin\varphi][2\dot{\psi}(\sin\psi + \cos\psi) - 3\dot{\varphi}\cos\varphi] +$$

$$+ 2[1 + 2(\sin\psi + \cos\psi) - 3\cos\varphi][2\dot{\psi}(\cos\psi - \sin\psi) + 3\dot{\varphi}\sin\varphi] = 0$$

Iz svega prethodnog zaključujemo da se radi o sistemu sa jednim stepenom slobode kretanja i za generalisanu koordinatu biramo ugao φ preko koga smo izrazili ostale dve koordinate.

$$\sin\psi = \frac{1}{4}\left[3(\cos\varphi + \sin\varphi) + (\cos(\vartheta_1 + \varphi) + \sin(\vartheta_1 + \varphi)) - 4\right]$$

$$\cos\psi = \frac{1}{4}\left[3(\cos\varphi - \sin\varphi) + (\cos(\vartheta_1 + \varphi) - \sin(\vartheta_1 + \varphi)) + 2\right]$$

Na slici 2. a* , b* i c* prikazan je plan brzina pojedinih tačaka diska, C i A kao i ugaona brzine kotrljanja diska po polukruđnoj površi ω_P i ugaona brzina sopstvenog obrtanja diska oko njegovog centra ω_C. Tačka dodira diska i križne cilindrične površi P je trenutni pol rotacije diska pri kotrljanju te je ugaona brzine kotrljanja diska po polukruđnoj površi ω_P :

$$\omega_P = \frac{v_C}{R} = \frac{3R\dot{\varphi}}{R} = 3\dot{\varphi}$$

I jednaka je ugaonoj brzini sopstvene rotacije diska oko svoje ose ω_C :

$$\omega_C = \omega_P = \frac{v_C}{R} = 3\dot{\varphi}$$

Do tog zaključka možemo doći i na sledeci način: Pri kotrljanju diska po cilindričnoj površi trenutni pol se pomeri po luku od P_O do P dok se po disku pomeri od tačke P_O' do P, a to su lukovi centralnih uglova φ i ϑ te važi:

$$2R\varphi = R\vartheta$$

te se disk pri tom kotrljanju okretao brzinom ω_C'

$$\omega_C' = \dot{\vartheta} = 2\dot{\varphi} = 2\frac{v_C}{3R}$$

medjutim s obzirom da se i površ spuštala to je diks imao i dodatno zaokretanje od ugla φ, tako da je ukupan ugao za koji se disk zaokrenuo pri kotrljanju bez klizanja u odnosu na svoj početni položaj naznačen na slici 1. a* je $\vartheta + \varphi$, te je ugaona brzina njegovog sopstvenog obrtanja ω_C oko svog centra:

$$\omega_C = \omega_C' + \omega_C'' = \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} = 3\dot{\varphi} = \frac{v_C}{R} = \omega_P$$

Diferenciranje prethodnog izraza ’veze izmedju koordinata φ i ψ dobijamo:

$$\dot{\psi}\cos\psi = \frac{1}{4}\left[3\dot{\varphi}(-\sin\varphi + \cos\varphi) + (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\varphi})(-\sin(\vartheta_1 + \varphi) + \cos(\vartheta_1 + \varphi))\right]$$

Te je ugaona brzina obrtanja štapa jednaka:

Sada je lako sastaviti izraze za kinetičku i potencijalnu energiju za štap i disk:.

Kinetička energija diska je kinetička energija rotacije diska oko oce trenutne rotacije kroz pol P ugaonom brzinom $\omega_P = 3\dot{\varphi}$.Aksijalni moment inercije mase diska za osu kroz trenutni pol je:

$$\mathbf{J}_{C\zeta} = \frac{3}{2}mR^2$$

Kinetička energija štapa je kinetička energija rotacije štapa oko oce rotacije kroz zglob O_1 ugaonom brzinom $\omega_{O1} = \dot{\psi}$ .Aksijalni moment inercije mase štapa za osu kroz kroz zglob O_1 je:

$$\mathbf{J}_{O1\zeta} = \frac{1}{12}M\ell^2 = \frac{1}{12}M\left(2R\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{3}MR^2$$

Izraz za kinetičku energiju je sada:

$$E_k = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C\zeta}\omega_C^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{O1\zeta}\omega_{O1}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2(3\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}^2$$

Promena potencijalne enrgije je rezultat rada sila težine diska i štapa pri spuštanju odnosno podizanju njihovih centara masa za:

$$h_C = 3R(1-\cos\varphi)$$

$$h_T = R\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\psi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = R[\sin\psi+\cos\psi-1]$$

Izraz za promenu potencijalne energije je:

$$E_p = -mgh_C + Mgh_T$$

$$E_p = -3mgR(1-\cos\varphi) + MgR[\sin\psi+\cos\psi-1]$$

Kako je sistem konzervativan, jer su sile koje dejstvuju na sistem konzervativne – potiču sve od sopstvene teđine diska i štapa, te zato važi teorema koja tvrdi da je ukupna energija sistema konstantna u toku kretanja sistema i jednaka mehaničkoj energiji sistema u početnom trenutku.

$$E = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = const$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2(3\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}^2 - 3mgR(1-\cos\varphi) + MgR[\sin\psi+\cos\psi-1] = const$$

gde je veza izmedju koordinata:- generalisane koordinate φ i ugla ψ je:

$$[3+2(-\cos\psi+\sin\psi)-3\sin\varphi]^2 + [1+2(\sin\psi+\cos\psi)-3\cos\varphi]^2 = 1$$

Diferenciranjem

$$2[3+2(-\cos\psi+\sin\psi)-3\sin\varphi]2\dot{\psi}\|(\sin\psi+\cos\psi)-3\dot{\varphi}\cos\varphi\| +$$
$$+2[1+2(\sin\psi+\cos\psi)-3\cos\varphi][2\dot{\psi}(\cos\psi-\sin\psi)+3\dot{\varphi}\sin\varphi] = 0$$

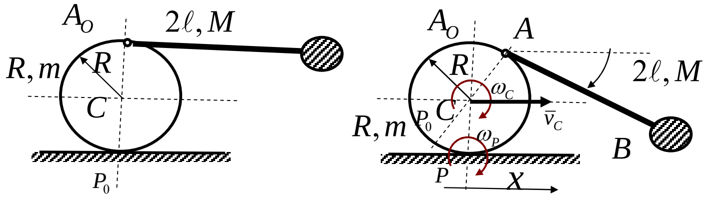
U početnom trenutku, početni uslovi su: $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\frac{\omega_C(0)}{3} = \dot{\varphi}(0) = \frac{v_C}{3R} = \frac{\omega_P(0)}{3}$ $\dot{\psi}(0) = \omega_{O1}(0) = \frac{v_C}{2R}$ ☹odredjeni u prethodnom kinematičkom zadatku), te je ukupna energija sistema u tom trenutku:

$$(E_k+E_p)_0 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2(3\dot{\varphi}(0))^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}(0)^2 - 3mgR(1-\cos\varphi(0)) + MgR[\sin\psi(0)+\cos\psi(0)-1] = const$$

$$(E_k+E_p)_0 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2(3\dot{\varphi}(0))^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}(0)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2 + \frac{1}{3}MR^2\left(\frac{v_C}{2R}\right)^2 = const$$

$$(E_k+E_p)_0 = \frac{5}{6}mv_C^2 = const \quad \text{za} \quad M = m$$

TREĆI ZADATAK. (Dinamika): Disk mas m, poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj glatkoj površi. Ravan diska je u vertikalnoj ravni. Za konturu diska zglobno je vezan jedan kraj štapa AB, dužine 2ℓ, mase M dok je na drugom kraju nosi materijalnu tačku mase m.



Slika br.**3**

REŠENJE TREĆEG ZADATKA. (DINAMIKA):

ČETVRTI ZADATAK (Kinematika i Dinamika): Sistem prikazan na slici sastoji se od dva diska poluprečnika R, masa po $2m$, sa centrima C_1 odnosno C_2 spojena svema polugama $\overline{C_1A}$ i $\overline{AB}$ jednakih dužina $2R\sqrt{2}$ i masa po $3m$, koji su sa po krajem zglobno spojeni u tački A za klizač mase m, koji može sa klizi brz trenja u vertikalnim vodjicama, dok su im drugi krajevi spojeni zglobno za odgovarajuči disk i to kraj C_1 štapa $\overline{C_1A}$ za centra prvog diska koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, a kraj B drugog štapa za obod drugog diska sa centrom u C_2 koji se kotrlja bez klizanja po cilindričnoj kružnoj površi poluprečnika $2R$ sa centrom u tački O_1. Ravan koja sadrži oba diska je upravna na osu cilindrične površi. U položaju prikazanom na slici kada oba štapa zaklapaju uglove of po $\frac{\pi}{4}$ sa horizontom, a centar C_1 prvog diska ima brzinu $v_{C1} = v_0$ i ubrzanje $a_{C1} = a_0$ usmerene nalevo, odrediti:

a* Koliko stepeni slobode kretanja ima sistem? Koje su mogućnosti za izbor odgovarajućeg broja generalisanih koordinata?

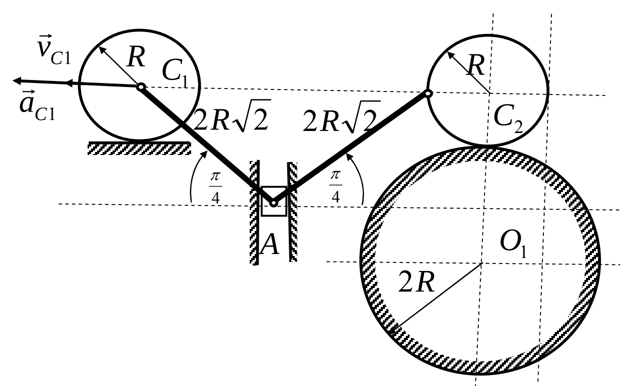
b* U naznačenom polžaju odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje drugog diska, kao i brzine klizača i ugaone brzine u ugaona ubrzanja štapoba i klizača.

c* U položaju naznačenom na slici odrediti odrediti kinetičku energiju sistema.

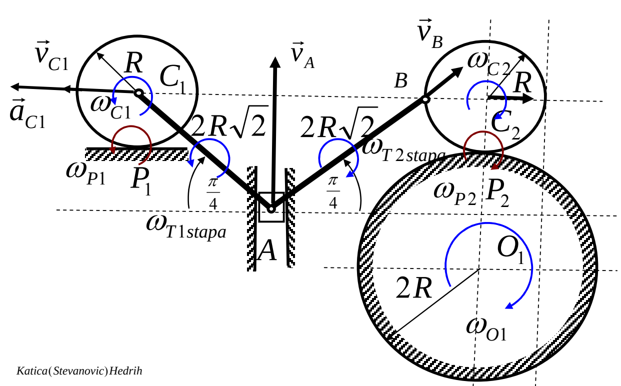
d* Kolika je ukupna energija sistema sa kojom se sistem kreće ako se zna da je u položaju na slici brzina centra C_1 prvog diska bila $v_{C1} = v_0$?

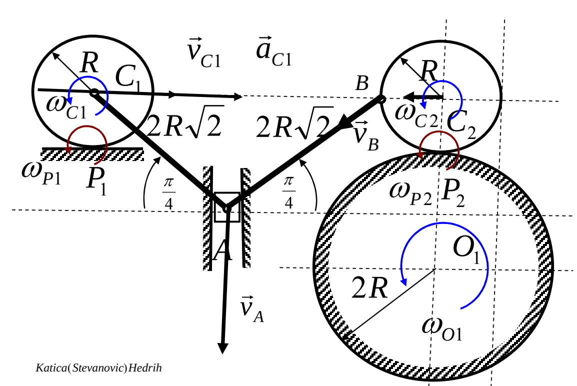
e* Da li se ukupna energija kretanja ovog sistema menja u toku kretanja istog?

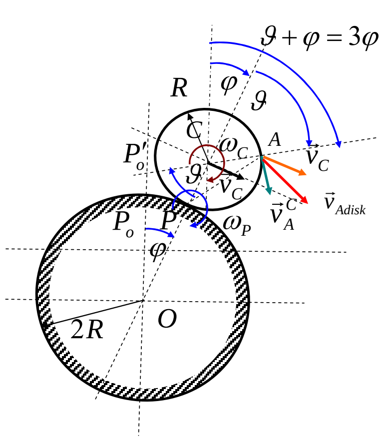
g* Napisati izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema u proizvoljnom položaju u funkciji izabrane generalisane koordinate.

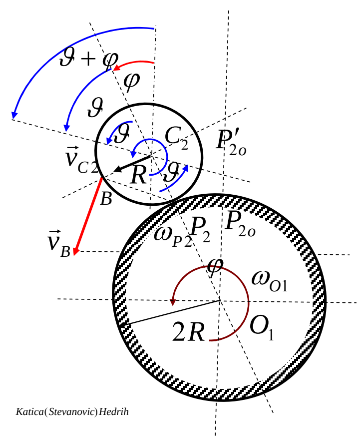


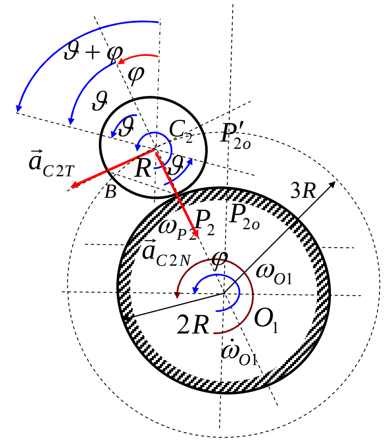
REŠENJE ČETVRTOG ZADATKA (Kinematika i Dinamika): Slikama!!

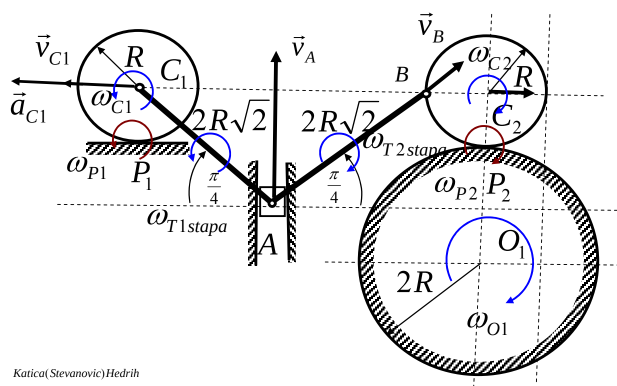


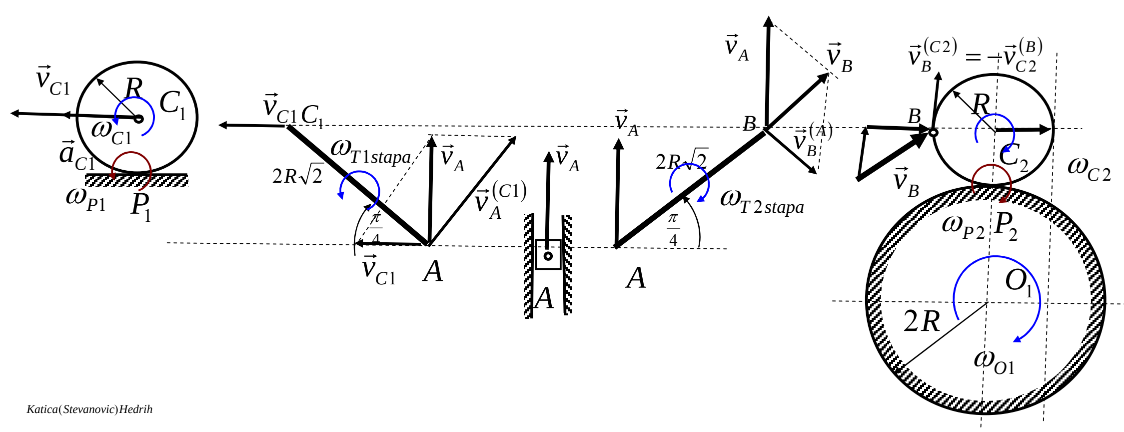


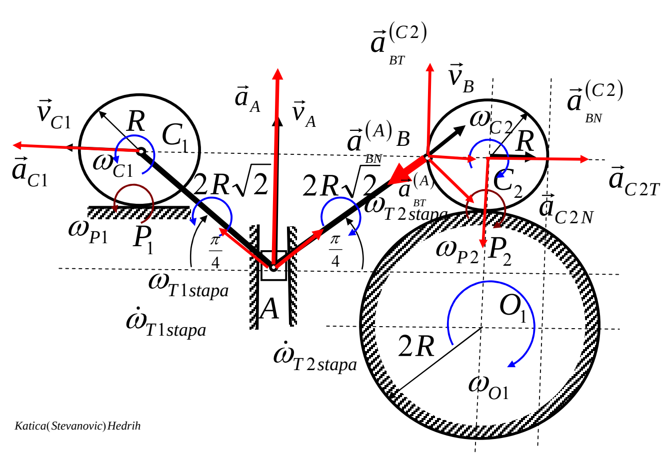

$\vartheta + \varphi = 3\varphi$

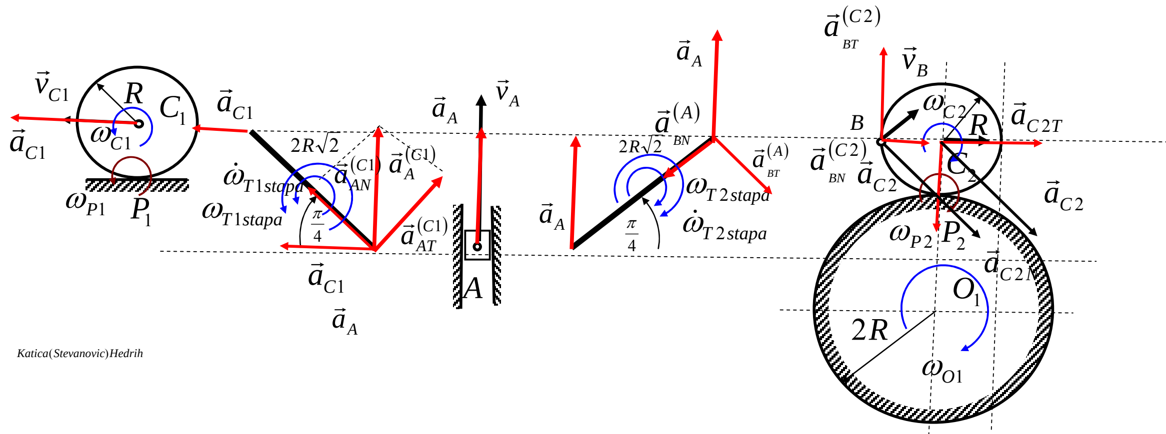

Katica(Stevanovic)Hedrih



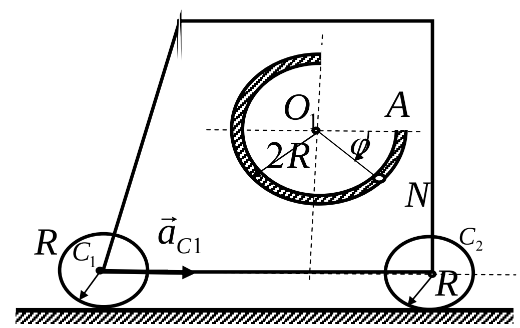

Katica(Stevanovic)Hedrih


Katica(Stevanovic)Hedrih


Katica(Stevanovic)Hedrih



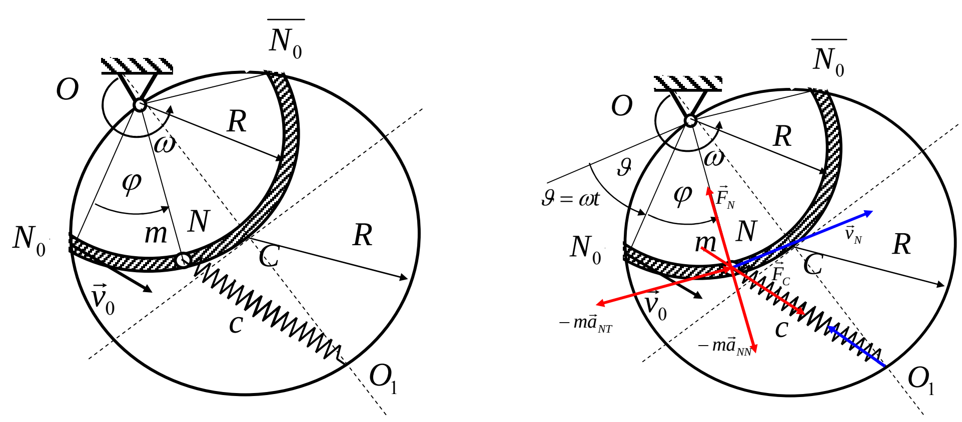
PETI ZADATAK (Kinematika i Dinamika):



REŠENJE PETOG ZADATKA (Kinematika i Dinamika):

ŠESTI ZADATAK (Dinamika): Materijalni sistem se sastoji od materijalne tačke N mase m koja se kreće po glatkom kružnom žljebu $\overline{N_0 N \overline{N_0}}$ sa centrom u O, poluprečnika R, koji je urezan u disk poluprečnika R, koji se obrće u horizontalnoj ravni, konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko nepomične ose upravne na površ diska i koja prolazi kroz tačku O na njegovom obodu u kojoj se nalazi zglobu, i opruge krutosti c, koja vezuje materijalnu tačku u proizvoljnom položaju N na žljebu sa tačkom O_1 na suprotnom kraju prečnika $\overline{OO_1}$ naq obodu diska. Ako materijalna tačka započinje kretanje po žljebu iz položaja N_0 brzinom v_0, kada je opruga nenapregnuta, odrediti reakciju veze – ukupan pritisak reakcije veze na žljeb u proizvoljnom položaju u funkciji koordinate φ koja odredjuje njen položaj na disku.

REŠENJE ŠESTOG ZADATKA (Dinamika):



SEDMI ZADATAK (Dinamika, analitička mehanika): Materijalni sistem se sastoji od pet homogenih diskova i dva tega, od kojih se prvi, homogeni disk A mase $2m$ i poluprečnika R kotrlja bez klizanja po horitontalnoj glatkoj ravni, drugi i peti istih masa i poluprečnika kao prvi, ali učvršćeni zglobno u odgovarajućim centrima C_2 i C_4 kroz koje prolaze ose upravne na površi diskova oko kojih se oni mogu obrtati, dok su treći i četvrti disk, N i M kruto spojeni i svojim centrima postavljeni na istu osu oko koje mogu da se zajedno. Na disk A je namotano nerastegljivo uže, koje je prebačeno preko koturoca B i D, dok je njegov središnji deo namotan na kalem koji čine treći i četvrti disk i na drugom kraju je vezano za teret mase $4m$ koji može da klizi po glatkoj strmoj ravni. O osu kalema NM visi teg mase m. Ceo sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Ako je sistem bio u mirovanju, odrediti ;

a* broj stepeni slobode kretanja i izaberi generalisane koordinate, i pomoću njih odredi koordinate položaja svakog od diskova i tehova, kao i brzine istih;

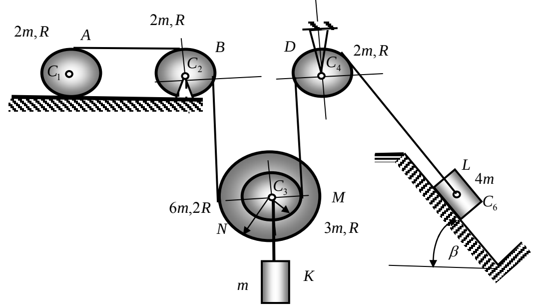
b* izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema;

c* ukupnu energiju sistema u toku kretanja;

d* diferencijalne jednačine kretanja sistema, koristeći Lagrange-ove jednačine druge vrste;

e* sile u delovima užadi.

f* Ako u početnom položaju sistem nije bio u miru, nego je imao početnu brzinu zadatu početnom brzinom centra prvog diska A, da li će diferencijalne jednačine kretanja sistema biti iste kao u prethodnom?



REŠENJE SEDMOG ZADATKA (Dinamika, analitička mehanika):

OSMI ZADATAK. Za ***materijalni sistem*** prikazan na slici 2. na kojoj su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** koturova u obliku homogenih tankih diskova, uz pretpostavku da je uže nerastegljivo, odrediti:

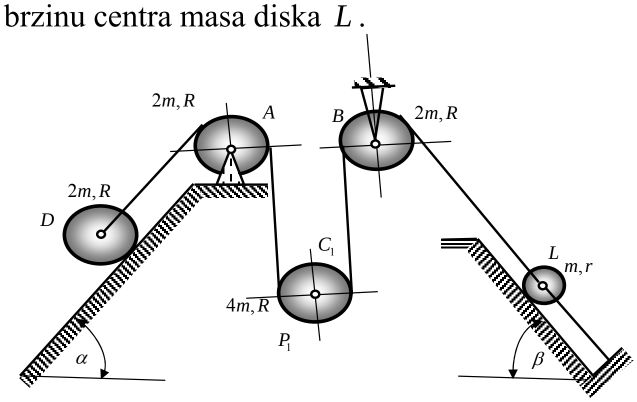
a* Broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Napisati integral energije sistema; Da li je sistem konzervativan? Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema?

e* Ugaonu brzinu i brzinu centra masa diska L.



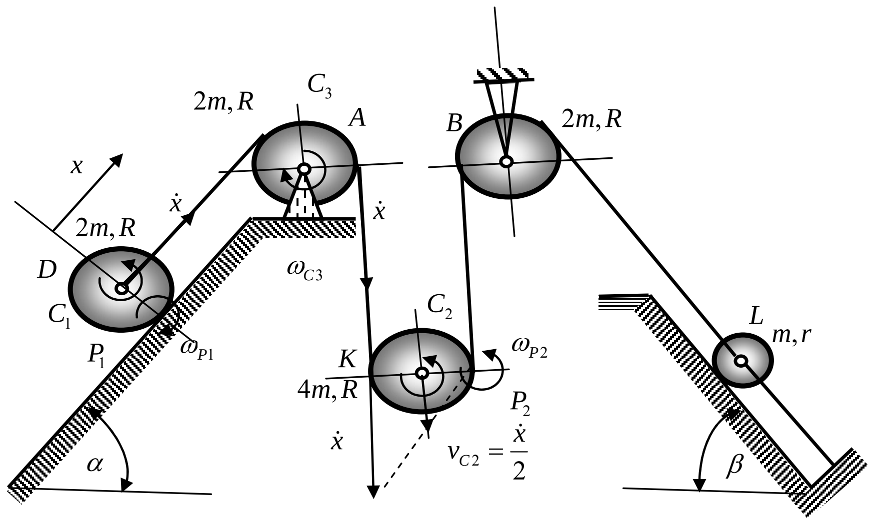
Slika 2

REŠENJE OSMOG ZADATKA: a* i b* Prvo je potrebno odrediti broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema; Pretpostavićemo da je disk L u početnom trenutku bio u miru, kao i da se uže, kojim je vezan za zid, ne sabija pa samim tim uvodimo ptretpostavku da su koturovi L i B nepokretni.

Analizirajući mogućnost pokretanja pojedinh delova sistema, vidimo da se kotur označen sa D može kotrljati niz i uz strmu ravan i da je dovoljno jednom koordinatom odrediti položaj njegivog centra C_1 u odnosu na neki položaj fiksiran u odnosu na nepokretnu strmu ravan. Usvojimo da je to koordinata x usmerena paralelno sa strmom ravni i uz strmu ravan. Kako je uže nerastegljivo i vezano za centar C_1 tog diska to znači da se njegov kraj pomera brzinom $v_{C1} = \dot{x}$, pa i celo uže ima tu brzinu, pa je brzina tačaka na periferiji kotura A sa nepokretnim centrom C_3, jednaka toj brzini $\dot{x}$, te je ugaona brzina okretanja tog diska oko ose kroz njegov centar $\omega_{C3} = \frac{\dot{x}}{R}$, gde je R poluprečnik tog kotura. Takodje možemo odrediti trenutnu ugaonu brzinu kotrljanja diska D uz strmu ravan, oko ose kroz trenutni pol P_1, koja iznosi $\omega_{P1} = \frac{v_{C1}}{R} = \frac{\dot{x}}{R} = \omega_{C1}$. Nastavljajući dalje analizu kretanja nerastegljivog užeta vidimo da ono nosi disk čiji se centar pomera u vertukalnom pravcu, dok se on kotrlja po nepokretnom delu nerastegljivog užeta koje je dalje prebačeno preko kotura B i vezano za centar diska L, koji je takodje, nerastegljivim delom užeta vezan za nepokretni deo zida, a paralelno drugoj, na desnoj strani strmoj ravni. Ako analiziramo taj deo užeta vidimo da je on nepokretan, pa je i centar diska L nepokretan, a samim tim i deo užeta prema koturu B, što znači da i taj kotur miruje. Kako je deo užeta izmedju kotura A i kotura K pokretan, te je brzina tačke K i užeta i kotura $v_K = \dot{x}$. Brzina tačke P_2 i užeta i kotura je jednaka nuli, jer je ta tačka trenutni pol kotrljanja diska K po užetu, te nije teško odrediti brzinu centra C_2 koja je jednaka polovini brzine $v_K = \dot{x}$, jer se tačka K nalazi na dva puta udaljenijem položaju od trenutnog pola rotacije kotrljanja tog diska po užetu, u odnosu na rastojanje centra masa tog diska C_3. Sada pišemo da je $v_{C2} = \frac{\dot{x}}{2}$. Trenutna ugaona brzina kotrljanja tog diska oko trenutne ose rotacije kroz ternutni pol P_2, je $\omega_{P2} = \frac{v_K}{2R} = \frac{v_{C2}}{R} = \frac{\dot{x}}{2R}$, ugaona brzina sopstvenog obrtanja kroz osu upravnu na disk i koja prolazi kroz njegov centar je jednaka $\omega_{C2} = \omega_{P2} = \frac{\dot{x}}{2R}$.

Na osnovu ove analize zaključujemo da materijalni sistem prikazan na slici 2 ima samo jedan stepen slobode kretanja i da je dovoljno izabrati samo jednu koordinatu i to koordinatu x koju smo usvojili za generalisanu koordinatu sistema.

Napomena: Izbor generalisanje koordinate se može izvesti i na više drugih načina. Naprimer moguće je uzeti za generalisanu koordinatu i pomeranje centra diska C_2 u vertikalnom pravcu naprimer y, i onda momoću nje izraziti sva ostala pomeranja, ili pak ugao obrtanja diska A, naprimer φ. Ako postupimo na neko od ovih drugih načina imali bi smo da je $x = 2y$ ili $x = R\varphi$ ili $\varphi = \frac{2y}{R}$, Mi smo se opredelili da za generalisanu koordinatu izaberemo koordinatu x translatornog pomeranja centra C_1 dika D i pomoću nje ćemo dalje rešavati zadatak. Važno je samo istaći da izbor koordinatnog sistema u kome rešavamo zadatak ne utiče na svojstva dinamike jer su ona invarijantna u odnosu na izbor koordinatnog sistema.



Slika 2. a*

c* Sada nije teško odrediti izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Jer smo u prethodnoj analizi karaktera pokretljivosti pojedinih materijalnih tela u sistemu zaključili i sledeće:

Disk D izvodi ravansko kretanje jednom rotacijom oko ose trenutne rotacije kroz tačku P_1 koja se pomera po strmoj ravni, pa je kinetička energija kretanja tog diska energija rotacije oko ose kroz tačku P_1. Ta kinetička energija je jednaka polovini proizvoda aksijalnog momenta inercije diska za trenutnu osu rotacije i kvadrata trenutne ugaone brzine oko te ose:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P1\zeta}\omega_{P1}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C1\zeta}\omega_{C1}^2 + \frac{1}{2}2mv_{C1}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

Kinetička energija diska A je kinetička energija rotacije oko ose kroz centar diska koji rotira ugaonom brzinom ω_{C3}, a koju smo već odredili: $\omega_{C3} = \frac{\dot{x}}{R}$, te je:

$$E_{k3} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C3\zeta}\omega_{C3}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Disk K izvodi ravansko kretanje jednom rotacijom oko ose trenutne rotacije kroz tačku P_2 koja se pomera u vertikalnom pravcu po nepokretnom delu užeta, pa je kinetička energija kretanja tog diska energija rotacije oko ose kroz tačku P_2. Ta kinetička energija je jednaka polovini proizvoda aksijalnog momenta inercije mase diska za trenutnu osu rotacije kroz P_2 i kvadrata trenutne ugaone brzine $\omega_{C2} = \omega_{P2} = \frac{\dot{x}}{2R}$ oko te ose:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P2\zeta}\omega_{P2}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C2\zeta}\omega_{C2}^2 + \frac{1}{2}4mv_{C2}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}4mR^2\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

Vidimo da se kinetička energija diskova D i K može odrediti kao kinetička energija ravanskog kretanja tela, a prema Kenigovoj teoremi je jednaka zbiru kinetičke energije translaciji brzinom centra masa kao da se sva masa sažeta u tom centru i kinetičke energije rotacije oko ose kroz centar masa ugaonom brzinom rotacije oko ose kroz centar masa, što smo i napisali u prethodnim izrazima.

Ukupna kinetička energija posmatranog materijalnog sistema je:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P1\zeta}\omega_{P1}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P2\zeta}\omega_{P2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C3\zeta}\omega_{C3}^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}^2 = \frac{11}{4}m\dot{x}^2$$

Na tela materijalnog sistema dejstvuju sile težine sa napadnim tačkama u centrima masa (središtima tela), koja čine posmatrani sistem. Kako se središta masa C_1 i C_2 diskova D i K pomeraju, a ostalih miruju to se menja potencijalna energija sistema, koja je jednaka radu tih konzervativnih sila na pomeranjima njihovih napadnih tačaka: $h_{C1} = x\sin\alpha$ - podizanje i $h_{C2} = \frac{x}{2}$.- spuštanje, te je rad sila težine:

$$\mathbf{A} = -2mgh_{C1} + 4mgh_{C2} = -2mgx\sin\alpha + 4mg\frac{x}{2} = 2mg(1-\sin\alpha)x$$

Promena potencijalne enrgije sistema je jednaka radu konzervativnih sila sa promenjenim znakom:

$$E_p = -\mathbf{A} = -2mg(1-\sin\alpha)x$$

Ukupna energuija sistema je:

$$E = E_k + E_p = \frac{11}{4}m\dot{x}^2 - 2mg(1-\sin\alpha)x = E_{k0} + E_{p0} = \frac{11}{4}mv_0^2 = const$$

gde v_0 početna brzina kretanja sistema u početnom trenutku.

Znači da se ukupna energija datog materijalnog sistema ne menja u toku vremena i u toku kretanja sistema je konstantna i njena vrednost zavisi od početnih uslova, odnosno od početne brzine v_0. Prethodni izraz koji smo napisali predstavlja integral energije sistema i on se može napisati samo ako je sistem konzervativan, što je u posmatranom slučaju zadovoljeno. Ukupna snaga rada svih sila koje dejstvuju na ovaj sistem je jednaka nuli, jer nema promene ukupne energije sistema. Možemo odrediti snagu rada pojedinih sila koje dejstvuju na sistem, a to je naprimer snaga rada sila težine diskova:

$$\frac{d\mathbf{A}_1}{dt} = 2mg\sin\alpha v_{C1} = 2mg\dot{x}\sin\alpha$$

$$\frac{d\mathbf{A}_2}{dt} = -4mgv_{C2} = -4mg\frac{\dot{x}}{2} = -2mg\dot{x}$$

Sledi da je snaga rada konzervativnih sila:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{A}_2}{dt} = 2mg(\sin\alpha - 1)\dot{x}$$

Snaga rada unutrašnjih sila sistema - sila u užadima je jednaka nuli, jer se javljaju u parovima. Snaga rada reakcija veza, otpora strme ravni je jednaka nuli, jer je sila otpora strme ravni upravna na pravac brzine kretanja centra masa tog diska. Snaga rada sila inercije sistema je jednaka promeni kinetičke energije sistema po vremenu:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{11}{2}m\dot{x}\ddot{x}$$

Kako je:

$$P_{sist} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = \frac{11}{2}m\dot{x}\ddot{x} - 2mg(1-\sin\alpha)\dot{x} = 0$$

d* Kako sistem ima samo jedan stepen slobode kretanja njegovo kretanje možemo opisati jednom diferencijalnom jednačinom za generalisanu koordinatu x. Lagrange-ova jednačina druge vrste za generalisanu koordinatu x se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

te je posle diferenciranja

$$\frac{11}{2}m\ddot{x} - 2mg(1-\sin\alpha) = 0$$

odakle sledi da je:

$$\ddot{x} = \frac{4}{11}g(1-\sin\alpha)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja posmatranog materijalnog sistema izražena pomoću izabrane generalisane koordinate. To jednačinu možemo dobiti i iz uslova da je snaga rada svih sila sistema jednaka nuli, jer je sistem konzervativan, što smo već napisali u obliku:

$$P_{sist} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = \frac{11}{2} m\dot{x}\ddot{x} - 2mg(1-\sin\alpha)\dot{x} = 0$$

odakle skraćivanjem sa $\dot{x}$ dobijamo istu diferencijalnu jednačinu, kao i u prethodnom slučaju primene Lagrange/ova jednačina druge vrste za generalisanu koordinatu x:

$$\ddot{x} = \frac{4}{11} g(1-\sin\alpha)$$

Time smo odredili ubrzanje centra diska koji se kotrlja po strmoj ravni:

$$a_{C1} = \frac{4}{11} g(1-\sin\alpha)$$

dok je ubrzanje centra C_2 diska K:

$$a_{C2} = \frac{2}{11} g(1-\sin\alpha)$$

Ako pak želimo da odredimo i zakon kretanja, što se zadatkom nije tražilo, dovoljno je integraliti dva puta dobijenu diferencijalnu jednačinu pa je:

$$\ddot{x} = \frac{4}{11} g(1-\sin\alpha)$$

$$v_{C1}(t) = \dot{x}(t) = \frac{4}{11} gt(1-\sin\alpha) \pm v_0$$

$$x(t) = \frac{2}{11} gt^2(1-\sin\alpha) \pm v_0 t$$

Znak $\pm$ zavisi od usmerenja početne brzine centra diska, da li je uz ili niz strmu ravan.

U slučaju da je nagibni ugao strme ravni jednak nuli, kada se disk D kotrlja po horizontalnoj ravni ubrzanje, brzina i predjeni put su:

$$\ddot{x} = \frac{4}{11} g$$

$$v_{C1}(t) = \dot{x}(t) = \frac{4}{11} gt \pm v_0$$

$$x(t) = \frac{2}{11} gt^2 \pm v_0 t$$

U slučaju da je nagibni ugao strme ravni jednak $\frac{\pi}{2}$, kada se disk D kotrlja po vertikalnoj ravni, uz pretpostavku da se odvaja od nje, ubrzanje, brzina i predjeni put su:

$$\ddot{x} = 0$$

$$v_{C1}(t) = \dot{x}(t) = \pm v_0$$

$$x(t) = \pm v_0 t$$

Odakle zaključujemo da ako je sistem bio u miru ostaće u miru i ravnoteži, pa nema kretanja. A ako je sistm dobio početnu brzinu, centri masa diskova kretaće se jednoliko konstantnim brzinama i to $v_{C1}(t) = \dot{x}(t) = \pm v_0$ i $v_{C1}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{2} = \pm \frac{v_0}{2}$.

Zadatkom se ne traže sile u delovima uzadi, ali ih nije teško odrediti primenom teoreme o promeni impulsa kretanja i momenta impulsa kretanja na svaki od diskova, na koje smo dekonponovali sistem i postavili unutrašnje sile u užadima, kao sile uzajamnog dejstva tih podsistema na sistem.

Drugi opštiji pristup rešavanju zadatka, kada početna brzina kretanja diska L nije jednaka nuli. :

a* i b* Ako ne uvedemo pretpostavke, kao u prethodnom, pristupu i pretpostavimo da centar C_5 diska L ima početnu brzinu koja je usmerena niz strmu ravan i iznosi v_{0C5} onda zadatak moramo rešavati posmatrajući sistem sa dva stepena slobode kretanja. Zato ćemo analizirati pokretljivost pojedinih tela – diskova i pokazati da sistem tada ima dva stepena slobode kretanja u jeddnoj fazi kretanja, a jedan kada se ostvari dejstvo jednostrano-zadržavajuće veze.

Prvo je potrebno odrediti broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

Analizirajući mogućnost pokretanja pojedinh delova sistema, vidimo da se kotur označen sa D može kotrljati niz i uz strmu ravan i da je dovoljno jednom koordinatom odrediti položaj njegivog centra C_1 u odnosu na neki položaj fiksiran u odnosu na nepokretnu strmu ravan. Usvojimo da je to koordinata x usmerena paralelno sa strmom ravni i uz strmu ravan. Kako je uže nerastegljivo i vezano za centar C_1 tog diska to znači da se njegov kraj pomera brzinom $v_{C1} = \dot{x}$, pa i celo uže na tom delu do kotura A sa centrom u C_3 oko koga se obrće, ima tu brzinu, pa je brzina tačaka na periferiji kotura A sa nepokretnim centrom C_3, jednaka toj brzini $\dot{x}$, te je ugaona brzina okretanja tog diska oko ose kroz njegov centar $\omega_{C3} = \frac{\dot{x}}{R}$, gde je R poluprečnik tog kotura. Takodje možemo odrediti trenutnu ugaonu brzinu kotrljanja diska D uz strmu ravan, oko ose kroz trenutni pol P_1, koja iznosi $\omega_{P1} = \frac{v_{C1}}{R} = \frac{\dot{x}}{R} = \omega_{C1}$.

Nastavljajući dalje analizu kretanja nerastegljivog užeta vidimo da ono nosi disk čiji se centar pomera u vertukalnom pravcu, dok se on kotrlja po delu nerastegljivog užeta koje je dalje prebačeno preko kotura B i vezano za centar diska L, koji je takodje, nerastegljivim delom užeta vezan za nepokretni deo zida, a paralelno drugoj, na desnoj strani strmoj ravni. Ako analiziramo pokretljivost tog dela užeta od kotura B do kotura L, koji je dalje vezan nerastegljivim užetom za nepokretni zid V, te možemo doći do sledećih zaključaka: taj deo užeta je jednostrano-zadržavajuća veza, pa se i centar diska i disk L ne mogu kretati naviše uz tu strmu ravan, dalje nego što je domet dela užeta C_5V, ali ako je taj deo užeta savitljiv kotur bi se mogao pokretati kotrljajući se niz tu strmu ravan, pa ćemo zato pretpostaviti da je njegvo kretanje moguće u tom pravcu i označićemo pomeranje njegovog centra C_5 paralelno strmoj ravni sa y, kako je to naznačeno na slici. Pri tome postavljamo uslov da je ta koordinata uvek veća ili jednaka nuli $y \geq 0$, i da zbog jednostrano zadržavajuće veze ne može biti manja od nule (suprotnosmerna). Ugaona brzina kotrljanja diska L niz strmu ravan oko trenutnog pola P_5, je $\omega_{P5} = \frac{\dot{y}}{r}$.

Kako je taj deo užeta prebačen preko koturu B, što znači da u slučaju mogućeg kretanja diska L niz strmu ravan tačke na njegovoj konturi imaju periferijsku brzinu $\dot{y}$, a ugaona brzina obrtanja tog diska B oko ose kroz njegov nepokretni centar C_4 je $\omega_{C4} = \frac{\dot{y}}{R}$. U slučaju kada bi disk L mirovao, onda bi i disk B mirovao. Medjutim treba ispitati koji se od ova dva slučaja javlja. Zato polazimo od pretpostavke da sistem ima dva stepena slobode kretanja i za generalisane koordinate biramo koordinate x i y, koje merimo od naznačenih položaja na slici, pri čemu koordinatu y merimo od položaja u kome je deo užeta C_5V zategnut, pa je ograničenje za tu koordinatu $y(t) \geq 0$ i $\dot{y}(0) \geq 0$.

Kako je deo užeta izmedju kotura A i kotura K pokretan, te je brzina tačke K_A i užeta i kotura $v_{KA} = \dot{x}$, dok je deo užeta izmedju kotura K i kotura B pokretljiv brzinom $\dot{y}$, te je brzina tačke K_B, jenaka $v_{KB} = \dot{y}$ Brzina tačke P_2 kotura, koja se nalazi u preseku normala na brzine $v_{KA} = \dot{x}$ i $v_{KB} = \dot{y}$ i duži koja spaja vrhove vektora tih brzina, kao što je prikazano na slici, koja je trenutni pol brzine ravanskog kretanja tog diska, je jednaka nuli. Znači ta tačka je trenutni pol ravanskog kretanja diska K po užetu, te nije teško odrediti brzinu centra C_2, koja je jednaka polovini razlika tih brzina $v_{C2} = \frac{\dot{x} - \dot{y}}{2}$, što nije teško dokazati iz sličnosti trouglova:

$$\frac{v_{KA}}{a} = \frac{v_{C2}}{a - R} = \frac{v_{KB}}{2R - a}$$

odnosno

$$\frac{\dot{x}}{a} = \frac{v_{C2}}{a-R} = \frac{\dot{y}}{2R-a}$$

Iz prethodnog dobijamo da je:

$$\frac{\dot{x}}{a} = \frac{\dot{y}}{2R-a} \qquad (2R-a)\dot{x} = a\dot{y} \qquad a(\dot{x}+\dot{y}) = 2R\dot{x}$$

$$a = \frac{2R\dot{x}}{(\dot{x}+\dot{y})}$$

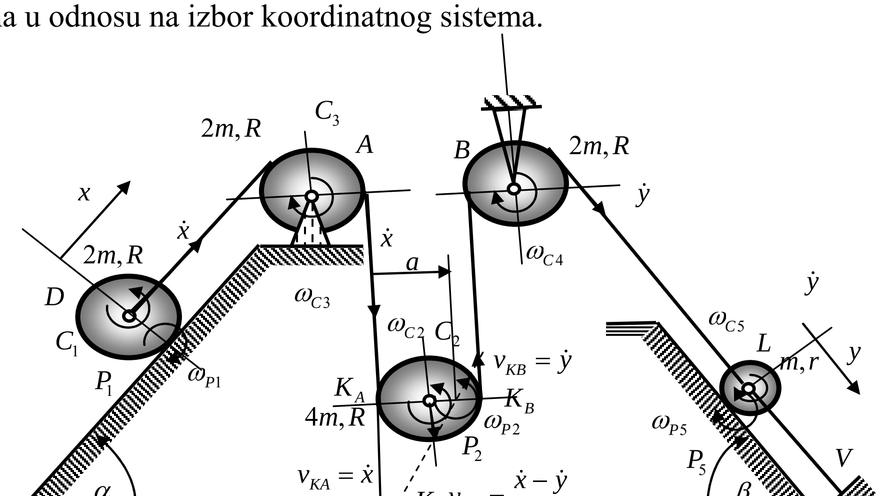
Na osnovu prethodnog sledi da je:

$$v_{C2} = \frac{\dot{x}}{a}(a-R) = \frac{\dot{x}}{\frac{2R\dot{x}}{(\dot{x}+\dot{y})}}\left(\frac{2R\dot{x}}{(\dot{x}+\dot{y})} - R\right) = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2}$$

Trenutna ugaona brzina rotacije tog diska oko trenutne ose rotacije kroz ternutni pol P_2, je $\omega_{P2} = \frac{v_{KA}}{a} = \frac{v_{C2}}{a-R} = \frac{v_{KB}}{2R-a} = \frac{\dot{x}}{\frac{2R\dot{x}}{(\dot{x}+\dot{y})}} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}$, a to je i ugaona brzina sopstvenog obrtanja oko ose upravne na disk i koja prolazi kroz njegov centar je jednaka $\omega_{C2} = \omega_{P2} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}$.

Na osnovu ove analize zaključujemo da materijalni sistem prikazan na slici 2 ima dva stepena slobode kretanja, ako to jednostranozadržavajuća veza dozvoljava, ili samo jedan stepen slobode kretanja, ali je to potrebno i dokazati.

Napomena: Izbor generalisanih koordinata se može izvesti i na više drugih načina. Naprimer moguće je uzeti za generalisanu koordinatu i pomeranje centra diska C_2 u vertikalnom pravcu naprimer z, i onda pomoću nje izraziti sva ostala pomeranja, ili pak ugao obrtanja diska A, naprimer φ. Mi smo se opredelili da za generalisane koordinate izaberemo koordinatu x translatornog pomeranja centra C_1 diska D i koordinatu y pomeranja centra diska L i pomoću njih ćemo dalje rešavati zadatak. Važno je samo istaći da izbor koordinatnog sistema u kome rešavamo zadatak ne utiče na svojstva dinamike, jer su ona invarijantna u odnosu na izbor koordinatnog sistema.



Slika 2. a*

c* Sada nije teško odrediti izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***. Jer smo u prethodnoj analizi karaktera pokretljivosti pojedinih materijalnih tela u sistemu zaključili i sledeće:

Disk D izvodi ravansko kretanje jednom rotacijom oko ose trenutne rotacije kroz tačku P_1 koja se pomera po strmoj ravni, pa je kinetička energija kretanja tog diska energija rotacije oko ose kroz tačku P_1. Ta kinetička energija je jednaka polovini proizvoda aksijalnog momenta inercije mase diska za trenutnu osu rotacije i kvadrata trenutne ugaone brzine oko te ose trenutne rotacije:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P1\zeta}\omega_{P1}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C1\zeta}\omega_{C1}^2 + \frac{1}{2}2mv_{C1}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

Kinetička energija diska A je kinetička energija rotacije oko ose kroz centar diska koji rotira ugaonom brzinom ω_{C3}, a koju smo već odredili: $\omega_{C3} = \frac{\dot{x}}{R}$, te je:

$$E_{k3} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C3\zeta}\omega_{C3}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Disk K izvodi ravansko kretanje jednom rotacijom oko ose trenutne rotacije kroz tačku P_2, ili pak jednom translacijom brzinom centra C_2 masa diska $v_{C2} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2}$ i jednom rotacijom oko ose kroz centar masa C_2, ugaonom brzinom $\omega_{C2} = \omega_{P2} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}$, pa je kinetička energija kretanja tog diska energija rotacije oko ose kroz tačku P_2.ili jedne translacije i jedne rotacije. Ta kinetička energija je jednaka polovini proizvoda aksijalnog momenta inercije mase diska za trenutnu osu rotacije kroz P_2 i kvadrata trenutne ugaone brzine oko te ose, ili zbiru poluproizvoda :mase diska i kvadrata brzuine centra C_2 masa diska $v_{C2} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{2}$ i poluproizvoda aksijalnog momenta inercije mase diska za osu kroz centar diska i kvadrata ugaone brzine $\omega_{C2} = \omega_{P2} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{2R}$ relativnog obrtanja diska oko ose kroz centar diska:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P2\zeta}\omega_{P2}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C2\zeta}\omega_{C2}^2 + \frac{1}{2}4mv_{C2}^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}4m\left(\frac{\dot{x}+\dot{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}4mR^2\left(\frac{\dot{x}-\dot{y}}{2R}\right)^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{4}m\left(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\right)$$

Vidimo da se kinetička energija diskova D i K može odrediti kao kinetička energija ravanskog kretanja tela, a prema Kenigovoj teoremi je jednaka zbiru kinetičke energije translacije brzinom centra masa, kao da je sva masa sažeta u tom centru i kinetičke energije rotacije oko ose kroz centar masa ugaonom brzinom rotacije oko ose kroz centar masa, što smo i napisali u prethodnim izrazima.

Na sličan našin odredjujemo kinetičku energiju diska B, koji rotira oko svoje ose kroz centar C_4 ugaonom brzinom $\omega_{C4} = \frac{\dot{y}}{R}$

$$E_{k4} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C4\zeta}\omega_{C4}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}2m\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

dok je kinetička energija diska L

$$E_{k5} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P5\zeta}\omega_{P1}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C5\zeta}\omega_{C5}^2 + \frac{1}{2}mv_{C5}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

Ukupna kinetička energija posmatranog materijalnog sistema je:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + E_{k4} + E_{k5}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P1\zeta}\omega_{P1}^2 + \frac{1}{2}4mv_{C2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C2\zeta}\omega_{C2}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C3\zeta}\omega_{C3}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C4\zeta}\omega_{C4}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P5\zeta}\omega_{P5}^2$$

$$E_k = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\left(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

$$E_k = \frac{1}{4}m\left(11\dot{x}^2 + 8\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\right)$$

Na tela materijalnog sistema dejstvuju sile težine sa napadnim tačkama u centrima masa (središtima tela) koja čine posmatrani sistem. Kako se središta masa C_1 i C_2 i C_5 diskova D i K pomeranju, a ostalih miruju to se menja potencijalna energija sistema, koja je jednaka radu tih konzervativnih sila na pomeranjima njihovih napadnih tačaka: $h_{C1} = x\sin\alpha$ - podizanje, $h_{C2} = \frac{x-y}{2}$.- spuštanje i $h_{C5} = y\sin\beta$ - spuštanje, sa promenjenim znakom, te je rad sila težine:

$$\mathbf{A} = -2mgh_{C1} + 4mgh_{C2} - mgh_{C5} = -2mgx\sin\alpha + 4mg\frac{x-y}{2} + mgy\sin\beta$$

$$\mathbf{A} = 2mg(1-\sin\alpha)x - mgy(2-\sin\beta)$$

Promena potencijalne enrgije sistema je jednaka radu konzervativnih sila sa promenjenim znakom:

$$E_p = -\mathbf{A} = -2mg(1-\sin\alpha)x + mgy(2-\sin\beta)$$

Ukupna energuija sistema je:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{4}m\left(11\dot{x}^2 + 8\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\right) - 2mg(1-\sin\alpha)x + mgy(2-\sin\beta) = E_{k0} + E_{p0} = const$$

d* Kako sistem ima dva spena slobode kretanja njegovo kretanje možemo opisati dvema diferencijalnim jednačinama za generalisanu koordinatu x i generalisanu koordinatu y. Lagrange-ove jednačine druge vrste za generalisane koordinate x i y se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial E_k}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

te je posle diferenciranja

$$\frac{11}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{y} - 2mg(1-\sin\alpha) = 0$$

$$4m\ddot{y} + \frac{1}{2}m\ddot{x} + mg(2-\sin\beta) = 0$$

odakle sledi da je:

$$11\ddot{x} + \ddot{y} = 4g(1-\sin\alpha)$$
$$8\ddot{y} + \ddot{x} = -2g(2-\sin\beta)$$

$$\ddot{y} = 4g(1-\sin\alpha) - 11\ddot{x}$$
$$\ddot{x} = -2g(2-\sin\beta) - 8\ddot{y}$$

$$11\ddot{x} + \ddot{y} = 4g(1-\sin\alpha)$$
$$-22g(2-\sin\beta) - 88\ddot{y} + \ddot{y} = 4g(1-\sin\alpha)$$
$$-87\ddot{y} = 22g(2-\sin\beta) + 4g(1-\sin\alpha)$$

$$8\ddot{y}+\ddot{x}=-2g(2-\sin\beta)$$
$$32g(1-\sin\alpha)-88\ddot{x}+\ddot{x}=-2g(2-\sin\beta)$$
$$-87\ddot{x}=-32g(1-\sin\alpha)--2g(2-\sin\beta)$$

$$\ddot{x}=\frac{32}{87}g(1-\sin\alpha)+\frac{2}{87}g(2-\sin\beta)$$
$$\ddot{y}=-\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)-\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)<0$$

$$\dot{y}=-\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]t+v_{0C5}$$

$$y(t)=-\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]\frac{t^2}{2}+v_{0C5}t\geq 0$$

Potreban uslov da bi ovakvo kretanje bilo moguće je da je u svakom trenutku ispunjen uslov

$$v_{0C5}\geq\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]\frac{t}{2}$$

što znači da se ovakvo kretanje može ostvariti ako je početna brzina v_{0C5} centra masa diska L takva da je ispunjen prethodni uslov. I takvo kretanje, kotrljanje diska L niz strmu ravan, bi se ostvarilo za vreme dok brzina kretanja njegovog centra mase v_{C5} ne postanje jednaka nuli, $v_{C5}(t_1)=\dot{y}(t_1)=0$ u trenutku:

$$t_1=\frac{v_{0C5}}{\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}$$

u kome bi brzina postala jednaka nuli. Za to vreme centar diska L, C_5 je prešao put niz strmu ravan

$$y(t_1)=\frac{(v_{0C5})^2}{2\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}>0$$

U tom trenutku vremena t_1 otpočunje kotrljanje diska L uz stu strmu ravan naviše istim negativnim ubrzanjem

$$\ddot{y}=-\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)-\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)<0$$

pa je tada promena puta od vremena:

$$\dot{y}=-\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]t$$

$$y(t)=-\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]\frac{t^2}{2}+\frac{(v_{0C5})^2}{2\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}\geq 0$$

jer je za ovu fazu kretanja –kotrljanja diska naviše početna brzina njegovog centra jednaka nuli, ali je početna koordinata ,

$$y(t_1)=\frac{(v_{0C5})^2}{2\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}>0$$

Ova faza kretanja se odvija dok se disk ne vrati u početni položaj odredjen koordinatom $y(t_2)=0$, koji je odredjen sa:

$$y(t_2)=-\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]\frac{t_2^2}{2}+\frac{(v_{0C5})^2}{2\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}=0$$

te je

$$t_2=\frac{v_{0C5}}{\left[\frac{22}{87}g(2-\sin\beta)+\frac{4}{87}g(1-\sin\alpha)\right]}$$

To je vreme jednako vremenu spuštanja –kotrljanja diska L niz strmu ravan. Kada dodje u početni položaj, dejstvuje jednostrano zadržavajuća veza, pa se dalje sistem ponaša kao sistem sa jednim stepenom slobode kretanja.

Ako je početna brzina kretanja centra masa $v_{0C5}=0$ kotrljanja diska L jednaka nuli, onda se sistem sa ovom jednostrano zadržavajućom vezom ponaša kao sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, kao što smo u početku i uveli pretpostavku i posmatrali samo tu fazu kretanja sistema.

DEVETI ZADATAK (Dinamika, analitička mehanika, teorija sudara). Za ***materijalni sistem*** prikazan na slici 2. na kojoj su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** koturova u obliku homogenih tankih diskova, uz pretpostavku da je uže nerastegljivo, odrediti:

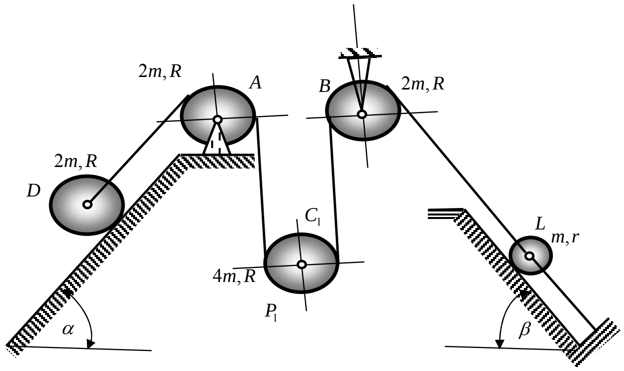
a* Broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Napisati integral energije sistema; Da li je sistem konzervativan? Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

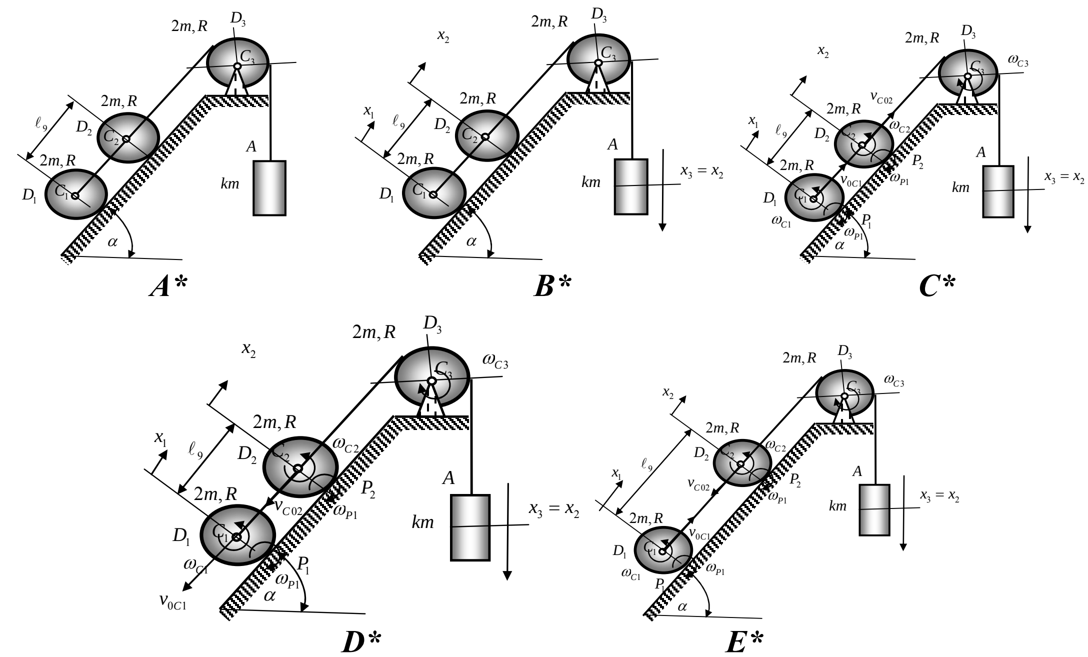
d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste. Koliki najmanji broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema?

e* Ugaonu brzinu i brzinu centra masa diska L.



Slika 8

REŠENJE DEVETOG ZADATKA (Dinamika, analitička mehanika, teorija sudara).



Slika 8. a* , b*, c*, d* i e*

Prvo je potrebno odrediti broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema.

Analizirajući mogućnost pokretanja pojedinh delova sistema, vidimo da se kotur označen sa D_1 može kotrljati niz i uz strmu ravan i da je dovoljno jednom koordinatom odrediti položaj njegivog centra C_1 u odnosu na neki položaj fiksiran u odnosu na nepokretnu strmu ravan. Usvojimo da je to koordinata x_1 usmerena paralelno sa strmom ravni i uz strmu ravan. Brzina tog centra C_1 je $v_{C1} = \dot{x}_1$. Dalje, snalizirajući mogućnost pokretanja centra C_2 kotura, koji je označen sa D_2 vidimo da se i on može kotrljati niz i uz strmu ravan i da je dovoljno jednom koordinatom odrediti položaj njegivog centra C_2 u odnosu na neki položaj fiksiran u odnosu na nepokretnu strmu ravan. Usvojimo da je to koordinata x_2 usmerena paralelno sa strmom ravni i uz strmu ravan. Brzina tog centra C_2 je $v_{C2} = \dot{x}_2$, sve dok je rastojanje izmedju centara diskova C_1 i C_2, manje od ℓ_0, onog trenutka kada postane jednako ℓ_0, dolazi do pojave udarnog impulsa kada se menjaju brzine tih centara, kao da je došlo do sudara kugli i one dobijaju odgovarajuće odlazne brzine, koje su onda početne brzine za narednu fazu kretanja sistema.

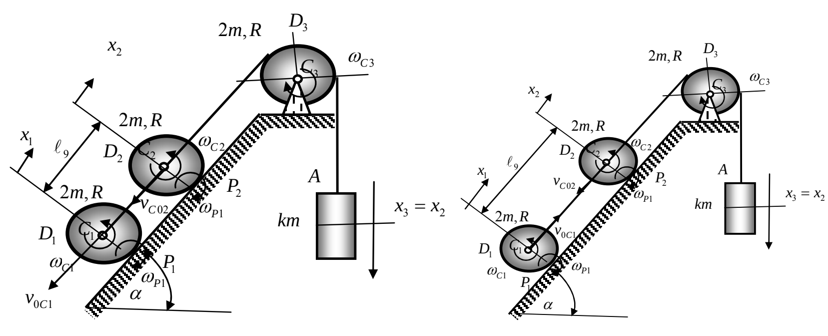
Kako je uže nerastegljivo i vezano za centar C_2 tog diska to znači da se njegov kraj pomera brzinom $v_{C2} = \dot{x}_2$, pa i celo uže ima tu brzinu, pa, ako je početbna brzina tačaka na peruferiji točaka D_3 sa nepokretnim centrom C_3, jednaka početnoj brzini $v_{C02} = R\omega_{C03}$, onda je i brzina svih tačaka na periferiji tog diska jednaka brzini zategnutog užeta koje je vezano za centra C_2 diska na strmoj ravni i prebačeno preko kotura D_3 i jednaka toj brzini $\dot{x}_2$, te je ugaona brzina okretanja tog diska oko ose kroz njegov centar $\omega_{C3} = \dfrac{\dot{x}_2}{R}$, gde je R poluprečnik tog kotura. Kako je uže dalje vezano za teg, to su brzina i položaj tega odredjeni koordinatom $x_3 = x_2$, kao i
$v_A = \dot{x}_3 = \dot{x}_2$. Pri ovome smo pretpostavili da je deo užeta od centra diska C_2, koje je prebačeno preko kotura D_3 i vezano za teg, uvek u zategnutom stanju, kao i da su u početnom trenutku ugaona brzina obrtanja diska kotura D_3 i početna brzina kretanja tega kompatibilne sa početnom brzinom v_{C02}, odnosno da važi $v_{C02} = R\omega_{C03} = v_{A0}$.

Takodje možemo odrediti trenutnu ugaonu brzinu kotrljanja diskova D_1 i D_2 uz strmu ravan, oko ose kroz trenutni pol P_1, odnosno P_2, koja iznosi $\omega_{P1} = \dfrac{v_{C1}}{R} = \dfrac{\dot{x}_1}{R} = \omega_{C1}$, odnosno $\omega_{P2} = \dfrac{v_{C2}}{R} = \dfrac{\dot{x}_2}{R} = \omega_{C2}$.

Znači da materijalni sistem, prikazan na slici, 1.a* u najopštijrm slučaju može imati u pojedinim fazama kretanja sistema i četiri stepena slobode kretanja, ako početni uslovi kretanja koturova i tega nisu kompatibilni, saglasno prethodnoj analizi. Ako pak pretpostavimo da su početni uslovi takvi, kako samo ih definisali u prethodnom tesktu, tj da u delu veze nerastegljivim užetom od centra C_2 diska preko kotura D_3 do tega A nema proizvoljnosti u početnim položajima i pičetnim brzinama i da važi uslov kompatibilnosti brzina $v_{C02} = R\omega_{C03} = v_{A0}$, pri čemu je taj deo užeta uvek zategnut i nerastegljiv, onda sistem posmatramo kao sistem sa dva stepena slobode kretanja.

U opštem slučaju, uz pretpostavke da sistem ima dva stepena slobode kretanja, kao što je to prikazano na slici 1.b* i kao takav dopušta sledeće sličajeve početnih uslova prikazanih na slikama c*, d* i e*, tj. Da su početne brzine centara diskova istosmerne, ali da je početna brzina centra onog diska koji prethodi drugom u smeru i pravcu početnih brzina sa manjom početnom brzinom, dok za slučaj suprotnosmernih početnih brzina usmerene jedna ka drugoj nije potreban taj uslov. Nisu mogući početni uslovi sa suprotnosmernim početnim brzinama spolja, ako su centri kugli u početnom trenutku na maksimalnom rastojanju koje dozvoljava nerastegljivo uže dužine ℓ_0 koje vezuje centre C_1 i C_2 diskova na strmoj ravni. Ako su pak početne brzine centara diskova C_1 i C_2 jednake i jednako usmerene, ili pak ako je ceo sistem bio u miru, dok su svi delovi užeta zategnuti, a rastojanje izmedju C_1 i C_2 jednako ℓ_0, onda sistem možemo proučavati pomoću modela sa jednim stepenom slobode kretanja.

Zato kao generalisane koordinate sistema biramo dve koordinate x_1 i x_2 koje merimo od položaja centara diskova kada su ti centri C_1 i C_2 diskova na strmoj ravni na maksimalno mogućem rastojanju jednakom ℓ_0. i usmeravamo ih naviše uz strmu ravan, kao što je to naznačeno na slici 1.b*. Položaj tega je odredjen koordinatom $x_3 = x_2$. i meri se od referentnog položaja naniže, jer je uže koje vezuje centar C_2 diska i teg, a prebačeno je preko kotura sa centrom u C_3, kao što je to naznačeno na slici 1.b*, kao i na ostalim c*, d* i e*, koje pokazuju i različite slučajeve smera i pravca početnih brzina centara C_1 i C_2 diskova.



Sa uvedenim pretpostavkama koje nas navode da posmatramo sistem sa dva stepena slobode kretanja, kinetička i potencijalna energija se mogu opisati sledećim izrazima:

$$E_k = \frac{1}{2} J_{P1}\omega_{P1}^2 + \frac{1}{2} J_{P2}\omega_{P2}^2 + \frac{1}{2} J_{C3}\omega_{C3}^2 + \frac{1}{2} kmv_A^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_1}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}km\dot{x}_2^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\left[3\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2(k+4)\right]$$

Na tela materijalnog sistema dejstvuju sile težine sa napadnim tačkama u centrima masa (središtima tela), koja čine posmatrani sistem. Kako se središta masa C_1 i C_2 diskova D_1 i D_2 pomeraju, a centar masa trećeg diska mirujem, dok se centar masa tega spušta za $x_3 = x_2$ to se menja potencijalna energija sistema, koja je jednaka radu tih konzervativnih sila na pomeranjima njihovih napadnih tačaka: $h_{C1} = x_1 \sin\alpha$ - podizanje i $h_{C2} = x_2 \sin\alpha$ i $h_A = x_2$.- spuštanje, te je rad sila težine:

$$\mathbf{A} = -2mgh_{C1} - 2mgh_{C2} + kmgx_2 = -2mg(x_1 + x_2)\sin\alpha + kmgx_2$$

$$\mathbf{A} = -mg\left[2x_1 \sin\alpha + x_2(2\sin\alpha - k)\right]$$

Promena potencijalne enrgije sistema je jednaka radu konzervativnih sila sa promenjenim znakom:

$$E_p = -\mathbf{A}$$

$$E_p = mg\left[2x_1 \sin\alpha + x_2(2\sin\alpha - k)\right]$$

Ukupna energuija sistema je:

$$E = E_k + E_p = const$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m\left[3\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2(k+4)\right] + mg\left[2x_1 \sin\alpha + x_2(2\sin\alpha - k)\right] = \frac{1}{2} m\left[3v_{C01}^2 + v_{=const2}^2(k+4)\right]$$

gde su v_{C01} i v_{C02} početne brzine kretanja sistema u početnom trenutku, dok su za početne koordinate usvojene nulte vrednosti, pri čemu je rastojanje centara diskova $\overline{C_1C_2} = \ell_0$ ..

S obzirom da je sistem konzervativan u svakoj od faza kretanja, jer su veze idealne to diferenciranjem po vremenu prethodne jednačine mozemo dobiti dve diferencijante jednačine kretanja, po izjednačavanju sa nulom koeficijenata uz $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ odakle sledi da je:

$$m\left[3\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2(k+4)\right] + mg\left[2\dot{x}_1 \sin\alpha + \dot{x}_2(2\sin\alpha - k)\right] = 0$$

$$3\ddot{x}_1 + 2g\sin\alpha = 0$$

$$\ddot{x}_2(k+4) + (2\sin\alpha - k)g = 0$$

odnosno:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2}{3} g\sin\alpha$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{(2\sin\alpha - k)g}{(k+4)}$$

Do istog sistema diferencijalnih jednačina se moye doci I poloću Lagrange'ovih diferencijalnih jednačina druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x_i} = 0\,,\; i = 1{,}2$$

odakle sledi je:

$$3m\ddot{x}_1 + 2mg\sin\alpha = 0$$

$$m\ddot{x}_2(k+4) + (2\sin\alpha - k)mg = 0$$

što daje sistem diferencijalnih jednačina u obliku:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2}{3} g\sin\alpha$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{(2\sin\alpha - k)g}{(k+4)}$$

čime smo dobili i ubrzanja kretanja centara diskova.

Posle integraljenja ovih differencijalnih jednačina dobijamo sledeće jednačine za brzine i koordinate centara diskova koji se kotrljaju uz ili niz strumu ravan:

Brzine centara diskova su:

$$v_{C1}(t)=\dot{x}_1(t)=-\frac{2}{3}gt\sin\alpha+v_{C01}$$

$$v_{C2}(t)=\dot{x}_2(t)=-\frac{(2\sin\alpha-k)gt}{(k+4)}+v_{C02}$$

Položaji centara diskova su:

$$x_{C1}(t)=x_1(t)=-\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha+v_{C01}t+x_{01}$$

$$x_{C2}(t)=x_2(t)=-\frac{(2\sin\alpha-k)gt^2}{2(k+4)}+v_{C02}t+x_{02}$$

u kojima su konstante v_{C01} i v_{C02} početne brzine i x_{01} i x_{02} početne koordinate za pojedine vremenske intervale kretanja sistema.

Za prvi period kretanja sistema poćetni uslovi su:

Početne brzine naka su usmerene suprotnosmerno , kao na slici 1.e* i neka su istog intenziteta:

$$v_{C01}=v_{C01}$$

$$v_{C02}=-v_{C02}$$

dok su obe coordinate u pođetnom trenutku jednake nuli: $x_{01}=0$ i $x_{02}=0$, onda su zakoni promene brzina i koordinata u obliku:

Brzine centara diskova u funkciji od vremena su:

$$v_{C1}(t)=\dot{x}_1(t)=-\frac{2}{3}gt\sin\alpha+v_{C01}$$

$$v_{C2}(t)=\dot{x}_2(t)=-\frac{(2\sin\alpha-k)gt}{(k+4)}-v_{C02}$$

Položaji centara diskova u funkciji od vremena su:

$$x_{C1}(t)=x_1(t)=-\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha+v_{C01}t$$

$$x_{C2}(t)=x_2(t)=-\frac{(2\sin\alpha-k)gt^2}{2(k+4)}+v_{C02}t$$

Do sudara diskova koji se kotrljaju ce doći kada je: $x_1(t_1)=x_2(t_1)+\ell_0$ u trenutku vremena t_1. Na osnovu toga pišemo:

$$x_{C1}(t_1)=x_{C2}(t_1)+\ell_0=-\frac{1}{3}gt_1^2\sin\alpha+v_{C01}t_1=-\frac{(2\sin\alpha-k)gt_1^2}{2(k+4)}+v_{C02}t_1+\ell_0$$

$$\frac{(2\sin\alpha-k)gt_1^2}{2(k+4)}-\frac{1}{3}gt_1^2\sin\alpha+(v_{C01}-v_{C02})t_1-\ell_0=0$$

$$\left[\frac{(2\sin\alpha-k)}{2(k+4)}-\frac{\sin\alpha}{3}\right]gt_1^2+(v_{C01}-v_{C02})t_1-\ell_0=0$$

$$\left[\frac{3(2\sin\alpha-k)}{3\cdot 2(k+4)}-\frac{2(k+4)\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]gt_1^2+(v_{C01}-v_{C02})t_1-\ell_0=0$$

$$\left[\frac{6\sin\alpha-3k-2k\sin\alpha-8\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]gt_1^2+(v_{C01}-v_{C02})t_1-\ell_0=0$$

$$\left[\frac{k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]gt_1^2-(v_{C01}-v_{C02})t_1+\ell_0=0$$

$$t_{1`(1,2)} = \frac{3(k+4)}{g[k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha]}\left\{(v_{C01}-v_{C02}) \mp \sqrt{(v_{C01}-v_{C02})^2 - \ell_9\left[\frac{k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]g}\right\}$$ Kako postoje dva korena pozitivna to ima samo jdva rešemja:

$$t_{1`} = \frac{3(k+4)}{g[k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha]}\left\{(v_{C01}-v_{C02}) \mp \sqrt{(v_{C01}-v_{C02})^2 - \ell_9\left[\frac{k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]g}\right\} > 0$$ samo ako je $v_{C01} > v_{C02}$

Brzine prvog sudara kugli su tada:

$$v_{C1}(t_1) = \dot{x}_1(t_1) = -\frac{2}{3}gt_1\sin\alpha + v_{C01}$$

$$v_{C1}(t_1) = -\frac{2(k+4)\sin\alpha}{[k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha]}\left\{(v_{C01}-v_{C02}) \mp \sqrt{(v_{C01}-v_{C02})^2 - \ell_9\left[\frac{k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]g}\right\} + v_{C01}$$

$$v_{C2}(t_1) = \dot{x}_2(t_1) = -\frac{(2\sin\alpha - k)gt_1}{(k+4)} - v_{C02}$$

$$v_{C2}(t_1) = -\frac{3(k+4)(2\sin\alpha-k)}{(k+4)[k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha]}\left\{(v_{C01}-v_{C02}) \mp \sqrt{(v_{C01}-v_{C02})^2 - \ell_9\left[\frac{k(3+2\sin\alpha)+2\sin\alpha}{3\cdot 2(k+4)}\right]g}\right\} - v_{C02}$$

Odlazne brzine tela (kugli) posle centralnog sudara, koji se dešava u ovom slučaju , kada je koeficijent sudra $\widetilde{k}$ su u obliku sledećih izraza:

$$v_1(t_0+\tau) = v_1(t_0) - \frac{1+\widetilde{k}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

$$v_2(t_0+\tau) = v_2(t_0) + \frac{1+\widetilde{k}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

Impuls sudara u ovom slučaju je

$$K_{Fud} = m_1\left(v_1(t_0+\tau) - v_1(t_0)\right) = -\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(1+\widetilde{k}\right)\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

U slučaju da je sistem bio u miru, sistem posmatramo kao sistem sa jednim stepenom slobode kretanja za slucaj dovoljno velikog k .

Sa uvedenim pretpostavkama koje nas navode da posmatramo sistem sa jednim stepenom slobiode kretanja, $x_1 = x_2 = x_3$ kinetička i potencijalna energija se mogu opisati sledećim izrazima:

$$E_k = \frac{1}{2}J_{P1}\omega_{P1}^2 + \frac{1}{2}J_{P2}\omega_{P2}^2 + \frac{1}{2}J_{C3}\omega_{C3}^2 + \frac{1}{2}kmv_A^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_1}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{x}_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}km\dot{x}_2^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\left[3\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2(k+4)\right] = \frac{1}{2}m(k+7)\dot{x}_1^2$$

Na tela materijalnog sistema dejstvuju sile težine sa napadnim tačkama u centrima masa (središtima tela), koja čine posmatrani sistem. Kako se središta masa C_1 i C_2 diskova D_1 i D_2 pomeraju, a centar masa trećeg diska mirujem, dok se centar masa tega spušta za $x_3 = x_2$ to se menja potencijalna energija sistema, koja je jednaka radu tih konzervativnih sila na pomeranjima njihovih napadnih tačaka: $h_{C1} = x_1 \sin\alpha$ - podizanje i $h_{C2} = x_2 \sin\alpha$ i $h_A = x_2$.- spuštanje, te je rad sila težine:

$$\mathbf{A} = -2mgh_{C1} - 2mgh_{C2} + kmgx_2 = -2mg(x_1 + x_2)\sin\alpha + kmgx_2$$

$$\mathbf{A} = -mg[2x_1 \sin\alpha + x_2(2\sin\alpha - k)]$$

$$\mathbf{A} = -mg(4\sin\alpha - k)x_1$$

Promena potencijalne enrgije sistema je jednaka radu konzervativnih sila sa promenjenim znakom:

$$E_p = -\mathbf{A}$$

$$E_p = mg(4\sin\alpha - k)x_1$$

Ukupna energuija sistema je:

$$E = E_k + E_p = const$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}m(k+7)\dot{x}_1^2 + mg(4\sin\alpha - k)x = const$$

Diferencijalna jedna;ina kretanja materijalnog sistema je tada:

$$m(k+7)\ddot{x}_1 + mg(4\sin\alpha - k) = 0$$

$$(k+7)\ddot{x}_1 + g(4\sin\alpha - k) = 0$$

Ubrzanje sistenma je:

$$\ddot{x}_1 = -g\frac{(4\sin\alpha - k)}{(k+7)}$$

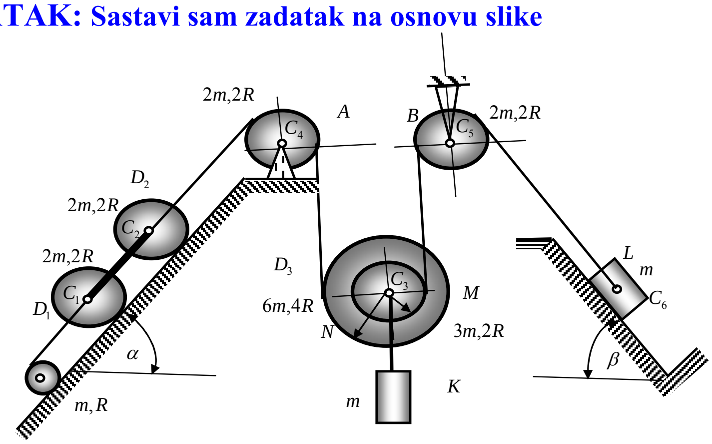
Zavisnost brzine i puta od vremena suČ

$$v_{C1}(t) = v_{C2}(t) = v_A(t) = \dot{x}_1(t) = -gt\frac{(4\sin\alpha - k)}{(k+7)}$$

$$x_{C1}(t) = x_{C2}(t) = x_A(t) = x_1(t) = -gt^2\frac{(4\sin\alpha - k)}{2(k+7)}$$

Smer kretanja I smer brzine kretanja zavise od odnosa k mase tega u odnosu na mase koturova:
Ako je $k > 4\sin\alpha$ kretanje tega je naniže, a kotrljanje koturova uz strmu ravan je naviše i obrnuto,

DESETI ZADATAK: Sastavi sam zadatak na osnovu slike



JEDANAESTI ZADATAK: ***Tekst zadatka***. Homogeni kružni disk mase M, poluprečnika r, kotrlja se bez klizanjnja niz glatku strmu ravan dužine ℓ, nagibnog ugla α, koja prelazi u idealno glatku cilindrično polukružnu površ poluprečnika R, kao što je prikazano na slici. Za vreme kretanja disk ne napušta vertikalnu ravan, koja je prikazana na slici i sadrži presek sa strmom ravni i cilindrično polučružnom površi.
U početku kretanja, kada je disk bio na gornjem kraju strme ravni, centar diska je dobio početnu brzinu v_0 paralelnu strmoj ravni. Odrediti:

a* Ubrzanje i brzinu centra diska u proizvoljnom položaju na strmoj ravni, kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar;

b* Silu otpora kotrljanja diska po strmoj ravni kao i silu pritiska na ravan u proizvoljnom položaju;

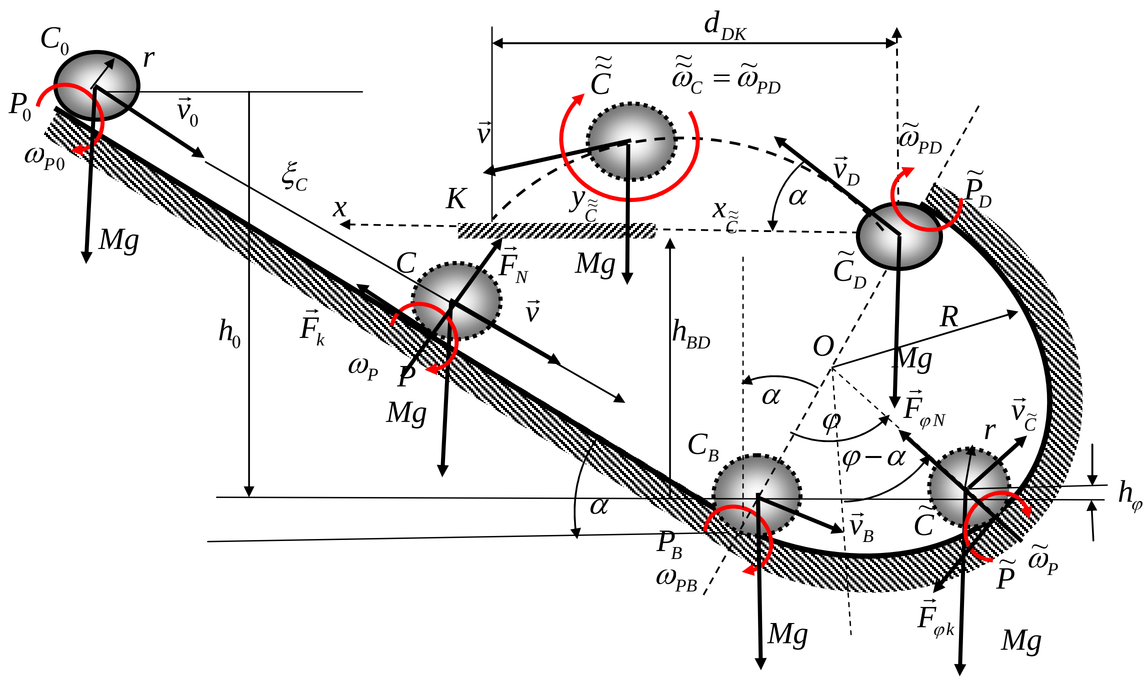
c* Brzinu centra diska u položaju prelaska sa strme ravni na polukružnu površ , kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar u tom položaju;

d* Brzinu centra diska u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi, kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar u tom položaju;

e* Silu otpora kotrljanja diska u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi, kao i silu pritiska na tu površ.

f* Koje uslove treba da zadovolje kinetički i geometrijski parametri sistema, te da disk može da dospe u najvišu tačku D kotrljajući se po polukružno cilindičkoj površi?

g* Jednačinu putanje i zakone kretanja diska po napuštanju površi, kao u domet u pravcu horizontale na nivou položaja napuštanja polukružno cilindričke površi.



REŠENJE JEDANAESTOG ZADATKA:

Diferencijalnu jednačinu dinamike –ravanskog kretanja diska niz strumu ravan možemo predstaviti kao kotrljanje bez klizanja po strmoj ravni i to rotacijom oko trenutnog pola P u dodiru diska i strme ravni. Ta tačka P je trenutni pol i pomera se niz strum ravan isto toliko koliko i centar diska, ali s obzirom na simetriju diska aksijalni moment inercije diska za trenutnu osu roracije upravnu na disk i kroz trenutni pol rotacije je uvek jednak i iznosi:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta} = \mathbf{J}_{\mathbf{C}\zeta} + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

Kotrljanje diska po strmoj ravni predstavlja ravansko kretanje tela pod dejstvom aktivne sile sopstvene težine diska i pod dejstvom veza (strama rava u prvom delu puta, polukružna površ u drugom delu puta i slobodno od veza ravansko kretanje diska u trećem delu puta), pa sistem u prva dva dela puta ima jedan stepen slobode kretanja, dok kada napusti veze ima dva stepena slobode kretanja. Zato za prvi deo puta kada se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni za generalisanu koordinatu na tom delu puta usvojimo koordinatu ξ_C kretanja centra diska C paralelno strmoj ravni na odstojanju r od nje, kao što je to naznačeno na slici. Od aktivnih sila dejstvuje sila težine Mg, a od pasivnih reaktivnih se javlja normalna komponeta otpora $\overline{F}_N$ strme ravni kao idealne veze i jedna tangencijalna komponenta koja predstavlja silu otpora kotrljanja $\vec{F}_k$. Obe ove komponente prolaze kroz trenutni pol P i moment tih sila za trenutnu osu rotacije diska kroz pol P je jednak nuli. Na osnovu teoreme o promeni momenta impulsa kretanja za trenutnu osu rotacije kroz pol P je:

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}_P^{\vec{G}}$$

odnosno

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}\dot{\omega}_P = Mgr\sin\alpha$$

gde smo sa ω_P označili ugaonu brzinu obrtanja diska oko trenutne ose rotacije, a kako je brzina centra diska

$$v_C = \dot{\xi}_C = r\omega_P$$

to diferencijalnu jednačinu kretanja dobijamo u obliku:

$$\frac{3}{2}Mr^2\frac{\ddot{\xi}_C}{r} = Mgr\sin\alpha$$

odnosno

$$\ddot{\xi}_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Integraljenjem prethodne jednačine dobijamo jednačinu promene brzina i jednačinu puta u sledećem obliku:

$$v_C = \dot{\xi}_C = \frac{2}{3}gt\sin\alpha + v_0$$

gde je v_0 početna brzina kretanja centra diska, a t vreme.

$$\xi_C = \frac{1}{3}gt^2\sin\alpha + v_0t$$

Neka je dužina strme ravni $x_{0B} = \ell$ onda je lako odrediti vreme za koje će se disk dokotrljati do položaja B.

$$t^2 + \frac{3v_0}{g\sin\alpha}t - \frac{3\ell}{g\sin\alpha} = 0$$

čiji su koreni

$$t_{B1,2} = -\frac{3v_0}{2g\sin\alpha} \mp \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2 + \frac{3\ell}{g\sin\alpha}}$$

Rešenje prethodne jednačine sa znakom minus ne zadovoljava jer vreme mora da teče unapred, tj. da je pozitivno, te je rešenje:

$$t_B = \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2 + \frac{3\ell}{g\sin\alpha}} - \frac{3v_0}{2g\sin\alpha}$$

te je brzina v_B centra diska kojom on dospeva u položaj B

$$v_{CB} = \dot{\xi}_{CB} = \frac{2}{3}g\sin\alpha\left(\sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2 + \frac{3\ell}{g\sin\alpha}} - \frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right) + v_0$$

$$v_{CB}=\dot{\xi}_{CB}=\frac{2}{3}g\sin\alpha\left(\sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2+\frac{12\ell g\sin\alpha}{(2g\sin\alpha)^2}}\right)$$

Znači da je brzina kojom disk, koji se dokotrljao do polukružne površi, u istu, ulazi sa brzinom centra jednakoj vrednosti:

$$v_{CB}=\dot{\xi}_{CB}=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha}$$

To je i početna brzina kretanja centra diska za kotrjanje po polukružnoj površi.

Sledeća faza kotrljanja diska po polukružnoj površi je takodje ravansko kretanje krutog tela pod dejstvom veza pa sistem ima jedan stepen slobode kretanja, jer se to kretanje, kao i po strmoj ravni može predstaviti obrtanjem oko trenutne ose rotacije, koja uvek prolazi kroz dodirnu tačku P diska i polukružne površi, a iako se ta tačka pomera, aksijalni moment inercije za tu osu diska je isti kao i u prethodnom slučaju, te je

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}=\mathbf{J}_{\mathbf{C}\zeta}+Mr^2=\frac{3}{2}Mr^2$$

Sada za generalisanu koordinatu kretanja pogodno je uzeti ugao φ koji zaklapa poteg $O\widetilde{C}$ povučen kroz centar diska $\widetilde{C}$ i centar polukružne površi O, a koji merimo od potega OB - centar polukružne površi položaj diska B ulaska u isti.

Kako se brzina $\vec{v}_{\widetilde{C}}$ centra diska $\widetilde{C}$ može posmatrati kao periferijska brzina pri obrtanju oko centara polukružne površi O, ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$ na rastojanju $R-r$, kao i rotacija ugaonom brzinom $\widetilde{\omega}_P$ oko trenutne ose kroz dodirnu tačku $\widetilde{P}$ diska i polukružne površi na rastojanju r jednakom poluprečniku diska to pišemo:

$$\vec{v}_{\widetilde{C}}=(R-r)\dot{\varphi}=r\widetilde{\omega}_P$$

te je

$$\widetilde{\omega}_P=\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}$$

Od aktivnih sila na disk i na ovom delu puta dejstvuje sila težine Mg, a od pasivnih reaktivnih se javlja normalna komponeta otpora $\vec{F}_{\varphi N}$ strme ravni kao idealne veze i jedna tangencijalna komponenta koja predstavlja silu otpora kotrljanja $\vec{F}_{\varphi k}$. Obe ove komponente prolaze kroz trenutni pol P i moment tih sila za trenutnu osu rotacije diska kroz pol $\widetilde{P}$ je jednak nuli. Na osnovu ***teoreme o promeni momenta impulsa kretanja za trenutnu osu rotacije kroz pol*** $\widetilde{P}$ je:

$$\frac{d\vec{L}_{\widetilde{P}}}{dt}=\vec{M}_{\widetilde{P}}^{\vec{G}}$$

odnosno

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}\dot{\widetilde{\omega}}_P=-Mgr\sin(\varphi-\alpha)$$

$$\frac{3}{2}Mr^2\frac{R-r}{r}\ddot{\varphi}=-Mgr\sin(\varphi-\alpha)$$

Sad diferencijalnu jednačinu kretanja - kotrljanja diska možemo da napišemo u obliku:

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha)=0$$

i to je nelinearna diferencijalna jednačina. Istu možemo da integralimo tako što ćemo je prvo pomnožiti sa $2\dot{\varphi}dt=2d\varphi$, što daje:

$$2\dot{\varphi}dt\frac{d\dot{\varphi}}{dt}+\frac{4g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha)d\varphi=0$$

Posle integraljenja u granicama brzina centra diska od položaja B, u kome je $\varphi = 0$ i brzina v_B, koju smo odredili na delu kotrljanja diska po strmoj ravni, pa do položaja odredjenog uglom φ, možemo da pišemo:

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_B^2 + \frac{4g}{3(R-r)}\left[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha\right]$$

a kako je

$$\omega_{PB} = \frac{R-r}{r}\dot{\varphi}_B = \frac{v_B}{r} = \frac{\dot{\xi}_{CB}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha}$$

to sledi da je:

$$v_{\tilde{C}}^2 = (R-r)^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha + \frac{4g(R-r)}{3}\left[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha\right]$$

Kada je disk pri kotrljanju u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi.

Kada disk dospe u položaj D, u kome je $\varphi = \pi$ njegova brzina je odredjena sledećim izrazom:

$$v_{\tilde{C}D}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha - \frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha$$

Da bi disk dospeo u taj položaj, potrebno je da početna brzina centra diska bude takva da u tom položaju sila pritiska diska na polukružnu površ ne bude jednaka nuli pre tog položaja. Zato je potrebno odrediti silu protiska na jednostranu vezu koja dejstvuje na disk – na polukružnu površ.

Da bi smo odredili tu silu veze, odnosno silu pritiska potrebno je da napišemo jednačine dinamičke ravnoteže diska u stanju kotrljanja po polukružnoj površi, koristeći jednačine ravanskog kretanja krutog tela, preko kretanja centra masa i relativnog kretanja oko centra masa i to u sistemu prirodnih koordinata kretanja diska :

* za tangencijalni pravac na putanju kretanja centra diska

$$M\frac{dv_{\tilde{C}}}{dt} = -F_{\varphi k} - Mg\sin(\varphi-\alpha)$$

* za radijalni pravac na putanju kretanja centra diska

$$M\frac{v_{\tilde{C}}^2}{R-r} = F_{\varphi N} - Mg\cos(\varphi-\alpha)$$

* za relativno kretanje diska oko centra masa:

$$\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\dot{\tilde{\omega}}_{\tilde{C}} = F_{\varphi k}r$$

I poslednje odredjujemo silu otpora kotrljanja diska po polukružnoj površi u obliku:

$$F_{\varphi k} = \frac{\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\dot{\tilde{\omega}}_{\tilde{C}}}{r} = \frac{Mr^2}{2r}\frac{R-r}{r}\ddot{\varphi} = \frac{M}{2}(R-r)\ddot{\varphi}$$

jer je

$$\tilde{\omega}_{\tilde{C}} = \tilde{\omega}_P = \frac{R-r}{r}\dot{\varphi},$$

Unošenjem sile otpora kotrljanja u prvu jednačinu, kao imajući u obzir da je $v_{\tilde{C}} = (R-r)\dot{\varphi}$ dobijamo:

$$M(R-r)\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(R-r)\ddot{\varphi} - Mg\sin(\varphi-\alpha)$$

odakle sledi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha) = 0$$

Ova jednačina je identična sa onom koju smo dobili pišući jednačinu kotrljanja diska oko trenutne ose rotacije i iz koje smo odredili brzinu u obliku:

$$v_{\tilde{C}}^2 = (R-r)^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha + \frac{4g(R-r)}{3}\left[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha\right]$$

Sada nije teško odrediti silu otpora polukružne površi, niti pak silu kotrljanja diska po polukružnoj površi.

$$F_{\varphi N} = Mg\cos(\varphi-\alpha) + M\,\frac{v_{\tilde{\tilde{C}}}^2}{R-r}$$

$$F_{\varphi N} = M\,\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{Mg}{3}\left[7\cos(\varphi-\alpha) + \frac{4\ell}{R-r}\sin\alpha - 4\cos\alpha\right]$$

$$F_{\varphi k} = -\frac{Mg}{3}\sin(\varphi-\alpha)$$

Kada disk dospe u položaj D, u kome je $\varphi=\pi$ njegova brzina je odredjena na sledeći način:

$$v_{\tilde{\tilde{C}}D}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha - \frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha$$

Dok je u tom položaju D sila uzajamnog pritiska veze i diska:

$$F_{\varphi ND} = M\,\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{Mg}{3}\left[-11\cos\alpha + \frac{4\ell}{R-r}\sin\alpha\right] > 0$$

$$M\,\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{4Mg\ell}{3(R-r)}\sin\alpha > \frac{11Mg}{3}\cos\alpha$$

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha > 11g(R-r)\cos\alpha$$

Na granici D kada je sila pritiska jednaka nuli, minimalna brzina s kojom disk dolazi do položaja D, a da se ne odvoji od jednostrano zadržavajuće veze je:

$$v_{\tilde{\tilde{C}}DMIN}^2 = g(R-r)\cos\alpha$$

a to ostvarljivo za odnos kinetičko.geometrijskih parametara u obliku:

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha = 11g(R-r)\cos\alpha$$

Ako je odnos kinetičkih parametara

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha < 11g(R-r)\cos\alpha$$

tada ce disk napustiti nezadržavajuću vezu, kružno cilindričku površ i neće dospeti u položaj D.

Ako je zadovoljen uslov, da disk dospe u položaj D, onda on započinje treću etapu svog kretanja, kao slobodno telo koje vrši ravansko kretanje i ima tri stepeni slobode kretanja, dve translacije u ravni kretanja i jednu rotaciju oko ose upravne na ravan diska kroz njegov centar masa. Znači da sada kao slobodno telo koje vrši ravansko kretanje ima tri stepeni slobode kretanja i izabraćemo za tri generalisane koordinate koordinate njegovog centra $x_{\tilde{\tilde{C}}}$ i $y_{\tilde{\tilde{C}}}$ i ugao $\vartheta_{\tilde{\tilde{C}}}$ relativnog kretanja - obrtanja oko njegovog centra. Imajući u vidu da se sada disk kreće samo pod dejstvom sile sopstvene težine Mg i početnih uslova, koji su početna brzina njegovog centra masa i ugaona brzina obrtanja oko centra masa jednaki onima koje je dobio u položaju D kada je napustio jednostrano zadržavajuću vezu – polukružnu površ. Analizirajući, kvalitativno, kretanje u ovoj trećoj etapi slobodnog ravanskog kretanja diska njegov centar će izvoditi kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, i jednu sopstvenu rotaciju. Koristeći jednačine ravanskog kretanja pišemo sledeće tri diferencijalne jednačine:

$$M\ddot{x}_{\tilde{\tilde{C}}} = 0$$

$$M\ddot{y}_{\tilde{\tilde{C}}} = -Mg$$

$$\mathbf{J}_{0\zeta}\ddot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}} = 0$$

Sa početnim uslovima: Brzinom lansiranja

$$v_{\tilde{\tilde{C}}D}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha - \frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha = v_{\tilde{\tilde{C}}}^2(t_2=0) \text{ pod uglom } \alpha$$

i jednom ugaonom brzinom sopstvenog obrtanja.

Pa su komponente početne brzine u pravcima horizontale i vertikale::

$$\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\cos\alpha$$

$$\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha$$

dok je početna ugaona brzina sopstvenog obrtanja:

$$\omega_{\tilde{C}D}=\sqrt{\frac{v_{\tilde{C}D}^2}{r}}=\sqrt{\frac{v_0^2}{r}+\frac{4}{3}\frac{\ell}{r}g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3r}\cos\alpha}=\tilde{\omega}_{\tilde{\tilde{C}}}=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t_2-0)$$

Konačne jednačine kretanja u ovoj trećoj deonici puta diska su:

$$\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=const$$

$$\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-gt+\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)$$

$$\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=const$$

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

$$\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

I konačno jednačine kretanja diska po napuštanju jednostrano zadržavajuće veze za zadate početne uslove:

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\cos\alpha$$

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha$$

$$\vartheta_{\tilde{\tilde{C}}}=t\sqrt{\frac{v_0^2}{r}+\frac{4}{3}\frac{\ell}{r}g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3r}\cos\alpha}$$

Najveći domet je kada sentar diska dospe u tačku K, a to je kada je:

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha=0$$

odakle sledi da je:

$$t_K=\frac{2}{g}\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha=0$$

pa je:

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t_K)=2\left[\frac{v_0^2}{g}+\frac{4}{3}\ell\sin\alpha-\frac{8(R-r)}{3}\cos\alpha\right]\cos\alpha\sin\alpha$$

Drugi način rešavanja delova zadatka. Ako se traže samo brzine u naznačenim položajima, a ne i sile otpora veza, može se koristiti *teorema o održanju ukupne energije sistema*, jer je kretanje – kotrljanje diska pod dejstvom sile težine konzervativni sistem, jer u kretanju ne dejstvuju nekonzervativne sile, te je ukupna energija sistema u svakom trenutnu kretanja diska konstantna i jednaka onoj na početku kretanja.

$$E_k(t)+E_p(t)=E_{k0}+E_{p0}=const$$

Kako disk po strmoj ravni izvodi ravansko kretanje njegova kinetička energija po Koenig-ovoj teoremi jednaka je zbiru kinetičke energije translatornog kretanja brzinom centra masa i kinetičke energije relativnog kretanja oko ose kroz centar masa (rotacije). Na osnovu toga i pethodno izabranih generalisanih koordinata za svaki od delova puta, možemo napisati:

Izrazi za kinetičke energije diska, koji se kotrlja po strmoj ravni:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C\zeta}\omega_C^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P\zeta}\omega_P^2 = \frac{3}{4}M\dot{\xi}_C^2$$

$$E_{k0} = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

Promena potencijalne energije diska, koji se kotrlja po strmoj ravni je rezultat promena po visini položaja centra mase diska:

$$E_{p0} = 0$$

$$E_p = -Mgx_C \sin\alpha$$

Na osnovu teoreme o održanju ukupne energije konzervativnog sistema pri kotrljanju diska po strmoj ravni sledi

$$E_k + E_p = \frac{3}{4}M\dot{\xi}_C^2 - Mgx_C\sin\alpha = \frac{3}{4}Mv_0^2 = \cos nt$$

te je:

$$v_C^2 = \dot{\xi}_C^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}gx_C\sin\alpha$$

Iz prethodnog je lako odrediti brzinu centra diska u pložaju napuštanja strme ravbi i prelaska na cilindričnu polukružnu površ zamenom $\xi_C = \ell$:

$$v_{CB} = \dot{\xi}_{CB} = \sqrt{v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha}$$

Za deo kretanja kotrljanja, bez klizanja diska po polukružno-cilindričnoj površi važi teorema održanju ukupne energije sistema. Kinetičke energije u položaju prelaska diska sa strme ravni na polukružno-cilindričnu površ, i u proizvoljnom položaju na njoj su:

$$E_{kB} = \frac{1}{2}Mv_{CB}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C\zeta}\omega_{CB}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P\zeta}\omega_P^2 = \frac{3}{4}Mr^2\frac{1}{r^2}\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha\right) = \frac{3}{4}M\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha\right)$$

$$E_{k\tilde{C}} = \frac{1}{2}Mv_{\tilde{C}}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\omega_{\tilde{C}}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{\tilde{P}\zeta}\omega_{\tilde{P}}^2 = \frac{3}{4}Mr^2\left(\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Umesto izraza za potencijalne energije, možemo uzeti u račun ***promenu potencijalne energije*** pri prelasku od položaja prelaska diska sa strme ravni na polukružno-cilindričnu površ, do proizvoljnog položaja na njoj, jer se potencijali odredjuju sa tačnošću do jedne aditivne konstante i uvek možemo jedan nivo proglasiti za nulti, te je:

$$\Delta_{CB/\tilde{C}}E_p = E_{p\tilde{C}} - E_{pB} = -Mg(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha]$$

Sada je za taj deo puta kotrljanja diska po polukružno-cičimdričkoj površi:

$$F_{k\tilde{C}} + E_{p\tilde{C}} = F_{k\tilde{C}} + \Delta_{CB/\tilde{C}}E_p + E_{pB} = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - Mg(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha] + E_{pB} =$$

$$= E_{kB} + F_{pB} = \frac{3}{4}M\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha\right) + E_{pB}$$

odakle sledi da je:

$$(R-r)^2\dot{\varphi}^2 = \left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha\right) + \frac{4}{3}g(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha]$$

a to predstavlja isti izraz koji smo već dobili prethodnim postupkom:

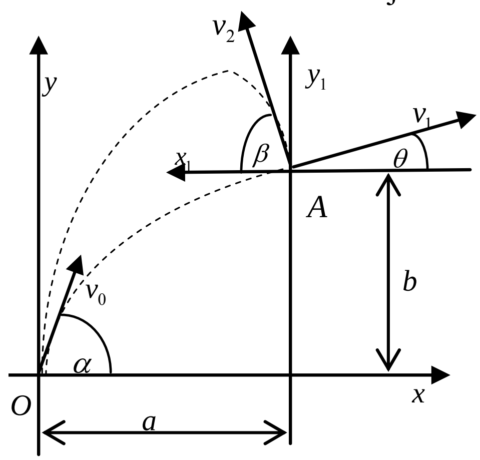
$$v_{\tilde{C}}^2=(R-r)^2\dot{\varphi}^2=v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha+\frac{4g(R-r)}{3}[\cos(\varphi-\alpha)-\cos\alpha].$$

Zadatak 12. Kuglica mase m bačena je iz tačke O, početnom brzinom v_0, koja sa horizontalom gradi ugao α i udari u vertikalni glatki zid Ay_1 i posle odbijanja prođe kroz svoj početni položaj O.

a* Odrediti rastojanje a početnog položaja materijalne tačke od zida, ako se zna da je koeficijent sudara (uspostavljanja) k.

b* Posle sudara sa horizontalnim podom u tački O, pri čemu se može usvojiti isti koeficijent sudara i odbijanja u koju tačku vertikalnog zida će udariti? Da li je ta tačka na višem ili nižem položaju od tačke udara u prethodnom sudaru sa istim zidom?

Otpor vazduha zanemariti u oba slučaja.



Slika 3.

Rešenje:

a* Kuglica će udariti u vertikalni zid brzinom v_1 pod uglom θ, koji čini tangenta povučena na njenu putanju sa normalom udara, a odbiće se pod uglom β. Obe su putanje parabole pa možemo smatrati da je parabola povratne putanje parabola kosog hica početne brzine v_2 i elevacionog ugla β. Konačne jednačine kretanja dinamičke tačke po zakonu kosog hica su:

$$x=v_0t\cos\alpha$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

pa je putanja pre udara:

$$y=xtg\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2}\cos^2\alpha$$

i odnos projekcija brzina na pravac ose x:

$$v_1\cos\theta=v_0\cos\alpha\,.$$

Vreme dostizanja tačke A dobija se iz uslova:

$x=a$ pa sledi: $t_A=\dfrac{a}{v_0\cos\alpha}$.

Tangens ugla θ je: $tg\theta=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}=tg\alpha-\dfrac{ga}{v_0^2\cos^2\alpha}$.

Koeficijent sudara je:

$$k = \frac{|v_2 \cos\beta|}{|v_1 \cos\theta|}$$

pa sledi odnos početnih brzina i elevacionih uglova kosog hica pre udara i posle udara :

$$v_2 \cos\beta = -kv_1 \cos\theta = -kv_0 \cos\alpha \, .$$

Jednačina putanje kosog hica posle udara je:

$$y_1 = x_1 \cdot tg\beta - \frac{g{x_1}^2}{2v_2^2 \cos^2\beta} \, .$$

Iz uslova zadatka da kuglica posle odbijanja prođe kroz svoj početni položaj $O(a,-b)$ sledi sistem jednačina:

$$-b = a \cdot tg\beta - \frac{ga^2}{2v_2^2 \cos^2\beta}$$

$$b = a \cdot tg\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \, ,$$

sabiranjem ovih jednačina sledi veza:

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{ga}{2}\left(\frac{1}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{1}{v_2^2 \cos^2\beta}\right)$$

Kako za kosi udar kugle o vertikalni zid važi odnos: $k = \dfrac{tg\theta}{tg\beta}$ pa sledi relacija:

$$tg\alpha + \frac{tg\theta}{k} = \frac{ga}{2}\left(\frac{1}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{1}{k^2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right)$$

i kako je :

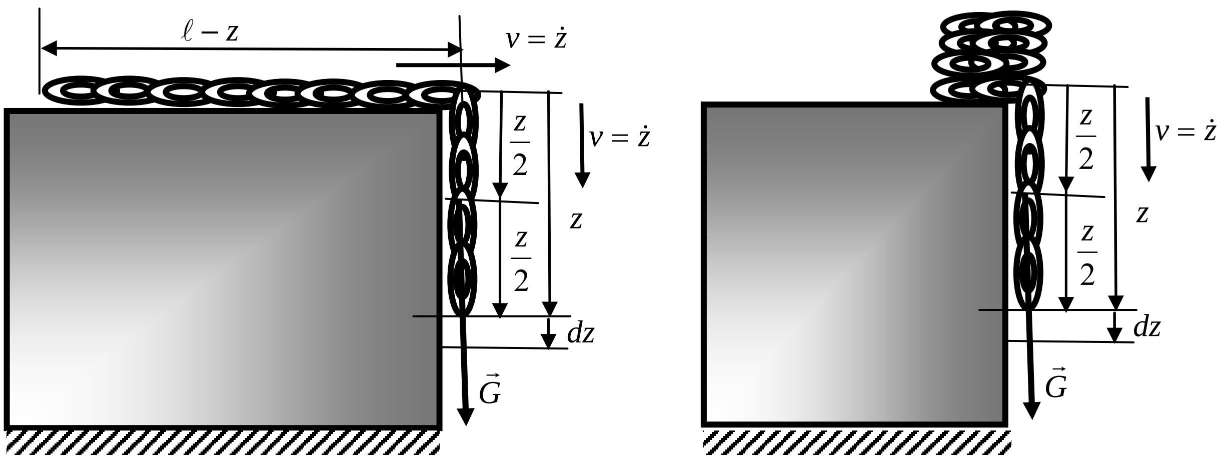
$$tg\theta = tg\alpha - \frac{ga}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

sledi tražena vrednost:

$$a = \frac{kv_0^2}{g(1+k)} \sin(2\alpha) \, .$$

Zadatak 13. Primer translatornog kretanja sistema promenljive mase – Kelijev lanac (A. Kayley 1857. godine je prvi rešio jedan problem sa kretanjem tela promenljive mase.).

Neka se na horizontalnoj površi nalazi lanac specifične mase ρ_{lin} po jedinici dužine dimanzija ML^{-1} m jedinice $\left[kgm^{-1}\right]$, dok jedan deo, nepoznate dužine z visi od ivice horizontalne površi u vertikalnom pravcu. Ako si sve tačke lanca dobile početne brzine v_0 usmerene u pravcu srednje linije lanca, odrediti jednačinu kretanja lanca i njene integrale.



Zadatak 13 - Primer 1* Ukupna masa lanca je: $M_0 = \rho_{lin}\ell$, deo mase lanca na horizontalnoj ravni je $M_{hor}(t) = \rho_{lin}(\ell - z)$, a dela koji visi u vertikalnom pravcu je $M_{vert}(t) = \rho_{lin}z(t)$, dok je težina tog dela lanca koji visi u vertikalnom pravcu je: $G_{vert}(t) = M_{vert}(t)g = \rho_{lin}gz(t)$, i predstavlja aktivnu silu koja dejstvuje na lanac i pored početne brzine lanca uzrok je kretanju lanca, po horizontalnoj površi i u vertikalnom pravcu. S obzirom da se deo lanca u vertikalnom pravcu uvećava, tako da mu se dodaje priraštaj po dužini u vertikalnom pravcu , a pri tome brzina relativnog pripajanja novi masa se odvija sa relativnom brzinom jednakom nuli, $\vec{w}(t) = 0$.

Sada koristimo jednačinu Mešćerskog ya slučaj kada je relativna brzina čestica koje se pripajaju i odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca je: $v = \dot{z}$. Sada možemo da napišemo dve jednačine dinamike delova lanca u horizontalnom pravcu čija se masa smanjuje, i dela koji visi u vertikalnom pravcu čija se masa uvećava:

$$\frac{d}{dt}\{M_{hor}(t)v(t)\} = S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{M_{vert}(t)v(t)\} = -S(t) + G_{vert(t)}$$

gde je $S(t)$ unutrašnja sila u lancu na prelazu lanca iz horitontalnog u vertikalni pravac. Zatim unosimo odredjene mase i aktivnu silu, koje smo odredili u prethodnoj analizi, te dobijamo:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_{lin}(\ell - z)\dot{z}\right] = S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_{lin}z(t)\dot{z}(t)\right] = -S(t) + \rho_{lin}gz(t)$$

Iz prethodnih jednačina naznačenim diferenciranjem dobijamo:

$$\rho_{lin}\left(\ell\ddot{z} - \dot{z}^2 - z\ddot{z}\right) = S(t)$$

$$\rho_{lin}\left(z\ddot{z}+\dot{z}^2\right)=-S(t)+\rho_{lin}gz$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobijamo sledeću:

$$\rho_{lin}\ell\ddot{z}=\rho_{lin}gz$$

ili

$$\ddot{z}-\frac{g}{\ell}z=0$$

koja je hiperbolička i ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2-\frac{g}{\ell}=0$$

čiji su koreni $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ i čije rešenje je;

$$z(t)=ACh\, t\sqrt{\frac{g}{\ell}}+BSh\ \ t\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

u kome su A i B integracione konstante koje se odredjuju iz početnih uslova. Kako nam je poznato da je u početnom trenutku brzina kretanja lanca bila v_0 to nije teško odrediti nepoznate konstante A i B u sledećem obliku:

$$A=0\,,B=v_o\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

te je zakon kretanja lanca

$$z(t)=v_0\sqrt{\frac{\ell}{g}}Sh\ \ t\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Zadatak 13 - Primer 2* Ukupna masa lanca je: $M_0=\rho_{lin}\ell$, deo mase lanca na horizontalnoj ravni je $M_{hor}(t)=\rho_{lin}(\ell-z)$ i smatramo da se skupljen u jedan kup, koji smatramo nepokretnim i da se od njega odvaja deo lanca koji se kreće u vertikalnom pravcu. Masa dela koji visi u vertikalnom pravcu je $M_{vert}(t)=\rho_{lin}z(t)$, dok je težina tog dela lanca koji visi u vertikalnom pravcu $G_{vert}(t)=M_{vert}(t)g=\rho_{lin}gz(t)$, i predstavlja aktivnu silu koja dejstvuje na lanac, i pored početne brzine lanca, uzrok je kretanju lanca, u vertikalnom pravcu. S obzirom da se deo lanca u vertikalnom pravcu uvećava, tako da mu se dodaje priraštaj po dužini u vertikalnom pravcu , a pri tome brzina relativnog pripajanja dodatnih masa se odvija sa relativnom brzinom jednakom nuli, $\vec{w}(t)=0$.

Sada koristimo jednačinu Mešćerskog ya slučaj kada je relativna brzina čestica koje se pripajaju i odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t)=0\,,\qquad \vec{v}_{rel}=-\vec{v}(t)\,,\qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\}=\vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca u vertikalnom pravcu je: $v=\dot{z}$. Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela lanca koji visi u vertikalnom pravcu i u tom pravcu se kreće, pri čemu se njegova masa uvećava:

$$\frac{d}{dt}\{M_{vert}(t)v(t)\}=G_{vert(t)}$$

Iz prethodne jednačine naznačenim diferenciranjem dobijamo:

$$\left(z\ddot{z}+\dot{z}^2\right)=gz$$

Ta jednačina predstavlja Kelijevu jednačinu. Sada uvedimo smenu

$$u=\dot{z}^2$$

čijim diferenciranjem dobijamo:

$$2\dot{z}\ddot{z}=\dot{u}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=\dot{z}u'$$

i unošenjem u dobijenu Kelijevu jednačinu istu transformišemo na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika:

$$u' + \frac{2}{z}u = 2g\ ,$$

koja je oblika

$$u' + P(z)u = Q(z)$$

Opšti integral ove Kelijeve jednačine je:

$$u = \dot{z}^2 = e^{-\int Pdz}\left\{\int Qe^{\int Pdz}dz + C\right\}$$

Dalje računanjem dobijamo

$$u = \dot{z}^2 = e^{-\int \frac{2}{z}dz}\left\{\int 2ge^{\int \frac{2}{z}dz}dz + C\right\} = e^{-2\ln z}\left\{2g\int e^{2\ln z}dz + C\right\} = e^{lm\, z^{-2}}\left\{2g\int e^{\ln z^2}dz + C\right\}$$

$$u = \dot{z}^2 = \frac{1}{z^2}\left\{2g\frac{z^3}{3} + C\right\}$$

Ako je dužina dela lanca u vertikalnom pravcu i u početnom trenutku bila jednaka z_0 i taj deo lanca dobio početnu brzinu v_0, onda nije teško odrediti nepoznatu konstantu:

$$v_0^2 = \frac{2}{3}gz_0 + \frac{C}{z_0^2}$$

dakle sledi da je:

$$C = v_0^2 z_0^2 - \frac{2}{3}gz_0^3$$

te je prvi integral dinamike Kelijevog lanca:

$$\dot{z}^2 = \frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2$$

ili

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2}$$

u obliku zavisnosti brzine od početne dužine lanca. U faznoj ravni $(z, \dot{z})$to je jedna parabola.Prethodna relacija je diferencijalna jednačina, koja razdvaja promenljive, te je možemo napisati u sledećem diferencijalnom obliku:

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2}} = \frac{d\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}}} = \sqrt{\frac{3}{2g}}\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)$$

Posle integraljenja prethodne diferencijalne forme za zadate početne dobijamo vezu izmedju dužine dela lanca u vertikalnom pravcu i vremena u sledećem obliku:

$$t - t_0 = 2\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{z_0}^{z} = 2\sqrt{\frac{3}{2g}}\left[\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

ili konačno:

$$z = z_0 - \frac{3v_0^2}{2g} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{3}}(t - t_0) + \left(\frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

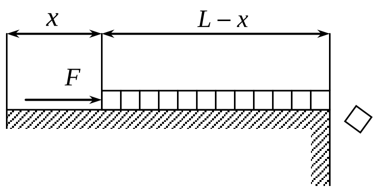
Vidimo da se radi o paraboličnoj zavisnosti izmedju dužine vertikalnog dela lanca i vremena dinamike sistema.

Zadatak 13 - Primer 3.. Veliki broj malih kockica, čija je ukupna masa m čini materijalni sistem diskretnih materijalnih tačaka i leži na ivici stola ustanju mirovanja, kada konstantna sila F počinje da dejstvuje, na ovaj materijalni sistem, paralelno sa ravni stola, kako je na slici 1 prikazano. Odrediti brzinu kretanja ovog materijalnog sistema u funkciji koordinate x - dužine niza za slučaj:

a) da je površina stola hrapava i da je koeficijent trenja između kockica i stola μ,

b) da je površina stola idealno glatka

Kolika je ova brzina kada polovina svih kockica padne sa stola?



Slika 1.

Rešenje:

Postavljeni zadatak se odnosi na materijalni sistem promenljive mase. Zato, označimo masu jedinice dužine niza materijalnih tačaka posmatranog sistema, odnosno linijsku gustinu, sa

$$\rho' = \frac{m}{L}\text{, onda je } m(t) = (L-x)\rho'.$$

Sada možemo da koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica, koje se pripajaju iili odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca kockica u horizontalnom pravcu je: $\dot{x}$ Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela ostatka lanca kockica na horizontalnom stolu, koji ostaje po odvajanju kockica koje odpadaju.

Pošto je relatuvna brzina odvajanja kockica jednaka nuli diferencijalna jednačina biće oblika:

$$\frac{d}{dt}(\rho'(L-x)\dot{x}) = F - \rho' g(L-x)\mu,$$

ili u obliku:

$$\rho'(L-x)\ddot{x} - \rho'\dot{x}^2 = F - \rho' g(L-x)\mu$$

odnosno

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{L-x} = \frac{F}{\rho'(L-x)} - g\mu,$$

Sada uvedimo smenu

$$u = \dot{x}^2$$

čijim diferenciranjem dobijamo:

$$2\dot{x}\ddot{x} = \dot{u} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}u'$$

Te unošenjem u prethodnu jednačinu istu transformišemo na oblik:

$$u' - 2\frac{u}{L-x} = \frac{2F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu$$

Ova jednačina je linearna prvog reda oblika

$$u' + P(x)u = Q(x)$$

Opšti integral ove jednačine je:

$$u = \dot{x}^2 = e^{-\int P dx}\left\{\int Q e^{\int P dx} dx + C\right\}$$

U našem slučaju je:

$$P(x) = -\frac{2}{L-x} \qquad \text{i} \qquad Q(x) = \frac{3F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu$$

Dalje računanjem dobijamo

$$e^{\int \frac{2}{L-x}dx} = e^{-2\ln(L-x)} = \frac{1}{(L-x)^2} \qquad \text{i} \qquad e^{-\int \frac{2}{L-x}dx} = e^{2\ln(L-x)} = (L-x)^2$$

Ztim unoženjem u prethodni izraz za odredjivanje rešenja dobijamo:

$$u = \dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{\int\left[\frac{3F}{\rho'(L-x)} - 2g\mu\right](:-x)^2 dx + C\right\}$$

$$u = \dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{\int\left[\frac{3F(L-x)}{\rho'} - 2g\mu(L-x)^2\right]dx + C\right\}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{-\frac{3F}{2\rho'}(L-x)^2 + \frac{2}{3}g\mu(L-x)^3 + C\right\}$$

Ako su početni uslovi takvi da je za $t = 0$, $x = 0, \dot{x} = 0$ možemo odrediti integracionu konstantu u obliku:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L)^2}\left\{-\frac{3FL^2}{2\rho'} + \frac{2}{3}g\mu L^3 + C\right\} = 0$$

odakle sledi da je:

$$C = \frac{L^2}{6\rho'}(9F - 4\rho' g\mu L)$$

Te je kvadrat brzine kretanja lanca kockica, pri kontinualnom otpadanju čestica preko stola:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{(L-x)^2}\left\{-\frac{3F}{2\rho'}(L-x)^2 + \frac{2}{3}g\mu(L-x)^3 + \frac{L^2}{6\rho'}(9F - 4\rho' g\mu L)\right\}$$

Odnosno:

$$\dot{x}^2 = \frac{L^2}{6\rho'(L-x)^2}\left\{-9F\left(\frac{L-x}{L}\right)^2 + 4\rho' g\mu L\left(\frac{L-x}{L}\right)^3 + (9F - 4\rho' g\mu L)\right\}$$

ili

$$\dot{x}^2 = \frac{L^2}{6\rho'(L-x)^2}\left\{9F\left[1 - \left(\frac{L-x}{L}\right)^2\right] + 4\rho' g\mu L\left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^3 - 1\right]\right\}$$

Za $x = \dfrac{L}{2}$, dobijamo:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{3\rho'}\left\{9F\left[1-\frac{1}{4}\right]+4\rho' g\mu L\left[\frac{1}{8}-1\right]\right\}$$

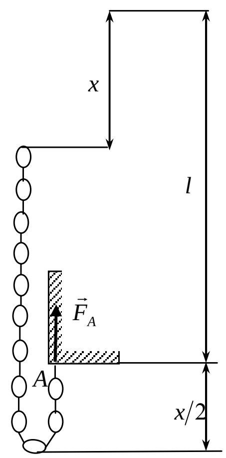
$$\dot{x}^2 = \frac{1}{6\rho'}\{27F - 14\rho' g\mu L\}$$

ili za $\mu = 0$ i $x = \frac{L}{2}$, dobijamo

$$\dot{x}^2 = \frac{9F}{2\rho'}$$

Zadatak 13

- *rimer 4.* Homogeni lanac dužine l, *slika 2,* čija je masa jedinice dužine ρ', visi vertikalno zategnut pri čemu je njegov drugi kraj vezan za tačku A. Lanac se pusti da slobodno pada. Odrediti veličinu sile reakcije u tački A kao funkciju pređenog rastojanja x.



Slika 2

Rešenje:

Sistem je sa promenljivom masom, pa će se rešavati pomoću elementarne teorije Mešćerskog za sistem promenljive mase. Na slici posmatramo dva dela lanca, jedan dužine $\frac{x}{2}$ i drugi dižine $L + \frac{x}{2} - x$.

Mase i težine tih delova su:

$$M_1 = \rho' \frac{x}{2} \qquad \text{i} \qquad M_2 = \rho'\left(L - \frac{x}{2}\right)$$

$$G_1 = M_1 g = \rho' g \frac{x}{2} \qquad \text{i} \qquad G_2 = M_2 g = \rho' g\left(L - \frac{x}{2}\right)$$

Na delu savoja lanca dejstvuju unutrašnje sile u lancu, a na drugi dejstvuje sila otpora F_A tačke oslonca A

Brzime povećanja delova lanaca dodavanjem ili oduzimanjem elementarnih masa delovima lanaca, možemo usvojiti da je jednaka nuli.

Sada možemo da koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica, koje se pripajaju iili odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

i da je primenimo na oba dela lanca:

Brzina kretanja lanca kockica u horizontalnom pravcu je: $\dot{x}$ Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela ostatka lanca kockica na horizontalnom stolu, koji ostaje po odvajanju kockica koje odpadaju.

Pošto je relatuvna brzina odvajanja kockica jednaka nuli diferencijalna jednačina biće oblika:

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho' \frac{x}{2} v_1(t)\right\} = \rho' g \frac{x}{2} + S + F_A$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho' \left(\ell - \frac{x}{2}\right) v(t)\right\} = \rho' g \left(\ell - \frac{x}{2}\right) - S$$

Kako možemo usvojiti da $v_1 \approx 0$, to dabiranjem dveju prethodnih jednačina dinamičke ravnoteže objekata promenljive mase dobijamo sledeću jednačinu:

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho' \left(\ell - \frac{x}{2}\right) v(t)\right\} = \rho' g \ell + F_A,$$

odale sledi da je:

$$\rho' \left(\ell - \frac{x}{2}\right) \dot{v}(t) - \rho' \frac{v^2}{2} = \rho' g \ell + F_A$$

Do iste jednačine možemo doći i koristeći teoremu o promeni impulsa kretanja (količine kretanja) vodeći računa da se ovde radi o promenljivoj masi lanca.Pošto je količina kretanja sistema

$$p = \rho' \left(l - \frac{x}{2}\right) v$$

a zbir svih spoljašnjih sila u pravcu ose x je:

$$\sum F_i^{(x)} = -F_A + \rho' g l$$

to iz teoreme o promeni količine kretanja :

$$\frac{dp}{dt} = \sum F_i$$

sledi:

$$\rho' \left(l - \frac{x}{2}\right) \dot{v} - \rho' \frac{v^2}{2} = -F_A + \rho' g l$$

Međutim levi deo lancaslobodno pada pa je diferencijalna jednačina pokretnog dela lanca

$$\rho' \left(l - \frac{x}{2}\right) \dot{v} = \rho' g \left(l - \frac{x}{2}\right),$$

Odnosno $\dot{v} = g$, odakle lako nalazimo da je:

$v^2 = 2gx$, pa sledi:

$$\rho' \left(l - \frac{x}{2}\right) g - \rho' g x = -F_A + \rho' g l,$$

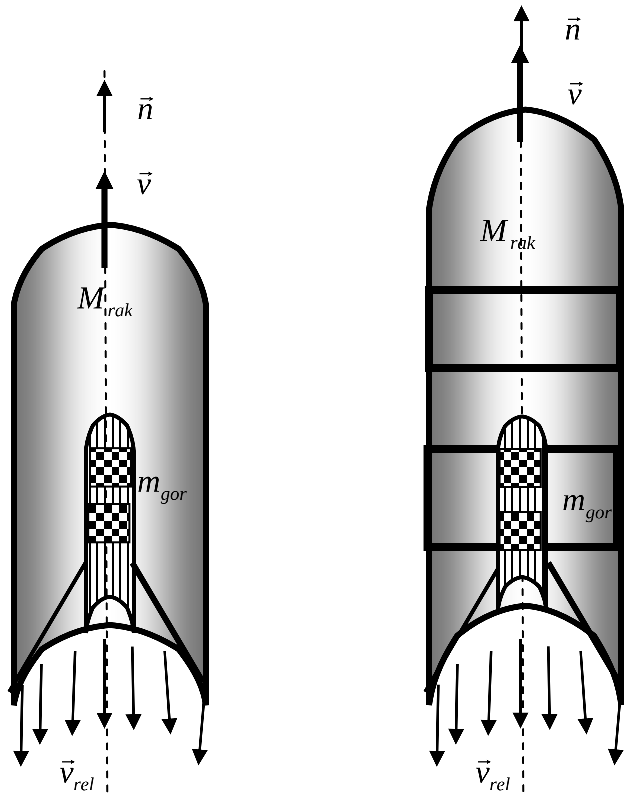
odakle dobijamo treženu reakciju:

$$F_A = \frac{3}{2} \rho' g x.$$

*Zadatak 14**

Jednačina Ciolkovskog (*Константин Эдуардович Циолковский* 1857-1935)

Jednačinu Mešćerskog Ciolkovski je primenio za izučavanje kretanja raketa, pretpostavivši pri tome da se dejstvo gravitacioni sila i sile privlačenja planeta mogu zanemariti.



Označimo sa M_{rak} masu skeleta jednostepene rakete, a sa m_{gor} početnu masu goriva kojim je raketa ispunjena u trenutku lansiranja. Konstanstujemo da je ukupna početna masa rakete $M = M_{rak} + m_{gor}$. Po lansiranju rakete sagorevanjem goriva i izbacivanjem produkata sagorevanja iz rakete smanjuje se ukupna masa rakete sa gorivom. Brzina isticanja produkata sagorevanja je negativna $\left(-\vec{v}_{rel}\right)$ i imajući u obzir da smo već zaključili da se dejstvo gravitacioni sila i sila privlačenja planeta mogu zanemariti na osnovu jednačine Mešćerskog možemo pisati:

$$Mdv = -v_{rel}dM$$

ili

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M}$$

Integraljenjem prethodne jednačine za pretpostavljene početne uslove: da je u trenutku $t_0 = 0$ brzina rakete bila v_0 dobijemo sledeće:

$$v - v_0 = -v_{rel}\ln\frac{M}{M_0}$$

te se, uz zanemarivanje dejstva gravitacioni sila i sila privlačenja planeta, brzina kretanja rakete u bezvazdušnom prostoru može za jednostepenu raketu odrediti pomoću sledećeg obrasca:

$$v = v_0 + v_{rel}\ln\frac{M_0}{M} = v_0 + v_{rel}\ln\frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m} = v_0 + v_{rel}\ln C_1$$

gde je

$$C_1 = \frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m} = e^{\frac{v - v_0}{v_{rel}}}$$

broj Ciolkovskog. Ta jednačina je jednačina Ciolkovskog.

Broj Ciolkovskog predstavlja količnik mase rakete na početku i na kraju aktivnog perioda sagorevanja goriva u motorima rakete.

Iz jednačine Ciolkovskog se vidi da će reultujuća brzina rakete zavisiti od njene početne brzine, v_0, relativne brzine isticanja produkata sagorevanja iz rakete v_{rel}, i od relativne zalihe goriva u raketi u odnosu na masu skeleta rekate $C_1 = \frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m}$.

Brzina višestepene rakete.

Kada posmatramo dinamiku višestepene rakete, potrebno je da se uvede, za svaki stepen rakete, po jedan broj Ciolkovskog. Označimo sa C_s, $s = 1,2,3...,n$ broj Ciolkovskog za s-ti stepen, ako raketa ima n stepeni.

$$C_s = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}} = e^{\frac{(v_s - v_{s-1})}{v_{rel.s}}}, \quad s = 1,2,3...,n$$

Brzina višestepene rakete posle odbacivanja $(s-1)$ prvog stepena je:

$$v_s = v_{s-1} + v_{rel,s} \ln \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s.p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}} = v_{s-1} + v_{rel,s} \ln C_s, \quad s = 1,2,3...,n$$

Takodje u analizi dinamike rakete uvodi se i k_s - ***koeficijent stepena rakete*** i definiše se kao količnik ukupne mase rakete na početku narednog perioda njenog kretanja i i ukupne mase rakete na završetku tog perioda, a takodje i količnik broja Ciolkovskog i tog koeficijenta stepena rakete.

$$k_s = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}}$$

i

$$\frac{C_s}{k_s} = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}}$$

Kao rakete nose odredjenu aparaturu (veštački satelit) to ćemo njegovu masu obeležiti sa M_a, to moženo odrediti proizvod količnika $\frac{C_s}{k_s}$ na sledeći način:

$$\prod_{s=1}^{n} \frac{C_s}{k_s} = \prod_{s=1}^{n} \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}} = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_0}{M_a}$$

Na osnovu prethodnih jednačina moguće je odrediti potrebnu količinu goriva:

$$m_{gor} = \sum_{s=1}^{n} m_s = \sum_{s=1}^{n} \left[\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p} - \left(M_{rak} + m\right)_{s,z}\right] = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s - 1}{C_s} \left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}$$