**DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA**

# DINAMIKA

**I. PRVA NEDELJA:**
**Uvod**

Osnovni kinetički elementi. Preprincipi. Preprincip postojanja. Preprincip kauzalne odredjenosti. Preprincip invarijantnosti. Predmet i zadatak Dinamike. Koordinatni sistemi. Vektor položaja. Kinematička i dinamička –materijalna tačka. Kruto materijalno i deformabilno telo.

**Osnovna odredjenja.**

Definicija 1. Brzina.
Definicija 2. Impuls kretanja.
Definicija 3. Ubrzanje.
Definicija 4. Inerciona sila.
Primeri

**II. DRUGA NEDELJA**
**Zakoni dinamike**

Zakon veza. Zakon trenja. Zakoni otpora i potiska sredine. Zakon elastičnosti materijala. Zakon reaktivnog potiska. Zakon gravitacije. O zakonima dinamike. O sili uzajamnog privlačenja.

## I. Uvod

Nauka o ***Dinamici*** može se različito klasifikovati. Veliki broj univerzitetskih profesora i u Evropi. i u Americi, kao i u Aziji, bolje reći i na Istoki i na Zapadu, i na Severu i na Jugu, je smatraju delom matematike, sa čime se ne slažem, jer je tačno samo to da je matematika primenjena u Mehanici i Dinamici, kao i u drugim oblastima nauka. Zaista matematika je upotrebljena kao pogodan jezik da opiše mnoge fundamentalne zakone u prirodi, ali joj to ne daje pravo da naučne oblasti prisvoji. U izvornom obliku mehanika je deo Fizike, ali zbog velikog broja primena u inženjerstvnu i drugim oblastima nauka i primena, a pre svega svojim autentičnim razvojem izrasla je značajnu naučnu disciplinu koja se na univerzitetima izučava kao posebna.

I istorijski i filozofski posmatrano, može se utvrditi da ***Mehanici*** pripada jedan od prioriteta u procesu utemeljenja nauka, jer je jedna od prvih koja se formirala kao nauka.

Celo iskustvo moderne Fizike zasniva se na ''objašnjenju'' ili opisu fenomena u pojmovima i terminima *kretanja*. Naprimer *Kinetička teorija gasova* se ne može objašnjavati bez dinamike, kao i mnogi procesi i fenomeni u prirodi, počevši od svetlosti do elektriciteta.

Prva pitanja koje postavljamo su: *Ko je dao značajne doprinose da se utemelji naučna oblast pod imenom Dinamika*? *Kojim pojmovima objasniti filozofiju kretanja*? *Šta je zadatak Dinamike*? I na kraju, *kako primeniti teoriju i filozofiju kretanja i dinamiku materijalnih sistema*?

1* Odgovarajući na pitanje: *Ko je dao značajne doprinose da se utemelji naučna oblast pod imenom Dinamika*? - moramo se vratiti istorijskim korenima istraživanja I saznanjima koja su se vekovima stvarala.

Prema prvim poznatim dokumetima iz istorije nauke reč mehanika - $\mu\eta\chi\alpha\nu\omega$ prvi je upotrebio *Aristotel* (364-322 godine pre nove ere), a značenje u prevodu bi bilo – uradim ili pronalazim. Medju prvim istraživačima koje pamti istorija nauke je svakako i *Arhimed* (287-212 godine pre nove ere) sa poznatim Arhimedovim zakonom.

Poljski astronom *Nikola Kopernicus* (1473-1543) svojim delom o kretanju planeta daje trajan doprinos mehanici planeta uvodeći teoriju o helio centričnom sistemu i time je pobio Ptolomejevu teoriju o geocentričnom sistemu kretanja planeta.

Sve do Galileja (*Gallileo Galilei* 1564-1642) definicija sile, kao i njena primena bila je čisto statička. U svom delu "*Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*" u kome je publikovao rezultate istraživanja zakona *slobodnog pada, horizontalnog i kosog hica,* 1583 godine. je uveo pojam *ubrzanja* I doveo ga u vezu sa *silom*. Time je on dao doprinos mehanici da se *kretanje tela odvija pod dejstvom sila* i praktično je otvorio kvalitativno nove pravce istraživanja i utemeljio novu naučnu oblast – *Dinamiku*.

Briljantni holandski naučnik Kristijan Hajgens (*Christian Huygens* (1629-1695)) je izučio i opisao kretanje matematičkog klatna i uveo je pojam i objasnio svojstva centrifugalne sile i time se se u pisao u zaslužne naučnike za dalji razvoj Dinamike i Teorije oscilacija. Te rezultate je opisao u svom delu "*Horologium oscillatorium*" koje publikovano 1638 godine.

Engleski naučnik Isak Njutn (*Isaak Newton* (1643-1727)) napisao je znamenito delo "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Matematički principi prirodne filozofije) koja je publikovana maja 1687 godine i time je dao jak oslonac daljem *razvoju Dinamike*. Ovim delom je dao nov matematički opis i dokaze izvedene čisto matematičkim putem, istovremeno objedinivši sazanja i svojih prethodnika i savremenika u jednu jedinstvenu celinu. Newton je dao Dinamici i nov matematički aparat "*diferencijalni i integralni račun*" takozvani "*infinitezimalni račun*". Nemački naučnik filozof, matematičar i diplomata Lajbnic (*Gottfrien Wihelm Leibniz* (1646-1716)) je u svojim istraživanjima, takodje, došao do otkrića differencijalnog računa te se u to vreme vodila velika polemika oko prioriteta u tim značajnim otkrićima.

Leonid Ojler (Leonid Euler (1707-1783)) je napiso delo "*Mechanica sive motus scientia*" koje je publikovano 1736. godine i kojim je u Dinamiku uvedena prva sistematska primena analize.

Primenu analize u Dinamici produbio je francuski naučnik Dalamber (*Jean Le Rond d'Alambert* (1717-1783)) napisavši fundamentalno delo "*Traite de Dynamique*" , koje je publikovano 1743. godine. To delo sadrži opštu metodu za postavljanje jednačina dinamike sistema i njihova rešenja. Ojleru pripada zasluga što je prvi sjedinio Statiku I Dinamiku u prirodnu celnu, jer je mirovanje i ravnoteža sistema specijalan slučaj stanja kretanja.

Još jedan velikan i Mehanike i posebno Dinamike mora biti ovde citiran, To je, takodje francuski naučnik, Lagranž (*Joseph Luis Lagrange* (1735-1813)) koji je svojom "*Analitičkom mehanikom"* ("*Mècanique Analytique*") publikovane 1788. godine uveo čistu analitičku metodu u Mehaniku i time postavio temelje *Analitičke mehanike*. Lagranž je u ovom delu celokupnu *Statiku* postavio na osnovu *principa mogućih pomeranja*.

Razvoj Mehanike na osnovama Nnjutnovog znamenitog dela "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Matematički principi prirodne filozofije) daje Klasičnu mehaniku koja se nadmočno razvija i obogačuje novim saznanjima. To je tako bilo sve do pred kraj 19 veka kada su se pojavila saznanja o pomeranju perfihela putanje Merkura i došlo do novih otkrića fizičkih pojava koje nisu mogle da se objasne pomoću klasične mehanike, kada se javlja nova *Ajnštajnova teorija relativiteta*. Autor ove teorije je Albert Ajnštajn (*Albert Einstein* -1879) kojom je modificiran Njutnov Zakon o Opštoj (Univerzalnoj) gravitaciji.

Takodje, napominjemo i novu *E El Nashie teoriju*, kojom se proširuje pojam o dimenzionalnost prostora.

Savremena istraživanja iz oblasti dinamike odnose se na otkrića nelinearnih fenomena dinamike.

2* Odgovor na drugo pitanje - *Kojim pojmovima objasniti filozofiju i teotiju kretanja*? – nas upućuje na vekovno iskustvo i saznanja ljudske civilizacije, kao i na filozofiju nauke.

Ako prihvatimo da je Mehanika tačna prirodna nauka, tačna koliko i matematika, čak I tačnija, jer njena tvrdjenja zahtevaju pored matematičkih dokaza i eksperimentalnu proveru i verifikaciju i prirode i ljudske prakse, a i dokaze tehnologije. Mehanika je I matematička teorija vekovnom kretanju nebeskih tela, ali i tehničkoj ptaksi. Tačnost I savršenstvo tačnosti je rečativno i ocenjuje se na osnovu različitih merila. Ali u osnovi su saznanja ljudse prakse i mogućnosti ljudske prakse, posmatranja, identifikacije I realizacije.

Tvrdjenja u teoriji mehanike su *principi, zakoni* i *teoreme.* Ta tvrdjenja su opšte prihvaćena skoro kao i zakoni prirode. U predgovoru svoje monografije Preprincipi mehanike autor Vujičič piše:

"Mehanika je stara koliko i materijalni i pisani relikti koji svedoče o razvoju saznanja o kretanju i mirovanju tela: savremena je koliko i savremenost, jer skoro sve novo što se stvara, gradi i razgradjuje ne može se odvojiti od ove nauke".

Filozofske klasifikacije saznanja mehanke su veoma značajna za postavljanje teorije mehanike. Filozofsko polazište, matematičko-logička koncepcija, kao i spoznaja šta su osnovni, a šta izvedeni pojmovi omogućavaju lakše prihvatanje saznanja i znanja mehanike i čine je jasnijom. Zato je značajno spoznati šta su preprincipi mehanike i koje smo prihvatili za postavljanje teorije mehanike. Takodje je važno u teoriji mehanke razgraničiti pojmove: preprincipi, osnovne definicije, zakoni dinamike, principi mehanike teoreme i leme, kao i njihova svojstva i mogućnosti upotrebe.

Naprimer, svojstvo *principa mehanike* je da je svaki od njih ponaosob dovoljan za *invarijantno razvijanje cele teorije mehanike.*

Mora se napomenuti da se ne samo u univerzitetskim udžbenicima prestižnih univerziteta u svetu, kao i u Srbiji javlja neuredjenost upotrebe tih filozofskih pojmova filozofije nauka, pa i mehanike. Jedan deo te neuredjenosti ima korene i u delima velikana mehanike.

Kako je nivo umeća u istoriji razvoja mehanike zavisio od posedovanja i razvoja matematičkih znanja, kao i od operativnosti raznih teorija, to je factor ocene valjanosti bio i ostao logička provera misaonog modelovanja mehaničkih objekata i potvrda izvedenih relacija u praksi i eksperimentu, kao i posmatranjem i merenjem promena procesa u prirodi.

*Prednačelom postojanja* odredjen je predmet razmatranja u dinamici, kao i dominantni matematički opis usmeren na njega, bez opravdane sumnje o postojanju i drugih misaonih svetova o i u mehanici. Ne smatramo da su se, izborom prednačela postojanja i dominantnog matematičkog opisa usmerenog na njega, okončala znanja o kretanju tela, ali taj izvor omogućava sistematizaciju znanja i stepenovanje nivoa saznanja, od intuitivnih shvatanja do složenih i najtananijih matematičkih dokaza i zaključaka.

***Preprincip ili prednačelo*** definišemo kao ***jasan iskaz*** čija ***istinitost ne podleže preispitivanju*** i od koje polazi teorijska mehanika kao *prirodna nauka (filozofija) o kretanju tela*.

Znači, da su preprincipi osnovno polazište od koga polazi mehanika,kao nauka o prirodi. Preprincipi iskazuju gnoseološku pretpostavku da mehanika ima utvrdjenu interpretaciju, kao nauka o kretanju realnih tela.

Zahtev jasnosti podrazumeva da se prednačela mogu iskazati bez prethodno uvedenih pojmova i definicija, te da se lako i prosto shvataju kazana odredjenja koja su saglasna prethodno stečenom znanju ili naslućivanju a od značaja su za mehanku. Prednačela su jasna po sebi i ne podstiču pitanja.

***Preprincip postojanja*** (ontološke pretopstavke). Na osnovu nasledjenih, postojećih i stečenih znanja mehanika polazi od toga da postoje ***tela, rastojanja i vreme***.

***Postojanje tela*** u teorijskoj mehanici manifestuje se masom tela za koju je usvojena oznaka $m$, dok je njena dimenzija $M$ ($\dim m = M$). To je osobina po kojoj se razlikuje telo koje postoji u mehanici (dinamici) od geometrijskog pojma tela koje karakteriše zapremina $V$

***Postojanje rastojanja*** se identifikuje izmedju čestica u prirodi, izmedju nebeskih tela….. Rastojanje izmedju dveju čestica se može obeležiti sa $s$, njegova dimenzija je $\dim s = L$.

Pojam ***masena tačka*** ili ***materijalna tačka*** razlikuje se od geometrijskog pojma tačke ne samo po tome što materijalnu tačku karakteriše masa $m$, a od čestice se razlikuje po tome što izmedju čestica uvek postoji i rastojanje. Materijalna tačka se predstavlja masom $m$ i vektorom položaja $\vec{r}$, dok je dimenzija njene mase $M$ ($\dim m = M$).

***Vreme*** se najčešće obeležava sa $t$**,** a njegova dimenzija je $\dim t = T$.

***Preprincip kauzalne odredjenosti***.

Na osnovu preprincipa kauzalne odredjenosti [1], rastojanja, njihove promene, brzina, ubrzanje, impuls kretanja i drugi činioci kretanja materijalne tačke jednoznačno su odredjeni u toku vremena, kako u budućnosti, tako i u prošlosti, i to sa onolikom tačnošću koliko su nam poznate odrednice kretanja u bilo kom odredjenom trenutku vremena.

***Preprincip invarijantnosti.***

Na osnovu preprincipa invarijantnosti kretanje i svojstva kretanja materijale tačke ne zavise od forme iskaza, jer utvrdjena istina o kretanju i zapisana jednom u odredjenom obliku nekog jezika jednako je sadržana u zapisu drugog oblika ili drugog pisma. Ovo znači da definisano kretanje materijalne tačke možemo izražavati u različitim sistemima koordinata, i označavati odredjenim realnim brojevima za masu, vreme i rastojanje, ali da pri tome sva tri realiteta su invarijante.

***3* Šta je zadatak Dinamike*?**

Zadatak Dinamike je da ispituje kretanja materijalnih tela pod dejstvom sila (Rašković). Dok su geometrija i kinematika ispitivale kretanja geometrijskih oblika ne vodeći računa o njihovoj materijalnosti, prva čak ni o vremenu, Dinamika ispituje kretanja materijalnih tela polazeći od preprincipa postojanja ***mase tela***, ***rastojanja i vremena.*** Znači polazi od materijalnosti tela i vodi računa o vremenu u kome se kretanje vrši.

Svi zadaci Dinamike mogu se podeliti u dve klase: 1* zadaci-problemi odredjivanja sila koje proizvode kretanja materijalnih tela; 2* zadaci-problemi odredjivanja kretanja materijalnih tela pod dejstvom poznatih sila.

Kako je specijalan slučaj kretanja mirovanje kada je brzina tela jednaka nuli, to tada ispitujemo ravnotežu tela pod dejstvom sila, a to je I zadatak Statike, pa je ona prirodno deo dinamike.

**4* I na kraju, *kako primeniti teoriju i filozofiju kretanja, kao i dinamiku materijalnih sistema*?**

Odgovor na to pitanje stident mora tražiti sam posle savladanog sadržaja i programa predmeta dinamika, professor će se postarati da teorijski šrimeri modela dinamike, kao apstrakcija realnih inženjerskih sistema, budu dovoljno inspirativni da student u svakoj konkretnoj prilici izučavajući programe predmeta struke, kao i u inženjerskoj praksi prepozna modele I identifikuje ih sa onima iz studija dinamike.

# I. OSNOVNA ODREDJENJA

### *4.1. Osnovna odredjenja.*

Da bi smo odredili bitne pojmove mehanike materijalne tačke uvodimo sledeća osnovna odredjenja: ***definiciju brzine i definiciju impulsa kretanja***, kao i ***definiciju ubrzanja i definiciju inercijalne sile*** [1], [2].

***Definicija 1***. *Brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke $N$, mase $m$, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena $t$, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je granična vrednost odnosa rastojanja dva njena bliska položaja $N(t)$ i $N(t+\Delta t)$ odredjena vektorima položaja $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t+\Delta t)$ i intervala vremena $\Delta t$, za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:*

$$\vec{v}(t) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Znači da je brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena $t$, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ po definiciji jednaka prirodnom izvodu vektora položaja $\vec{r}(t)$ po vremenu $t$ . Brzina materijalne tačke je znači vektor, i kao takav je invarijantan pri transformaciji koordinata iz jednog u drugi sistem koordinata. Definicijom brzine uspostavlja se *veza izmedju rastojanja i vremena*. Dimenzija intenziteta brzine je:

$$\dim|\vec{v}| = LT^{-1}$$

gde smo sa $L$ označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa $T$ dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znači da je jedinica brzine $[m \sec^{-1}]$.

***Definicija 2.*** *Impuls kretanja* $\vec{p}(t)$ *ili* $\vec{K}(t)$ *materijalne tačke* $N$*, mase* $m$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položja* $\vec{r}(t)$ *je proizvod njene mase* $m$ *i vektora* $\vec{v}(t)$ *njene brzine u tom trenutku vremena*:

$$\vec{p}(t) \stackrel{def}{=} m\,\vec{v}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}(t) \stackrel{def}{=} m\,\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t) \stackrel{def}{=} m\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}(t) \stackrel{def}{=} m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Znači da je impuls kretanja $\vec{p}(t)$ *ili* $\vec{K}(t)$ *materijalne tačke* $N$*, mase* $m$*,* vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom impulsa kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza izmedju mase $m$ materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta impulsa kretanja materijalne tačke je:

$$\dim|\vec{p}(t)| = MLT^{-1}$$

gde smo sa $M$ označili dimenziju mase, čija jednica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa $L$ smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa $T$ dimenziju vremena, čija je jednica $[\sec]$. Znaći da je jedinica impulsa $\left[kg\,m\sec^{-1}\right]$ ili $[N\sec]$.

**Definicija 3.** *Ubrzanje* $\vec{a}(t)$ *materijalne taćke* $N$*, mase* $m$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ *je granična vrednost odnosa razlike njenih brzina* $\vec{v}(t+\Delta t)$ *i* $\vec{v}(t)$ *dva njena bliska položaja* $N(t+\Delta t)$ *i* $N(t)$ *odredjena vektorima položaja* $\vec{r}(t)$ *i* $\vec{r}(t+\Delta t)$ *i intervala vremena* $\Delta t$*, za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:*

$$\vec{a}(t) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Znači da je ubrzanje $\vec{a}(t)$ materijalne taćke $N$, mase $m$, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena $t$, po definiciji jednako prirodnom izvodu vektora njene brzine $\vec{v}(t)$ po vremenu $t$. Ubrzanje je vektor i kao takav je invarijantan. Definicijom ubrazanja uspostavlja se veza izmedju rastojanja i vremena. Dimenzija ubrzanja je:

$$\dim|\vec{a}| = LT^{-2}$$

gde smo sa $L$ označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa $T$ dimenziju vremena, čija je jednica $[\sec]$. Znači da je jedinica ubrzanja $\left[m\sec^{-2}\right]$.

***Definicija 4.*** *Sila inercije* $\vec{I}_F(t)$ *materijalne taćke* $N$*, mase* $m$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ *je proizvod njene mase* $m$ *i suprotno usmerenog vektora njenog ubrzanja* $\vec{a}(t)$ *u tom trenutku vremena:*

$$\vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\,\vec{a}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Znači da je sila inercije $\vec{I}_F(t)$ materijalne taˇcke vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom sile inercije kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza izmedju mase $m$ materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta sile inercije kretanja materijalne tačke je:

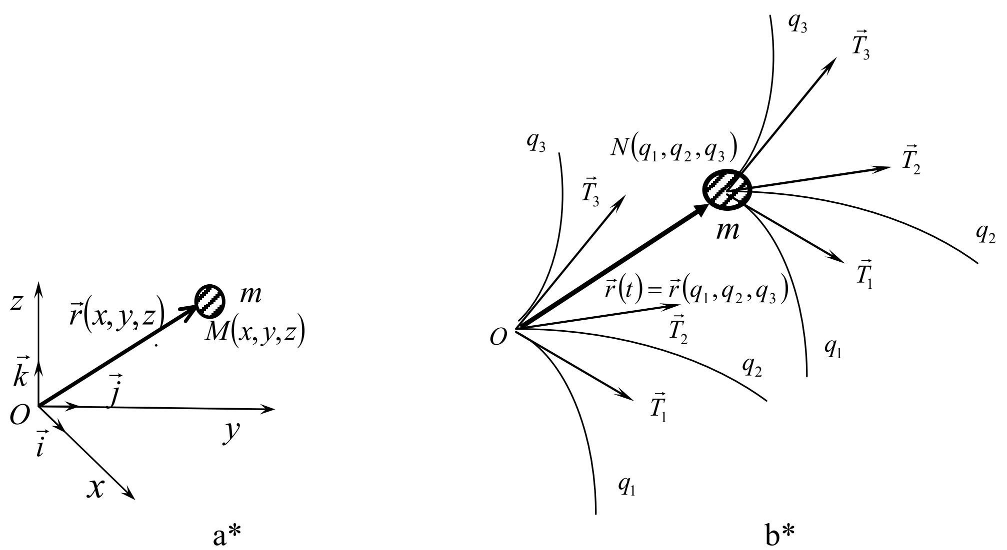
$$\dim\left|\vec{I}_F\right| = MLT^{-2}$$

gde smo sa $M$ označili dimenziju mase, čija jednica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa $L$ označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa $T$ dimenziju vremena, čija je jednica $[\sec]$. Znači da je jedinica sile inercije $\left[kgm\sec^{-2}\right]$ ili $[N]$.

Na osnovu preprincipa kauzalne odredjenosti [1], rastojanja, njihove promene, brzina, ubrzanje, impuls kretanja i drugi činioci kretanja materijalne taćke jednoznačno su odredjeni u toku vremena, kako u budućnosti, tako i u prošlosti, i to sa onolikom tačnošću koliko su nam poznate odrednice kretanja u bilo kom odredjenom trenutku vremena.
Na osnovu preprincipa invarijantnosti kretanje i svojstva kretanja materijale tačke ne zavise od forme iskaza, jer utvrdjena istina o kretanju i zapisana jednom u odredjenom obliku nekog jezika jednako je sadržana u zapisu drugog oblika ili drugog pisma. Ovo znači da definisano kretanje materijalne tačke možemo izražavati u različitim sistemima koordinata, i označavati odredjenim realnim brojevima za masu, vreme i rastojanje, ali da su pri tome sva tri realiteta invarijante.

### *Osnovna odredjenja u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata*

Neka je vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(q_1, q_2, q_3)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata $q_1$, $q_2$ i $q_3$ sa ortovima orjentacije $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ i $\vec{T}_3$ (vidi sliku 1. b*).




**Slika 1**. Materijalna tačka mase $m$ u (a* ) Descartes+ovom sistemu koordinata $N(x,y,z)$ u (b*) generalisanom systemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata $N(q_1,q_2,q_3)$

*Brzina materijalne tačke je sada:*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Kako je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = A_i \cdot \vec{T}_i$, gde su $A_i$ Lamé-ovi koeficijenti $A_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$

$$A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

i ortovi generalisanog sistema ortogonalnih krivolinijskih koordinata

$$\vec{T}_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

za koje važi uslov ortogonalnosti $\left(\vec{T}_i, \vec{T}_j\right) = \begin{cases} 1 & za \quad i = j \\ 0 & za \quad i \neq j \end{cases}$

to sledi da je brzina materijalne tačke u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{T}_i$$

gde su $v_i$ komponente vektora brzine u tom sistemu.

***Impuls kretanja*** $\vec{p}(t)$ ***ili*** $\vec{K}(t)$ ***materijalne tačke*** $N(q_1, q_2, q_3)$***, mase*** $m$***,*** *čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položja* $\vec{r}(t)$ *u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata* $(q_1, q_2, q_3)$*;*

$$\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m\vec{v} = m\sum_{i=1}^{3} A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = m\sum_{i=1}^{3} v_i \vec{T}_i = \sum_{u=1}^{3} p_i \vec{T}_i \quad \text{gde je} \quad p_i = mA_i \dot{q}_i$$

***Brzina materijalne tačke*** $N(r, \varphi, z)$ ***u sistemu polarno-cilindričnih koordinata*** $(r, \varphi, z)$ je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k},$$

gde su $(\vec{r}_0, \vec{c}_0, \vec{k})$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.

***Impuls kretanja materijalne tačke*** $N(r, \varphi, z)$ ***u sistemu polarno-cilindričnih koordinata*** $(r, \varphi, z)$ možemo napisati u obliku:

$$\vec{p}(t) = m(\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k})$$

dok su njegove koordinate u tom sistemu

$$p_r = m\dot{r} \qquad p_\varphi = mr\dot{\varphi} \qquad p_z = m\dot{z}$$

***Brzina materijalne tačke*** $N(\rho, \varphi, \psi)$ u ***sistemu sfernih koordinata*** $(r, \varphi, \psi)$ je :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{\rho}_0 + \rho\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\varphi}\cos\psi\vec{c}_0 + \rho\dot{\psi}\vec{v}_0,$$

gde su $(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{v}_0)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i meridijalnom pravcu

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{A_\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}\right) = \cos\psi\cos\varphi\cdot\vec{i} + \cos\psi\sin\varphi\cdot\vec{j} + \sin\psi\cdot\vec{k}$$

$$\vec{c}_0 = \frac{1}{A_\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{k}\right) = -\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{A_v}\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\psi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial\psi}\vec{k}\right) = -\sin\psi\cos\varphi\cdot\vec{i} - \sin\psi\sin\varphi\cdot\vec{j} + \cos\psi\cdot\vec{k}$$

***Impuls kretanja materijalne tačke*** $N(\rho, \varphi, \psi)$ u ***sistemu sfernih koordinata*** $(r, \varphi, \psi)$ je

$$\vec{p}(t) = m(\dot{\rho}\vec{r}_0 + \rho\dot{\varphi}\cos\psi\vec{c}_0 + \rho\dot{\psi}\vec{v}_0)$$

$$p_\rho = m\dot{\rho} \qquad p_\varphi = m\rho\dot{\varphi}\cos\psi \qquad p_v = m\rho\dot{\psi}$$

***Ubrzanje materijalne tačke*** $N(q_1, q_2, q_3)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata $(q_1, q_2, q_3)$ je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{T}_i,$$

gde su $a_i$ projekcije vektora ubrzanja u generalisanom sistemu generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordunata

$$a_i = \frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial q_i}\right].$$

***Sila inercije*** $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne taćke*** $N(q_1, q_2, q_3)$***, mase*** $m$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ *je:*

$$\vec{I}_F(t) = -m\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{T}_i = -\sum_{u=1}^{3} I_{F,i}\vec{T}_i$$

$$I_{F,i} = -\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right] = -\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right], \quad i = 1,2,3$$

gde je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ kinetička energija materijalne tačke.

***Ubrzanje materijalne tačke*** $N(r, \varphi, z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k}$$

gde su $\left(\vec{r}_0, \vec{c}_0, \vec{k}\right)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.

***Sila inercije*** $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne tačke*** $N(r, \varphi, z)$***, mase*** $m$ ***,*** *čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata *je*

$$\vec{I}_F = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 - m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 - m\ddot{z}\vec{k},$$

sa komponentama

$$I_{F,r} = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \qquad I_{F,c} = -m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) \quad I_{F,z} = -m\ddot{z}$$

***Ubrzanje materijalne tačke*** $N(\rho, \varphi, \psi)$ u sistemu sfernih koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

gde su $\left(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{v}_0\right)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i meridionalnom pravcu.

***Sila inercije*** $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne tačke*** $N(\rho, \varphi, \psi)$***,*** *mase* $m$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* $t$*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata *je*

$$\vec{I}_F = -m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 - \frac{m}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0 - m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

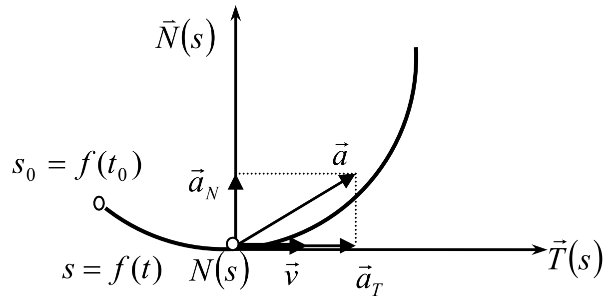
sa komponentama

$$\vec{I}_{F,\rho} = -m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0$$

$$\vec{I}_{F,c} = -\frac{m}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0$$

$$\vec{I}_{F,v} = -m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

***Vektor brzine*** $\vec{v}(s)$ ***pokretne materijalne tačke*** $N(s)$ usmeren je po tangenti na putanju tačke po krivoj liniji, orjentisanoj ortom $\vec{T}(s)$.




$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad \text{i} \qquad \vec{v} = v \cdot \vec{T}$$

***Impuls kretanja materijalne tačke** $N(s)$, mase $m$, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena $t$, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$* u prirodnom sistemu koordinata je:

$$\vec{p}(t) = m \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

i pada u pravac tangente na putanju materijalne tačke.

*Oskulatorna ravan je* ravan krive, to je ravan koju čine tangenta na putanju pokretne tačke, sa jediničnim vektorom $\vec{T} = \vec{T}(s)$, i usmerena je u pozitivnom smeru porasta puta $s$ i normala na krivu sa jediničnim vektorom $\vec{N} = \vec{N}(t)$, u smeru konkavne strane putanje, i vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ pokretne materijalne tačke $N(s)$ leži uvek u toj ravni.

U ***prirodnom sistemu putanje materijalne tačke** $N(s)$ **vektor ubrzanja** $\vec{a}(s)$* te tačke $N(s)$ je

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R_k}\vec{N},$$

i njegove komponente su:

$a_T = \dot{v}$ -tangencijalno ubrzanje orjentisamo ortom tangente na krivolinijsku putanju

$a_N = \dfrac{v^2}{R_k}$ -normalno ubrzanje orjentisamo ortom normale na krivolinijsku putanju

***Sila inercije** $\vec{I}_F(t)$ **materijalne tačke** $N(s)$, mase $m$, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena $t$, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$* u prirodnom sistemu je:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\left(\dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R_k}\vec{N}\right)$$

i njene komponente su:

$$\vec{I}_{F,T} = -m\vec{a}_T = -m\dot{v}\vec{T}$$

-komponenta sile inercije u tangencijalnom pravcu orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju ***materijalne tačke** $N(s)$, mase $m$;*

$$\vec{I}_{F,N} = -m\vec{a}_N = -m\frac{v^2}{R_k}\vec{N}$$

- komponenta sile inercije u pravcu normale na putanju i orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju ***materijalne tačke** $N(s)$, mase $m$.*