DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
DINAMIKA

IV. ČETVRTA NEDELJA

Principi mehanike.

Princip ravnoteže. Princip rada. Princip dejstva. Princip prinude. Newton-ovi principi. Primeri.

Teoreme mehanike.

Teorema o promeni impulsa kretanja. Teorema o promeni kinetičke energije. Promena Hamiltonijana. Teorema o promeni mehaničke energije. Teorema o upravljivosti kretanja. Teoreme o optimalnom kretanju upravljivih sistema i optimalnom upravljanju kretanjem. Newton-ovi zakoni.

Principi mehanike. (Nastavak)

*Pod pojmom **principa ili načela mehanike** podrazumevamo iskaz **opšteg značenja** pomoću uvedenih pojmova i definicija mehanike, čija istinitost ne podleže dokazivanju.*

Principi mehanike ili *načela mehanike* moraju biti *saglasni sa* preprincipima ili *prednačelima*.

Opšti principi ili opšta načela jesu *i uslovi* iz kojih se mogu izvesti *jednačine kretanja materijalne tačke i materijalnog sistema,* i obrnuto, oni su posledice tih jednačina kretanja. Oni pokazuju osobine kretanja materijalne tačke, odnossno sistema materijalnih tačaka i potpuno su ekvivalentne jednačinama kretanja.

Opšte principe mehanike možemo podeliti u dve grupe: *diferencijalne i integralne principe*.

Diferencijalni principi omogućavaju da se iz njih izvedu *diferencijalne jednačine kretanja*.

Integralni principi karakterišu i putanje materijalnih račaka.

Grupi ***diferencijalnih principa*** pripadaju: *Dalamberov princip, Lagražeov princip virtualnih pomeranja i Gausov princip najmanjeg odstupanja (ili prinude).*

Grupi ***integralnih principa*** pripadaju: *Hamiltonov princip najmanjeg dejstva*, *Lagranž-Mopertiev princip najmanjeg dejstva.*

Hamiltonov princip najmanjeg dejstva se najviše koristi u problemima teorijske fizike i i kvantne mehanike. *Lagranž-Mopertiev princip najmanjeg dejstva se najaviše koristi u Teoriji elastičnosti i Teoriji oscilacija i zadacima sa deformacionim radom. Oba ta principa su varijacionog karaktera..*

Pored ovih glavnih principa postoje i drugi, a mdju njima: *Jakobijev princip (Jacobi), Helmholcov (Helmholtz), Hercov (Hertz), Pfafov (Pfaff) i drugi,*

Prva dva integralna principa su našla veliku primenu u tehnici pa ćemo ih detaljnije proučiti i primenjivati.

Princip dinamičke ravnoteže. (Nastavak)

*Materijalno kruto telo je u **dinamičkoj ravnoteži** ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Ovaj princip se može izraziti matematički:

1 za jednu materijalnu tačku na koju dejstvuje sistem od* k *sila* $\vec{F}_i$, $i = 1,2,...,k$

$$\sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i = 0$$

2* za materijalni sistem kod koga na svaku materijalnu tačku mase m_ν, $\nu = 1,2,...,N$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_{\nu i}$, , $\nu = 1,2,...,N$, $i = 1,2,...,k_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu I} = 0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu I}\right] = 0$$

U saglasnosti sa *osnovnim odredjenjem, definicijom sile inercije kao vektorske invarijante*

$$\vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\,\vec{a}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

i *zakonima dinamike,* jednačina (relacija) *principa dinamičke ravnoteže*, lako je, u vektorskom obliku, napisati odgovauće jednačine.

Princip dinamičke ravnoteže je drugačija formulacija Dalambert-ovog principa preko osnovnih odredjenja.

Kad u nekom sistemu materihalnih tačaka sile razložimo na efektivne i izgubljene, onda su ove poslednje u ravnoteži .

1740.godine ***Leonid Ojler*** u *''Komentarima Petrogradske akademije nauka'' postavio je princip koji se bitno ne razlikuje od Dalamberovog.* Formulacija tog njegovog principa je:

Za sistem materijalnih tačaka sistem efektivnih sila ekvivalentan je sistemu napadnih (aktivnih) sila.

Dalamberov princip se obično primenjuje u trećem obliku uvodeći ***pojam sile inercije***, kao što smo uradili definišući princip dinamičke ravnoteže.

Koriste se i sledeće formulacije (iskazi) za ***Dalamberov princip:***

Za vreme kretanja materijalne tačke sila inercije stoji ''u ravnoteži'' sa svim silama koje dejstvuju na materijalnu tačku.

U sistemu materijalnih tačaka, koji je u kretanju, i sile inercije obrazuju sistem sila koji je ''u ravnoteži''.

Princip rada.

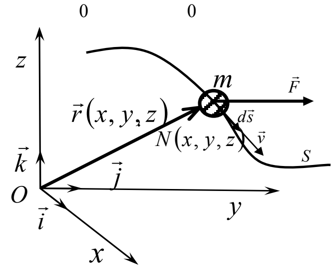
Za ovaj princip – ***princip rada*** nisu dovolji do sada definisani pojmovi i odredjenja. Potrebno je definisati *pojam rada* i zato uvodimo ***peto odredjenje - definicijom rada***.

. ***Definicija 5.*** *Elementarni rad sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je skalarni proizvod te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Ukupan rad sile $\vec{F}$ *na stvarnom putu - pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke, je ukupan zbir svih elementarnih radova* $dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ *ili integral skalarnog proizvoda te sile* $\vec{F}$ *i elementa stvarnog elementarnog pomeranja* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja i to pišemo u obliku:*

$$A^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$



Definicijom ***skalarnog odredjenja*** - *elementarnog rada sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* uspostavljena je skalarna veza izmedju sila (aktivne $\vec{F}$, ili reaktivne $\vec{F}_w$ odnosno sile inercije $\vec{I}_F$) i pomeranja duž puta s materijalne tačke m. Kako je *vektorskom invarijantom* – silom inercije $\vec{I}_F$ uspostavljena veza izmedju mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena i dimenzija intenziteta sile inercije kretanja materijalne tačke dobijena u obliku $\dim\left|\vec{I}_F\right| = MLT^{-2}$, gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$, kao i da smo time odredili dimenziju intenziteta aktivnih sila $\vec{F}$, kao i dimenziju intenziteta reaktivninh $\vec{F}_w$ *sila, nije teško odrediti dimenziju elementarnog rada, kao i dimenziju ukupnog rada sile na predjenom putu pokretne materijalne tačke u nekom intervalu vremena. Dimenzija rada sile* $\vec{F}$ *na stvarnom pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke je:*

$$\dim A^{\vec{F}} = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

Kako je jedinica sile inercije $\left[kgm\sec^{-2}\right]$ ili $[N]$ to je jedinica rada $\left[kgm^2\sec^{-2}\right]$ ili $[Nm]$ ili $[J]$.

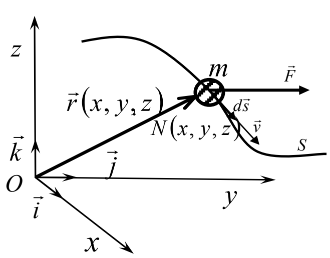
Za pojedine sile $\vec{F}$, naprimer $\vec{F}(\vec{r})$, *elementarni rad* $dA^{\vec{F}}$ *te sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke uzima oblik :*

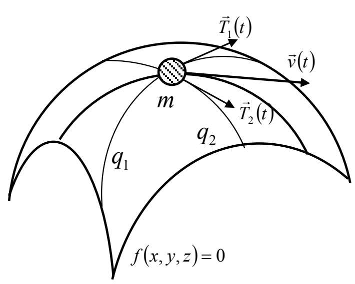
$$dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = dU$$

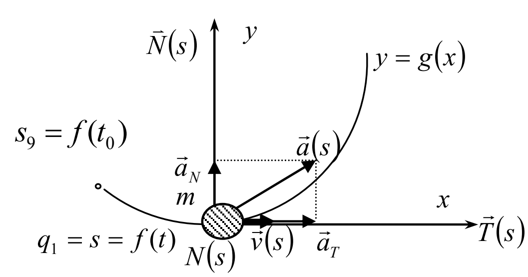
i ***predstavlja totalni diferencijal neke funkcije*** dU, koju smo označili sa U , taj integral se može ***integraliti nezavisno od puta*** i putanje integracije i *predstavlja invarijantu* u odnosu na put integraljenja i zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja materijalne tačke na putanji kretanja materijalne tačke. Za taj slučaj možemo za *ukupan rad sile* $\vec{F}$ *na bilo kom stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke da napišemo samo u funkciji kinetičkih parametara kretanja tačke u početnom i krajnjem položaju na putanji u obliku:*

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = \int_{s_0}^{s} dU = U - U_0$$

Funkcija $U\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$, u optem slučaju, zavisi od vektora položaja $\vec{r}$ i vektora brzine $\vec{v}$ i to je ***funkcija sile***. Funkcija $E = -U$, koja je suprotnog znaka od funkcije sile $U\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$ je ***funkcija energije ili kraće energija,*** a u specijalnim slučajevima to može biti ***promena ukupne energije kretanja materijalne tačke*** ΔE, ili pak njen deo: $\Delta E_p(\vec{r})$ ***promena potencijalne energije*** kada sila zavisi od vektora položaja $\vec{r}$ pokretne dinamičke tačke , ili $\Delta E_k(\vec{r}, \vec{v})$ ***promena kinetičke energije*** kada ona zavisi i od vektora brzine $\vec{v}$ kretanja materijalne tačke, što zavisi od ***prirode sila čiji rad i energiju odredjujemo***. Ako se radi o elektomehaničkom sistemu, onda ova energija ima i još i druga svojstva u zavisnsosti od svojstava elektrodinamičkih sila čiji rad odredjujemo.







Rad sile inercije.

Imajući u vidu definiciju sile inercije $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$, kao *vektorske invarijante* i jednog od osnovnih odredjenja dinamike, kao i definiciju rada sile kao *skalarne invarijante* za ***rad sile inercije***

$\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$ možemo da pišemo sledeću relaciju:

$$A^{\vec{I}_F} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{I}_F, d\vec{s}\right) = \int_{t_0}^{t} \left(-m\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}dt\right) = -m\int_{\vec{v}_0}^{v} (\vec{v}, d\vec{v}) = -\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\left(E_k - E_{k0}\right)$$

Za rad sile inercije $\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$, a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli, $v_0 = 0$ možemo da pišemo sledeću relaciju

$$A^{\vec{I}_F} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{I}_F, d\vec{s}\right) = \int_{t_0}^{t} \left(-m\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}dt\right) = -m\int_{0}^{v} (\vec{v}, d\vec{v}) = -\frac{m}{2}v^2 = -E_k$$

Iz poslednje relacije sledi ***zaključak****: Rad sile inercije* $\vec{I}_F(t)$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* m *koja se kreće brzinom* $\vec{v}$*, a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli,* $v_0 = 0$ *jednak je negativnoj vrednosti njene kinetičke energije* E_k.

Kinatička energija se naziva i imenom ''živa sila''.

Potencijalna energija

Za sve sile koje imaju funkciju sile $U(\vec{r})$ ili $U(x,y,z)$ možemo da napišemo da je sila $\vec{F}(\vec{r})$ ili $\vec{F}(x,y,z)$ gradijent te skalarne funkcije u obliku:

$$\vec{F} = grad\,U(\vec{r}).$$

Kako je:

$$\left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = \left(gradU, d\vec{r}\right) = dU$$

to je rad te sile $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$:

$$\int_{s_0}^{s} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(gradU, d\vec{r}\right) = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 = -E_p$$

Iz poslednje relacije sledi ***zaključak****: Rad sile* $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$, koja ima funkciju sile $U(\vec{r})$, *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* m *koja se kreće brzinom* $\vec{v}$*, jednak negativnoj vrednosti njene potencijalne energije* E_p *sa tačnošću do jedne aditivne konstante.*

Rad sila otpora veza

Za slučaj neidealnih veza zaključili smo da ukupna sila otpora veza $\vec{F}_w$ ima dve komponete normalnu $\vec{F}_{wN} = \lambda\, grad\, f(\vec{r})$ i tangencijalnu $\vec{F}_{wT}$ za čije definisanje su nam potrebni i eksperimentalni podaci (naprimer za silu trenja - koeficijent trenja μ).

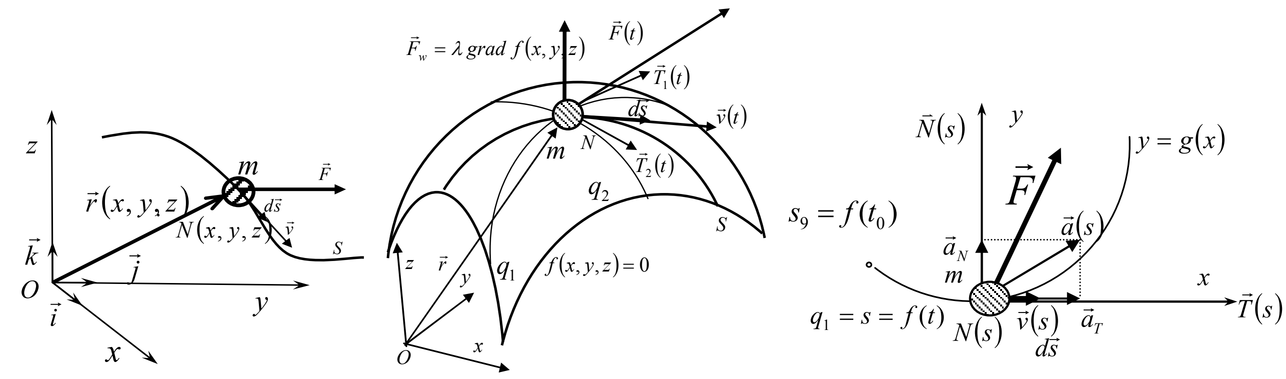
Rad ukupne sile otpora veza $\vec{F}_w$, koja ima dve komponete, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$, je:

$$A^{\vec{F}_w} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{F}_w, d\vec{s}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{F}_{wT} + \lambda\, grad\, f(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{F}_{wT}, d\vec{r}\right)$$

jer je jednačina geometrijske stacionarne veze $f(\vec{r}) = 0$*, pa je:*

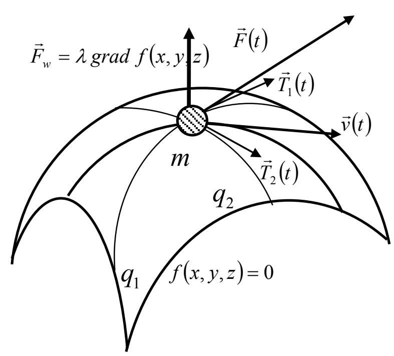
$$A^{\vec{F}_{wN}} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{F}_{wN}, d\vec{s}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\lambda\, grad\, f(\vec{r}), d\vec{r}\right) = f(\vec{r}) - f(\vec{r}_9) = 0$$

Na osnovu prethodnog možemo izvesti sledeće ***zaključke***:



Zaključak 1. Rad sile otpora $\vec{F}_{wN} = \lambda\, grad\, f(\vec{r})$ idelane geometrijske *stacionarne* veze $f(\vec{r}) = 0$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ jednak je nuli.

Zaključak 2. Za odredjivanje rada tangencijalne komponete $\vec{F}_{wT}$ sile otpora za čije definisanje su nam potrebni i eksperimentalni podaci, rad se mora odredjivati u svakom konkretnom slučaju pojedinačno. Ta tangencijalna komponenta $\vec{F}_{wT}$ se najčešće javlja kao funkcija brzine $\vec{v}$ materijalne tačke te je za odredjivanje rada te komponente sile otpora najčešće potrebno poznavati i konačne jednačine kretanja ili druge relacije pomoću kojih je moguće odrediti brzinu u funkciji položaja pokretne materijalne tačke.



Rad sile otpora proporcionalne brzini

Rad sile otpora proporcionalne brzini $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ je:

$$A^{\vec{F}_{wT}} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{F}_{wT}, d\vec{s}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(-b\vec{v}, d\vec{r}\right) = -b\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{v}, d\vec{r}\right) = -b\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{v}, \vec{v}\right) dt = -2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \Phi(\vec{v}) dt$$

gde smo sa $\Phi(\vec{v})$ označili Relijevu funkciju rasipanja:

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{1}{2} b(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2} b v^2 .$$

Dimenzija funkcije rasipanja $\Phi(\vec{v})$ je:

$$\dim\left|\Phi(\vec{v})\right| = ML^2T^{-3}$$

a jedinica $\left[kgm^2 \sec^{-2}\right]$ili $\left[Nm \sec^{-1}\right]$ ili $\left[J \sec^{-1}\right]$.

Rad sile otpora proporcionalne brzini $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ u jedinici vremena je jednak dvostrukoj vrednosti funkcije rasipanja sa negativnim znakom ili matematičkom relacijom opisano, kao:

$$\frac{dA^{\vec{F}_{wT}}}{dt} = -2\Phi(\vec{v})$$

Snaga - Efekat rada sile

Izvod po vremenu rada sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ *je snaga ili efekat rada* sile i iskazuje se sledećom matematičkom relacijom:

$$P \stackrel{def}{=} \frac{dA^{\vec{F}}}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

Snaga ili efekat rada sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$, *predstavlja i brzinu vršenja rada, i to je skalarni proizvod sile* $\vec{F}$ *koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku i brzine* $\vec{v}$ *kretanja te materijalne tačke duž njene putanje.*

Dimenzija snage ili efekta rada *sile* $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s, je:

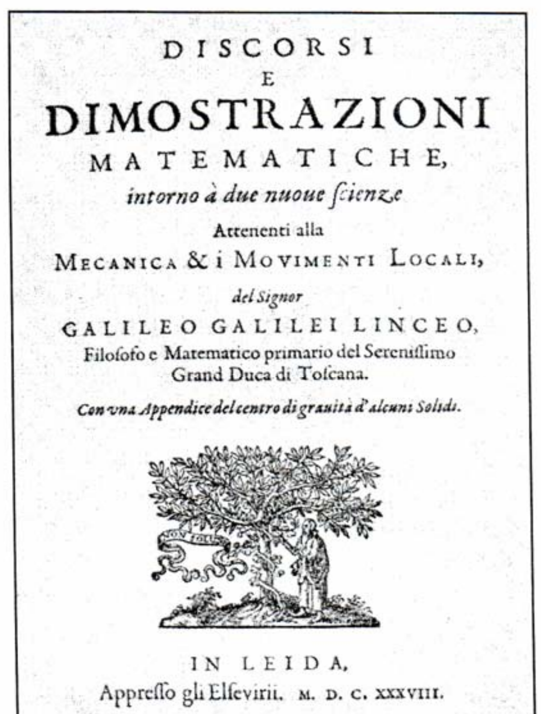
$$\dim P = ML^2T^{-3}$$

a jedinica $\left[kgm^2 \sec^{-2}\right]$ili $\left[Nm \sec^{-1}\right]$ ili $\left[J \sec^{-1}\right]$.

Formulacija principa rada

Postoje različite formulacije principa rada, ali suština principa rada je u osnovi svih tih različitih formulacija. Počevši od *Aristotela*, pa do danas je ostala ista. U monografiji *Preprincipi mehanike*, publikovane 1998. godine, Vujičić piše: ‘*’Suština principa rada* u stručnoj literature je poznata još od *Aristotela* kao ‘*’zlatno pravilo mehanike’’*, a kasnije kao ‘*’princip mogućih pomeranja*’’, ‘*’princip mogućih varijacija*’’, ‘*’fundamentalna osnovna jednačina mehanike*’’, ‘*’princip virtuelnog rada*’’, ‘*’Dalamber-Lagranžeov princip’’* i drugi’’. Zaista, u delu *Galileo Galileja* ‘*’Quanto si guadagna di forza, tanto perdersi in velocita*’’, Opera 2.p, 1830., navodi se ime Aristotela u vezi sa prasuštinom formulacije principa rada i kroz formulaciju ‘*’zlatnog pravilo mehanike’’,* kao i njegova formulacija *‘’principa mogućih pomeranja’’.*

Galileo Galilei (1564 — 1642)
Слика узета из дела „Discorsi e dimostrazioni" (латински текст) 1699


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Насловна страна Галилејевог дела из 1638. године.

Znameniti ruski i ukrajinski naučnik Anatolij Mihajlovič Ljapunov u svome delu *''Lekciji po teoretičeskoj mehanike''* (najnovije izdanje Naukova Dumka, Kijev 1982.) ovako ocenjuje nastajanje formulacija i suštinu principa rada:

''Princip mogućih pomeranja bio je poznat još Galileju, a zatim su ga koristili Valis i Ivan Bernouli. Ali prvi opšti dokaz ovog principa dao je jedino Lagranž, koji ga se postavio u osnovu svoje analitičke mehanike. Posle su ga dokazivali takodje i Puason, Koši i drugi, iako najboljim dokazom ostaje ipak Lagražeov''.

Kao što smo u početnim lekcijama dinamike dali definiciju da pod pojmom ***principa ili načela mehanike*** *podrazumevamo iskaz* ***opšteg značenja*** *pomoću uvedenih pojmova i definicija mehanike, odnosno definicija – osnovnih odredjenja kinetike - skalarnih i vektorskih invarijanti, to se istinitost principa ne dokazuje i ne podleže preispitivanju i dokazivanju.*

Kao što smo u počettnim lekcijama dinamike istakli, Principi mehanike ili *načela mehanike* moraju biti *saglasni sa* preprincipima ili *prednačelima*.

Opšti principi ili opšta načela jesu *i uslovi* iz kojih se mogu izvesti *jednačine kretanja materijalne tačke i materijalnog sistema,* i obrnuto, oni su posledice tih jednačina kretanja. Oni pokazuju osobine kretanja materijalne tačke, odnosno sistema materijalnih tačaka i potpuno su ekvivalentne jednačinama kretanja.

Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813)

„Les méthodes que je présente ici n'exigent pas des constructions ou raisonnements de la nature géometriques ou mécanique, mais seulement les operations algébriques. Celui qui aime l'Analyse verra avec plaisir que la Mécanique est sa branche, et sera reconnaissant que j'ai élargi son domaine".

Mécanique Analytique, 1788

Grupi ***diferencijalnih principa*** pripada i princip rada. Princip rada možemo iskazati na sledeći način:

Princip rada: *Ukupan rad svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku ili materijalni sistem ništavan je, a u prisustvu jednostrno zadržavajućih veza nije pozitivan.*

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalnu tačku:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \Delta A^{\vec{F}_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + \vec{F}_i + \vec{F}_{w,i}, \Delta\vec{r}_i \right) = 0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalnu tačku:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \Delta A^{\vec{F}_i} \leq 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + \vec{F}_i + \vec{F}_{w,i}, \Delta\vec{r}_i \right) \leq 0$$

ili

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalnu tačku:

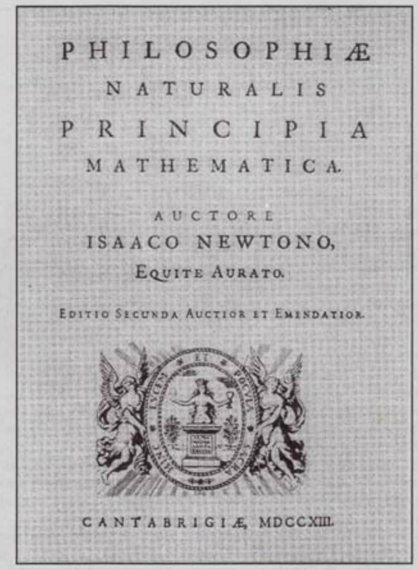
$$\sum_{i=1}^{i=N} \delta A^{\vec{F}_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + \vec{F}_i + \vec{F}_{w,i}, \delta \vec{r}_i \right) = 0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalnu tačku:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \delta A^{\vec{F}_i} \leq 0$$

Princip rada sila se može iskazati i u obliku: ***Ukupan rad svih sila na svim nezavisnim mogućim pomeranjima jednak je nuli, a za sistem sa jednostrano dejstvujućim vezama nije pozitivan.***

Isaac Newton (1643 — 1727)



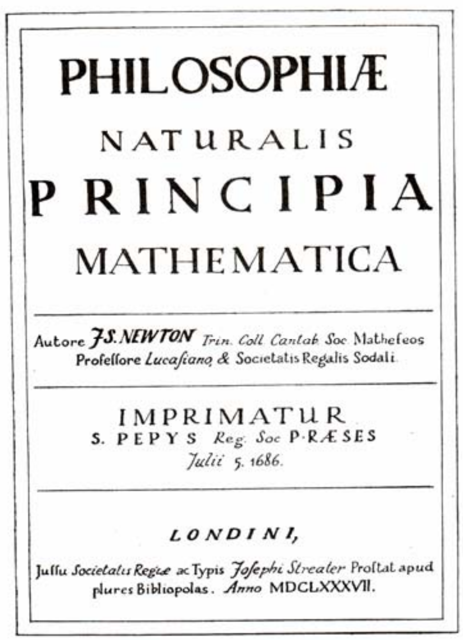
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.

CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Насловна страна другог издања Њутновог монументалног дела из 1713. године.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

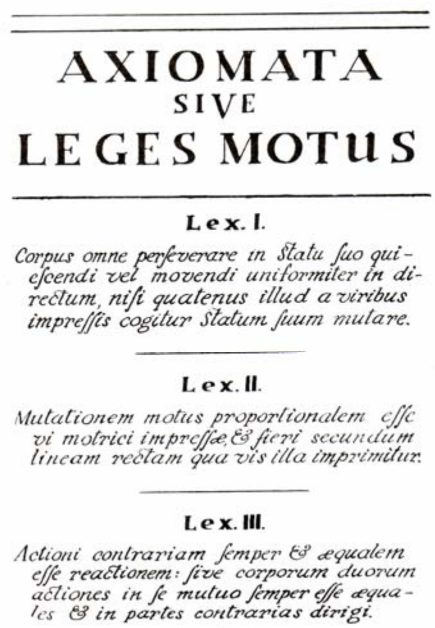
Autore JS. NEWTON Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheſeos Profeſſore Lucaſiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS Reg. Soc. PRÆSES
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu Societatis Regiæ ac Typis Joſephi Streater. Proſtat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Насловна страна Њутнових »Принципија«
Цртеж према оригиналу израдио Милосав Драгојевић студ. технике



AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Њутнови закони кретања
(Lex III у оригиналу налази се на следећој страни али је из техничких разлога стављен на један клише)
Цртеж према оригиналу израдио Милосав Драгојевић студ. технике

Newton-ovi aksiomi (principi) - Axiomata sive leges motus.

Uvodeći pojam sile, Rašković u svom udžbeniku *Dinamika* konstantuje sledeće: ***''Sila nije osnovni pojam, već se definiše pomoću Njutnovih aksioma (t.zv. zakona o kretanju – Axiomata sive***

leges motus – izloženih u njegovim Principijama''. Mi smo na prvom predavanju uveli pojam sile inercije kao jedno od osvovnih odredjenja i koje je vektorska invarijanta pomoću sledeće definicije:

Definicija 4. *Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ materijalne tačke N, mase m, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je proizvod njene mase m i suprotno usmerenog vektora njenog ubrzanja $\vec{a}(t)$ u tom trenutku vremena:*

$$\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\,\vec{a}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

koja je posredno proizilazi iz *Njutnovih aksioma - .zv. zakona o kretanju – Axiomata sive leges motus – izloženih u njegovim Principijama*''.

Kada smo govorili o istorijskom putu formiranja i izrastanja naučne oblasti Dinamika, ukazano je na genijalnog engleskog naučnika Isaka Njutna (*Isaak Newton* (1643-1727)) koji je napisao znamenito delo "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Matematički principi prirodne filozofije) koja je publikovana maja 1687 godine. Time je dao jak oslonac daljem *razvoju Dinamike*. Ovim delom je dao nov matematički opis i dokaze izvedene čisto matematičkim putem, istovremeno objedinivši sazanja i svojih prethodnika i savremenika u jednu jedinstvenu celinu. Newton je dao Dinamici i nov matematički aparat "*diferencijalni i integralni račun*" takozvani "*infinitezimalni račun*".

Njutnovi aksiomi - t.zv. zakoni o kretanju – ***Axiomata sive leges motus*** *– koji su izloženi u njegovim ''Principijama*'' u izvornom obliku glase:

Prvi aksiom: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quaternus illud a veribus impressis cogitur statum suum mutare.

Prvi aksiom: **Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog (jednolikog) i pravolinijskog kretanja dok pod dejstvmom sila ne bude prinudjeno da to svoje stanje promeni.**

Ovaj prvi aksiom naziva se i **princip inercije**. Iz *Principa dinamičke ravnoteže* za slobodnu materijalnu tačku, kao i za materijalnu tačku na koju dejstvuju veze usled čega se javljaju sile otpora veze ili kratko reakcije veze, u specijalnim slučajevima izveli smo sledeće zaključke:

Zaključak 1. *Ako na slobodnu materijalnu tačku ne dejstvuje sila, ili je vektorski zbir aktivnih sila jednak nuli, onda se materijalna tačka kreće konstantnom brzinom jednakom brzini kretanja u početnom trenutku. Ako je početna brzina bila jednaka nuli tada materijana tačka ostaje u mirovanju.*
To sledi iz sledećih uslova:

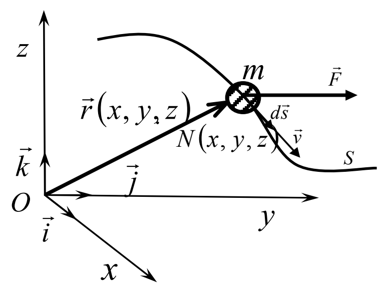
$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = const$$

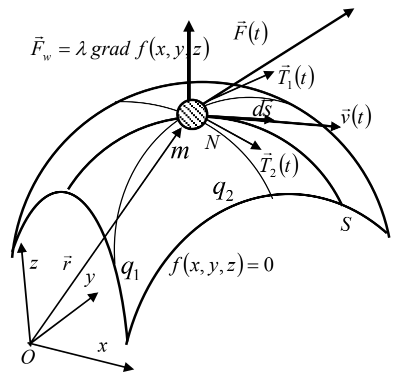
Zaključak 2. *Ako je zbir sila veze i aktivnih sila, koje dejstvuju na materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x,y,z)=0$ jednak nuli, onda se materijalna tačka kreće konstantnom brzinom jednakom brzini kretanja u početnom trenutku. Ako je početna brzina bila jednaka nuli tada materijana tačka ostaje u mirovanju.*
To sledi iz sledećih uslova: za rezultantu aktivnih sila i sila veze

$$\vec{F} + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0$$

i principa dinamičke ravnoteže:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = const$$





Ovaj prvi Newton-ov aksiom je jedan deo definicije sile i pokazuje mogućnost postojanja sile. Sila uvek postoji kada telo menja stanje kretanja.

Sve do Galileja (*Gallileo Galilei* 1564-1642) definicija sile, kao i njena primena bila je čisto statička. U svom delu "*Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*" u kome je publikovao rezultate istraživanja zakona *slobodnog pada, horizontalnog i kosog hica,* 1583 godine. je uveo pojam *ubrzanja* i doveo ga u vezu sa *silom*. Time je on dao doprinos mehanici da se *kretanje tela odvija pod dejstvom sila* i praktično je otvorio kvalitativno nove pravce istraživanja i utemeljio novu naučnu oblast – *Dinamiku*.

Gallileo Galilei je iz svojih zapažanja na osnovu eksperimentalnih istraživanja zaključio je da će *telo na koje ne dejstvuje nikakva sila ostati u stalnom mirovanju ili će se, ako se već kreće, kretati neprestano istom brzinom*. *Uzrok* zbog čega telo ne menja svoje stanje kretanja nazvao je ***inercijom.***

Da bi *inercija materijalnog tela* bila svladana i *telu promenjeno stanje kretanja* ili mirovanja, potrebno je da na njega dejstvuje sila. *Inercija* se može shavtiti i spoznati, kao *otpor promeni stanja* kretanja, koji potiče od materijalnosti tela. Takodje se zaključuje da ukoliko je masa tela veća mora se upotrebiti veća sila da bi se promenilo stanje kretanja materijalnog tela.

***Drugi aksiom:* Mutationem motus proportionalem esse zi motrici impressaeet fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimatur.**

***Drugi aksiom:* Promena kretanja proporcionalna je sili koja dejstvuje na telo i vrši se u pravcu sile.**

Vis motrix je **aktivna sila** prema prema Njutnovom shvatanju iznetom u njegovim Proncipijama.

Pod **"promenom kretanja"** (**mutationem motus**) Njutn podrazumeva proizvod izmedju mase i ubrzanja. Na taj način može se aktivna sila predstaviti proizvodom mase i ubrzanja koje dobva ta masa usled dejstva sile i u našem, savremenom, vektorskom obeležavanju napisati u obliku

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

a imajući u vidu osnovno odredjenje – vektorsku invarijantu silu inercije možemo napisati i:

$$\vec{F} = -\vec{I}_F$$

Prema Kirkofu (*Robert Kirchoff* , 1824-1887) *masa je koeficijent proporcionalnosti* izmedju *kinematičkog elementa – ubrzanja* (kinematičke invarijante - osnovnog odredjenja) i *dinamičkog* (*kinetičkog*) *elementa – sile* (ovde u našem izlaganju definisane preko sile inercije kao jedne od osnovnih odredjenja – vektorske invarijante).

Jedna aktivna sila telima različitih masa daje različita ubrzanja.

Njutn je u dodatku uz drugi aksiom definisao i sledeće pravilo sabiranja sila:

Corollarium: Corpus viribus conjuctis diagonalem paralelogrami eodem temporare describere quo latera separatis.

Dodatak: Pod dejstvom udruženih sila telo će opisati dijagonalu paralelograma u istom vremenu u kome bi dejstvom pojedinih sila opisivalo strane.

Ovo je poznati aksiom – pravilo sabiranja vektora.

Treći aksiom: *Actioni contrariam simper et aequalem esse reactionem sive corporum duorum actions in se mutuo simper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Treći aksiom: *Dejstvu (akciji) uvek je uvek je jednako protivdejstvo (reakcija), ili dejstva dvaju tela jednog na drugo uvek su jednaka i suprotna naperena.*

Ovaj aksiom dopunjuje prvi aksiom (ili princip inercije) koji ukazuje na mogućnost postojanja sile. Da bi sila postojala, mora se pokazati telo kao izvor sile na koje dejstvuje sila istog intenziteta I pravca ali suprotnog smera.

U svojoj Dinamici, Rašković piše:da se na osnovu Njutnovih aksioma sile mogu klasifikovati u dve vrste: sile prve vrste kojima uvek možemo pokazati izvor i sile druge vrste kojima ne možemo pokazati izvor. Zakodje zaključuje da samo sile prve vrste pripadaju klasičnoj mehanici.

Na kraju zaključujemo da sva tri Njutnova aksioma služe da se njima tačno definiše slila. Prvi aksiom, aksiom inercije, pokazuje mogućnost postojanja sile; drugi aksiom pokazuje mogućnost merenja – uporedjivanja sila; a sa dodatkom pokazuje kako se može operisati sa silama; treći aksiom ukazuje na izvor sile bez koga ona ne može da postoji.

Treći Njutnov aksiom dovodi do pojma težine tela i odgovarajućeg zakona dinamike kojim se definiše sila gravitacije, o čemu je već bilo izlagano u poglavlju o zakonima dinamike I o opštoj gravitaciji.

Teoreme mehanike

Pod pojmom ***teorema mehanike*** ovde ćemo podrazumevati *matematičko tvrdjenje opšteg značenja o kretanju* materijalnih sistema čija se *istinitost dokazuje na osnovu preprincipa, principa mehanike, osnovnih i posledičnih definicija i zakona dinamike.*

Teorema o promeni impulsa (količine) kretanja

Osnovnim odredjenjem uveli smo vektorsku invarijantu dinamike impuls kretanja, koji smo definisali sledećom definicijom:

Definicija 2. *Impuls kretanja $\vec{p}(t)$ ili $\vec{K}(t)$ materijalne tačke N, mase m, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorom položja $\vec{r}(t)$ je proizvod njene mase m i vektora $\vec{v}(t)$ njene brzine u tom trenutku vremena*:

$$\vec{p}(t) \overset{def}{=} m\vec{v}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}(t) \overset{def}{=} m\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t) \overset{def}{=} m\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}(t) \overset{def}{=} m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Znači da je impuls kretanja $\vec{p}(t)$ *ili* $\vec{K}(t)$ *materijalne tačke* N, *mase* m, vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom impulsa kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza izmedju mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta impulsa kretanja materijalne tačke je:

$$\dim\left|\vec{p}(t)\right| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znači da je jedinica impulsa $\left[kg\, m \sec^{-1}\right]$ ili $[N \sec]$.

Potražimo sada izvod ove vektorske invarijante $\vec{p}(t)$ impulsa kretanja ili količine kretanja:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = m(t)\vec{a}(t) + \dot{m}(t)\vec{v}(t)$$

Kada je masa materijalne tačke konstantne količine $m = const$, znači ne zavisi od vremena, tada je:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{a}(t) = -\vec{I}_F$$

Vidimo da je prvi izvod po vremenu impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ materijalne tačke nepromenljive mase, jednak sili inercije $\vec{I}_F$ sa promenjenim smerom, ili je jednak aktivnoj sili $\vec{F}(t)$ koja dejstvuje na materijalnu tačku, pa možemo da pišemo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{a}(t) = -\vec{I}_F = \vec{F}(t)$$

Odnosno:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t)$$

Prvi izvod impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ materijalne tačke, nepromenljive mase, *po vremenu jednak je aktivnoj sili* $\vec{F}(t)$ *koja dejstvuje na materijalnu tačku.*

Prvi izvod količine kretanja $\vec{p}(t)$ materijalne tačke, nepromenljive mase, *po vremenu jednak je aktivnoj sili* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku.*

Diferencijal *impulsa (količine) kretanja* $d\vec{p}(t)$ materijalne tačke je:

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}(t)dt = d\vec{K}_F(t)$$

gde smo sa $\vec{K}(t)$ označili *impuls sile*. Ako prethodnu diferencijalnu relaciju integralimo, za *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$, dobijamo sledeći izraz:

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \int_0^t \vec{F}(t)dt$$

Priraštaj količine kretanja (impulsa kretanja) $\Delta\vec{p}(t)$ *za konačni vremenski razmak* Δt *jednak je impulsu* $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku u tom vremenu.*

Dimenzije količine kretanja (impulsa kretanja) $\vec{p}(t)$ *i impulsu* $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku u tom vremenu su iste.* Dimenzija intenziteta impulsa $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku* je:

$$\dim\left|\vec{K}_F(t)\right| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znaći da je jedinica impulsa sile $\left[kg\, m \sec^{-1}\right]$ ili $[N \sec]$.

Pošto je impuls sile $\vec{K}_F(t)$ *vektorski integral, to se on u opštem slučaju ne poklapa sa pravcem sile* $\vec{F}(t)$.

U slučaju da je sila konstantna $\vec{F}(t) = \overrightarrow{const}$ *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$ *iako vektorski integral, je kolinearan sa silom.*

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \int_0^t \vec{F}dt = \vec{F}(t - t_0)$$

Ako na materijalnu tačku ne dejatvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i otpora veza koje dejstvuju na tu tačku jednak nuli, onda sledi da je:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t) = 0 \Rightarrow \vec{p}(t) = const \Rightarrow \vec{p}(t_0) = \vec{p}(t) = const \Rightarrow m\vec{v}(t_0) = m\vec{v}(t) = const$$

Na osnovu prethodne relacije možemo definisati sledeću lemu.

Lema o održanju impulsa kretanja materijalne tačke: *Ako na materijalnu tačku ne dejstvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i otpora veza koje dejstvuju na tu tačku jednak nuli, tada je impuls kretanja materijalne tačke nepromenljiv u toku njenog kretanja i jednak vrednosti na počeku njenog kretanja,* $\vec{p}(t_0) = \vec{p}(t) = const$. *Ako je početna brzina bila jednaka nuli, odnosno ako je materijalna tačka bila u mirovanju, ona će ostati u miru.*

Ovo je i *lema o održanju količine kretanja.*

Ako je masa materijalne tačke nepromenljiva to iz prethodne leme sledi zaključak da je

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}(t) = const$$

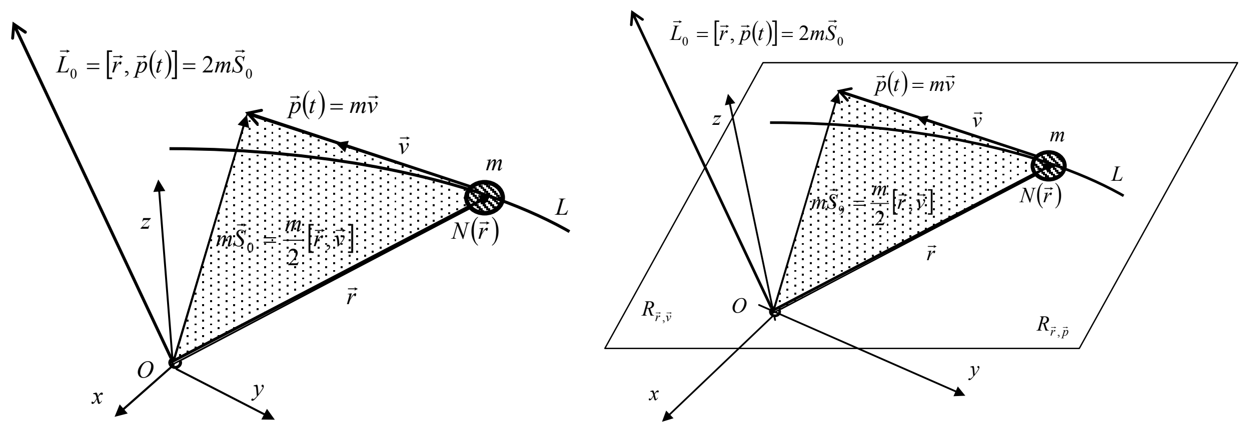
Sada možemo da formuišemo i sledeći zaključak: *Ako na materijalnu tačku nepromenljive mase ne dejstvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i otpora veza, koje dejstvuju na tu tačku jednak nuli, tada se materijalna tačka kreće ravnomerno i pravolinijski u pravcu početne brzine, istom tom brzinom* $\vec{v}(t_0) = \vec{v}(t) = const$. ***To je kretanje po inerciji.*** *Ako je početna brzina bila jednaka nuli, odnosno ako je materijalna tačka bila u mirovanju, ona će ostati u miru.*

Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja

Definicija: Pod **momentum impulsa (količine) kretanja** *materijalne tačke podrazumevamo moment vektora impulsakretanja te materijalne tačke za jednu stalnu tačku - pol u toj stalnoj tački. To je vektorski proizvod izmedju vektora položaja materijalne tačke* $\vec{r}(t)$ *u odnosu na momentnu tačku - pol* O *i vektora impulsa kretanja te materijalne tačke* $\vec{p}(t)$*:*

$$\vec{L}_O(t) \overset{def}{=} [\vec{r}(t), \vec{p}(t)] \qquad \text{ili} \qquad \vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}].$$

Moment impulsa kretanja materijalne tačke $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$ *za pol u stalnoj tački nazivamo i* ***kinetičkim momentum,*** *a koristi se i naziv* ***zamah***. Na narednim slikama je dat grafički, geometrijski prikaz *vektora momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O*, koji je upravan na ravni koju čine vektor položaja materijalne tačke* $\vec{r}(t)$ *u odnosu na momentnu tačku - pol* O *i vektor impulsa kretanja te materijalne tačke* $\vec{p}(t)$*, a tu raven smo obeležili sa* $R_{\vec{r},\vec{p}}$ *ili* $R_{\vec{r},\vec{v}}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $\vec{L}_O$ *materijalne tačke, za pol* O *i odgovarajućih kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti..*

Dimenzija *moment impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$ *za pol u stalnoj tački,* odnosno *kinetičkog momenta,* odnosno *zamaha je:*

$$\dim\left|\vec{L}_O\right| \overset{def}{=} ML^2T^{-1}$$

dok je jedinica $\left[kgm^2 \sec^{-1}\right]$ *ili* $\left|Nm\sec\right|$ *ili* $\left[J\sec\right]$.

Kako je sektorska brzina $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$ *to vektor momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O*, možemo napisati i u obliku dvostrukog proizvoda mase pokretne materijalne tačke i vektora sektorske brzine te mnaterijalne tačke pomoću sledeće relacije (izraza):*

$$\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{S}_O$$

Znači da je, *sektorska brzina* $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$ *za pol u stalnoj tački* O*, pomožena dvostukom masom pokretne materijalne tačke jednaka vektoru momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u toj stalnoj tački* O.

Sada potražimo prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa kretanja pokretne materijalne tačke $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O*, tako da dobijemo:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, m\vec{a}] + [\vec{r}, \dot{m}\vec{v}] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F} + \vec{F}_w + \vec{\Phi}] = [\vec{r}, \vec{F} + \vec{F}_w + \vec{\Phi}] = \vec{M}_O^{\vec{F}+\vec{F}_w+\vec{\Phi}}$$

Odnosno kada je masa slobodne pokretne materijalne tačke nepromenljiva i ona nije pod dejstvom veza, već samo aktivnih sila $\vec{F}$ možemo da napišemo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

gde smo sa $\vec{M}_O^{\vec{F}} = [\vec{r}, \vec{F}]$ označili moment sile $\vec{F}$ za isti momentni pol u tački O.

Prethodna relacija važi i za slučaj kretanja materijalne tačke podvrgnute dejstvu veza, pri čemu oznaka $\vec{F}$ uključuje rezultantu svih sila aktivnih i sila otpora veza, ali ne i silu inercije.

Izvedena relacija $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}$ je matematički iskaz ***leme o promeni momenta impulsa (količine) kretanja***, koju rečima možemo formulisati u sledećem obliku:

Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja: *Prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa (količine) kretanja slobodne pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O *jednak je momentu aktivne sile* $\vec{F}$ *koja dejstvuje na slobodnu materijalnu tačku za isti pol* O*, kao momentnu tačku.*

Može se uopštiti i sledeće: *Prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa (količine) kretanja pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O *jednak je momentu rezultujuće sile* $\vec{F}_r$ *aktivnih* $\vec{F}$ *i sila otpora veza* $\vec{F}_w$*, koje dejstvuju na pokretnu materijalnu tačku, a za isti pol* O*, kao momentnu tačku.*

Ovoj, prethodno formulisanoj *lemi o promeni momenta impulsa (količine) kretanja ili zamaha* može se dati i kinematička analogija. Kako je brzina $\vec{v}$ pokretne tačke izvod vektora položaja $\vec{r}$ po vremenu, tj. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, i pada u pravac tangente na putanju, odnosno tangente na hodograf tog vektora položaja $\vec{r}$, to možemo uspostaviti kinematičku analogiju sa *prvim izvodom* $\dot{\vec{L}}_O$ *po vremenu vektora momenta impulsa (količine) kretanja tj. zamahom pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O, koji je brzina krajnje tačke ovog vektora $\vec{L}_O$ i koja se kreće po njegovom hodografu (putanji vrha).

Sada na osnivu relacije $\vec{L}_O = 2m\vec{S}_O$*, tj. veze vektora momenta impulsa (količine) kretanja tj. zamaha pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u stalnoj tački* O, kinematičke odrednice sektorske brzine $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$ *možemo da napišemo:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O + 2\dot{m}\vec{S}_O$$

odnosno kada je masa slobodne pokretne materijalne tačke nepromenljiva i ona nije pod dejstvom veza, već samo aktivnih sila $\vec{F}$ možemo da napišemo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

odakle sledi da je:

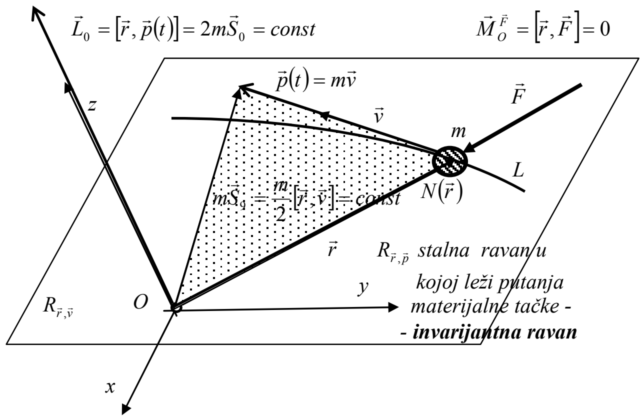
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

Znači da je, *sektorsko ubrzanje* $\dot{\vec{S}}_O = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{a}]$ *za pol u stalnoj tački* O*, pomnoženo dvostukom masom pokretne materijalne tačke jednako izvodu vektora momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$*, za pol u toj stalnoj tački* O*, odnosno momentu sile koja dejstvuje na slobodnu materijalnu tačku za isti pol za koji se uzima to sektorsko ubrzanje.*

Ovaj iskaz predstavlja *lemu o površini*, jer *sektorska brzina* predstavlja *površinu* koju opisuje *u jedinici vremena, vektor položaja pokretne materijalne tačke u odnosu na neki pol* O*, pri njenom kretanju.*

Ako je moment sila, koje dejstvuju na materijalnu tačku, jednak nuli za neku nepokretnu tačku – pol, onda je moment impulsa kretanja $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$ *za taj pol konstantan (nepromenljiv) u toku kretanja te tačke.*

$$\forall \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{S}_O = \vec{C} = const$$



Znači možemo da formulišemo ***sledeći zaključak****: Kada je moment sile koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku jednak nuli, tada je i zamah za tu tačku konstantan.*

To je ***lema*** *o održanju* ***momenta impulsa (količine) kretanja*** *pokretne materijalne tačke****.***
Grafička ilustracija prethodnog zaključka – leme prikazana je na prethodnoj slici. Kako je vektor zamaha kretanja materijalne tačke, tj vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}]$ vektorski proizvod vektora položaja materijalne tačke $\vec{r}(t)$u odnosu na momentnu tačku - pol O i vektora impulsa kretanja te materijalne tačke $\vec{p}(t)$ i kao takav upravan na ravan koju obrazuju ta dva vektora $\vec{r}(t)$ i $\vec{p}(t)$, to u slučaju kada je moment $\vec{M}_O^{\vec{F}}$ sile $\vec{F}$, koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku jednak nuli $\vec{M}_O^{\vec{F}} = 0$, ta ravn je *stalna ravan* i u njoj leži putanja materijalne tačke. Znači da je putanja kretanja materijalne tačke, u slučaju kada je *vektor momenta impulsa kretanja konstantan*, $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{C} = const$, *ravanska kriva linija* koja leži u toj *stalnoj ravni*. Ta stalna ravan je *invarijantna ravan kretanja materijalne tačke* i početna brzina leži u toj ravni, kao i sve brzine pokretne materijalne tačke u toku njenog kretanja kada je vektor momenta impulsa kretanja konstantan $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{C} = const$. Naziv *invarijantna ravan kretanja materijalne tačke* toj *stalnoj ravni* dao je znameniti francuski naučnik*,* tvorac *Nebeske mehanike Laplas (Pierre Simon Laplace, 1749 ‘ 1827* godine).

Jednačinu invarijantne ravni dobijamo, skalarnim množenjem konstantnog *vektora momenta impulsa kretanja*, $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{C} = const$ vektorom položaja materijalne tačke $\vec{r}(t)$, u obliku:

$$\left(\vec{r}, \vec{C}\right) = \left(\vec{r}, \vec{L}_O\right) = \left(\vec{r}, [\vec{r}, \vec{p}]\right) = 0$$

iz koje zaključujemo da su *vektor momenta impulsa kretanja*, $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{C} = const$ i vector položaja pokretne materijalne tačke, u odnosu na istu momentnu tačku, *ortogonlni*, jer je njihov *skalarni proizvod jednak nuli*, $\left(\vec{r}, \vec{L}_O\right) = 0$. *Jednačina invarijantne ravni* u razvijenom obliku u Descartes-ovom sistemu koordinata, može da se napiše u obliku:

$$\left(\vec{r}, \vec{C}\right) = xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$$

gde su $C_i, i = 1,2,3$ koordinate vektorske konstante $\vec{C} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$ kojoj je jednak *vektor momenta impulsa kretanja*, $\vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{C} = const$ u slučaju kada je moment $\vec{M}_O^{\vec{F}}$ sile $\vec{F}$, koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku O jednak nuli $\vec{M}_O^{\vec{F}} = 0$.

Primer. Proučimo, sada, impuls kretanja $\vec{p}(t)$, moment impusla kretanja $\vec{L}_O$ (zamah) i njihove promene na primeru kretanja materijalne tačke mase m, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ i koja prolazi kroz momentnu tačku O. Grafički prikaz kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti dat je ns narednoj slici.

Označimo sa $\vec{r}$ vector položaja materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O, kroz koju prolazi i osa orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ oko koje *ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ rotira materijalna tačka. Brzina $\vec{v}$ kretanja te materijalne tačke je jednaka vektorskom proizvodu te ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ i njenog vektora položaja $\vec{r}$: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \omega[\vec{n}, \vec{r}]$. Brzina $\vec{v}$ obrtog kretanja te materijalne tačke je upravna na osu rotacije i vektor položaja, odnosno na vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$.

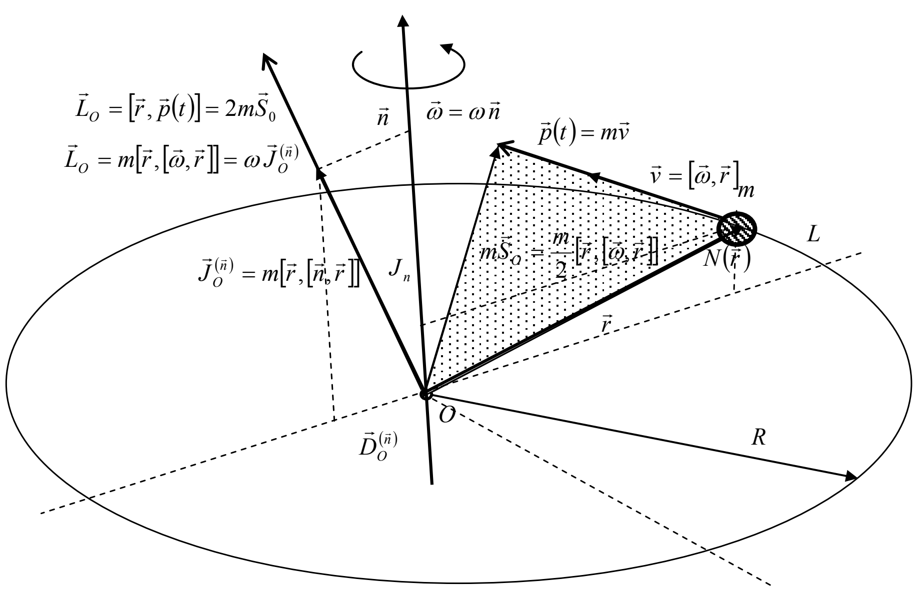
Vektor impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ te materijalne tačke, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v} = m[\vec{\omega}, \vec{r}] = \omega m[\vec{n}, \vec{r}] = \omega\vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} m[\vec{n}, \vec{r}]$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase m* materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke u odnosu na osu, odnosno od rasporeda mase u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo prvog reda pri rotaciji materijalne tačke oko nepokretene ose. U slučaju kada je materijalna tačka na osi vector $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase m* materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}$ kolinearni. Poredeći ovo odredjenje $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *linearnog momenta mase m* materijalne tačke sa masom m materijalne tačke pomnožene jediničnim vektorom orjentacije ose $\vec{n}$, a koju smo uveli preko preprincipa (prednačela) postojanja, možemo uvesti i vector $\vec{M}_O^{(\vec{n})} = m\vec{n}$ nazvati *momentom mase nultog reda* ili *nulti moment mase m* materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta $\vec{L}_O$ materijalne tačke, koja rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, i prolazi kroz pol O i vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ materijalne tačke za pol O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase J_n i devijacionog momenta mase $\vec{D}_O^{(\vec{n})}$ materijalne tačke za tu osu i taj pol.*

Dimenzija intenziteta vektora $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, je:

$$\dim\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| = ML$$

a jedinica je $[kgm]$.

Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O$ te materijalne tačke, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{L}_O \stackrel{def}{=} [\vec{r},\vec{p}] = m[\vec{r},\vec{v}] = m[\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]] = \omega m[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]] = \omega\vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} m[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase drugog reda* ili *kvadratni moment mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke u odnosu na osu, odnosno od rasporeda mase u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo drugog reda pri rotaciji materijalne tačke oko nepokretene ose. U slučaju kada je materijalna tačka na osi vektor $J_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}$ kolinearni.

Vektor $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O ima dve komponente aksijalnu $\vec{J}_{Oa}^{(\vec{n})} = \left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right) = J_n\vec{n}$ u pravcu ose i $\vec{J}_{Od}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = \vec{D}_O^{(\vec{n})} = D_n\vec{d}$ devijacionu upravnu na tu osu i orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{d}$ devijacionog pravca upravnog na osu $\vec{n}$. Možemo da napišemo:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} m[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]] = \left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n} + \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = J_n\vec{n} + \vec{D}_O^{(\vec{n})}$$

Intenzitet J_n aksijalne komponente $\vec{J}_{Oa}^{(\vec{n})} = \left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right) = J_n\vec{n}$ vectora $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ predstavlja aksijalni moment inercije mase materijalne tačke za osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O i jednak je proizvodu mase m i kvadrata rastojanja materijalne tačke od te ose. Dimenzija J_n aksijalnog momenta inercije mase materijalne tačke za osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ je:

$$\dim J_n = \dim\left|\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right| = ML^2$$

a jedinica je $\left[kgm^2\right]$.

Intenzitet $D_n = D_{nd}$ devijacione komponente $\vec{J}_{Od}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = \vec{D}_O^{(\vec{n})} = D_n\vec{d}$ vectora $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, predstavlja *devijacioni ili centrifugalni moment mase materijalne tačke za dve ortogonalne ose, koje se seku u polu* O i to za osu rotacije $\vec{n}$ i na nju upravnu osu orjentisanu ortom $\vec{d}$ u devijacionom pravcu i devijacionoj ravni materijalne tačke koja rotira. Devijacionu ravan obrazuju osa rotacije $\vec{n}$ i vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m. U toj, devijacionoj ravni, za slučaj rotacije materijalne tačke oko nepokretne ose, leži vektor $\vec{L}_O$ momenta impulsa kretanja te materijalne tačke.

Dimenzija intenziteta $D_n = D_{nd}$ devijacione komponente $\vec{J}_{Od}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right] = \vec{D}_O^{(\vec{n})} = D_n\vec{d}$ vektora $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, odnosno *devijacionog ili centrifugalnog momenta mase materijalne tačke za dve ortogonalne ose, koje se seku u polu* O je:

$$\dim D_n = \dim D_{nd} = \dim\left|\vec{D}_O^{(\vec{n})}\right| = ML^2$$

a jedinica je $\left[kgm^2\right]$.

Na prethodnoj slici dat je grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta $\vec{L}_O$ materijalne tačke, koja rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, i prolazi kroz pol O i vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ materijalne tačke za pol O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase J_n i devijacionog momenta mase $\vec{D}_O^{(\vec{n})}$ materijalne tačke za tu osu i taj pol. Na slici je prikazana i devijaciona ravan.

Analogije i geometrijska sličnost. Važnu ulogu u teorijskim modelima dinamike materijalnih sistema, i u statici i u kinetici, igraju *analogije i sličnosti.* Osnovu za uspostavljanje analogije modela dinamike čine *isti oblici matematičkih opisa – relacija, izraza i jednačina*, koje služe za opisivanje dva različita modela dinamike, a koji se opisuju i različitim kinematičkim, statičkim i/ili kinetičkim vektorskim i skalarnim invarijantama. Tako se rezultati postignuti u izučavanju jednog modela dinamike i spoznata svojstva i specifičnosti mogu iskoristiti za proučavanje drugog analognog modela dinamike sistema i za sisteme koji su fizički sasvim druge prirode. Naprimer u proučavanju dinamika modela mehaničkog i električnog sistema, koristi se elektromehanička analogija.

Geometrijska sličnost je odredjena srazmernošću geometrijskih dimenzija uočenih objekata. Koeficijent proporcionalnosti je razmera sličnosti.

Takodje možemo definisati *kinematičku i dinamičku sličnost*.

Kinematička sličnost se odnosi na dva modela kinematike geometrijskih tela, koja u svakom trenutku ostaju geometrijski slična. I kada koristimo *kinematičku sličnost* uvodimo *koeficijente proporcionalnosti* – kao *razmere sličnosti brzina i razmere sličnosti ubrzanja*, koji su *osnovna odredjenja - vektorske invarijante modela kinematike*.

Dinamička sličnost se odnosi na dva modela dinamike koji imaju svojstva i geometrijske i kinematičke sličnosti, kao i svojstvo sličnosti masa, koje se izražava *koeficijentom sličnosti masa*, odnosno *razmerom sličnosti masa*. To povlači sa sobom i sličnost sila koje uzrokuju kretanje, kao i sila koje se javljaju kao otpori dejstvu veza na materijalni system. Znači da dinamička sličnost uključuje sličnost *osnovnih odredjenja u dinamici teorijskih modela* realnih mehaničkih sistema. Zaključujemo da je za uspostavljanje *analogije* izmedju dva *teorijska modela dinamike dva* realna mehanička sistema u formi *dinamičke sličnosti,* izmedju njih, potrebno i dovoljno da izmedju svih odgovarajućih, njihovih, i *vektorskih i skalarnih invarijanti modela kinematike i dinamike sistema postoji sličnost uz prisutnu i geometrijsku sličnost*.

Naprimer ako je srazmera geometrijske sličnosti λ, razmera sličnosti vremena τ, *razmera sličnosti brzina* $\lambda\tau^{-1}$ *, razmera sličnosti ubrzanja* $\lambda\tau^{-2}$*, razmera sličnosti masa* μ*, razmera sličnosti impulsa kretanja* $\mu\lambda\tau^{-1}$*, dok je razmera sličnosti sila* $\mu\lambda\tau^{-2}$*, a razmera sličnosti rada sila i energije* $\mu\lambda^2\tau^{-2}$

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основаниимеханики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.

.