DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

DINAMIKA

II. DRUGA NEDELJA
Zakoni dinamike

Zakon veza. Zakon trenja. Zakoni otpora i potiska sredine. Zakon elastičnosti materijala. Zakon reaktivnog potiska. Zakon gravitacije. O zakonima dinamike. O sili uzajamnog privlačenja.

III. TREĆA NEDELJA
Principi mehanike.

Princip ravnoteže. Princip rada. Princip dejstva. Princip prinude. Primeri.

IV. ČETVRTA NEDELJA
Teoreme mehanike.

Teorema o promeni impulsa kretanja. Teorema o promeni kinetičke energije. Promena Hamiltonijana. Teorema o promeni mehaničke energije. Teorema o upravljivosti kretanja. Teoreme o o optimalnom kretanju upravljivih sistema i optimalnom upravljanju kretanjem. Newton-ovi zakoni.

Zakoni dinamike

Uvod. Na prvom predavanju razjasnili smo sta je ***Preprincip postojanja*** (ontološke pretopstavke) i na osnovu nasledjenih, postojećih i stečenih znanja utvrdili da mehanika polazi od toga da postoje ***tela, rastojanja i vreme***.

Postojanje tela u teorijskoj mehanici manifestuje se masom tela za koju je usvojena oznaka m, dok je njena dimenzija M ($\dim m = M$). To je osobina po kojoj se razlikuje telo koje postoji u mehanici (dinamici, kinetici) od geometrijskog pojma tela koje karakteriše zapremina V

Postojanje rastojanja se identifikuje izmedju čestica u prirodi, izmedju nebeskih tela….. Rastojanje izmedju dveju čestica se može obeležiti sa s, njegova dimenzija je $\dim s = L$.

Pojam ***masena tačka*** ili ***materijalna tačka*** razlikuje se od geometrijskog pojma tačke ne samo po tome što materijalnu tačku karakteriše masa m, a od čestice se razlikuje po tome što izmedju čestica uvek postoji i rastojanje. Materijalna tačka se predstavlja masom m i vektorom položaja $\vec{r}$, dok je dimenzija njene mase M ($\dim m = M$).

Vreme se najčešće obeležava sa t**,** a njegova dimenzija je $\dim t = T$.

Evo kako *Anton Bilimović* shvata *analizu* i *masu*.

''Analiza u širem smislu reči operiše sa jednim osnovnim elementom - sa *količinom*, koja je u tesnoj vezi sa *brojem*. Analiza je apstraktna nauka u tom smislu što iako ponikla iz *materijalističke osnove*, ona je daleko otišla od brojanja, konkretnih predmeta i operiše sa oblicima bez neposredne konkretne prirode. Analiza takva sadržaja služi ciljevima dubljeg proučavanja materialističkog sveta, ali samo one prirodne pojave koje se mogu okarakterisati sa jednim ili više brojeva.

Pojave u prirodi razlikuju se po svojim osobinama. Analizirajući te osobine delimo ih u tri grupe. Prvo zapažamo da možemo odvojiti jednu grupu od druge. Ta osobina stoji u vezi sa brojem i velićinom. Teorija odnosa pojava prema broju i veličini je *matematička analiza* protumačena u širem smislu tog pojma.

Zatim dolazimo do konstantacije da pojave stoje u prostornim odnosima. Teorija prostornih odnosa čini *Geometriju*.

Dalje primećujemo da se sve pojave dešavaju u toku vremena. Unošenje pojma vremena u klasifikaciju pojava omogućilo je novu teoriju – *Kinematiku*. Kinematika je apstraktna nauka kao i

Geometija i Analiza koja tretira pitanja promene prostornih oblika u toku vremena. Naziv *Kinematika* potiče od grčke reči ***ήινήμά***, što znači *kretanje*.

Da pojave stoje u vezi sa veličinom, prostorom i vremenom samo su osnovne osobine u klasifikaciji tih pojava. Dalja važna osobina sastoji se u materijalnosti pojava. Na isti način kao što prostornim oblicima uporedjujemo brojeve za dužinu, površinu, zapreminu itd…sa intervalom vremena opet neki broj - isto tako je i sa svakim materijalnim predmetom moguće uporediti broj koji odgovara materijalnom svojstvu tog predmeta. Za ovo upuredjivanje bira se pre svega neki naročiti predmet čija materijalnost odgovara jedinici. Sa svakim predmetom se tada veže veličina, koja omogućava postavljanje brojne veze izmedju materijalnosti tog predmeta i predmeta izabranog za jedinicu.

Količina, prostor i vreme nisu jedini elementi koji se pojavljuju u prirodi. Pored njih uzimamo u obzir i materijalnost. Ovu osobinu uvodimo pomoću *mase*, kao *količine materije*. Nauka koja se bavi pojavama sa učešćem mase je deo nauke o prirodi fizike u širem smislu te reči. Ali kao što se iz praktičnih nauka o brojanju, merenju zemlje, itd. postepeno izdvojio teorijski deo i razvile apstraktne nauke, koje se služe induktivnim i deduktivnim metodama, - isto tako se iz proučavanja kretanja i mirovanja materijalnih tela izdvojila nova naučna disciplina Dinamika. Reč *Dinamika* potiče od grčke reči: **δύνάμις** što znači *sila*''.

''*'Dajte mi materiju i kretanje, pa ću vam konstruisati univerzum*'' govorio je Rene Descartes. Kretanje u širem smislu predstavlja oblik postojanja materije.

Podela Racionalne mehanike. Racionalna mehanika ima dva osnovna dela: *Kinematiku* i *Dinamiku*. Kinematika se bavi ispitivanjem kretanja geometrijskih oblika – tačaka, linija, površina i geometrijskih tela. Po Bilimoviću *Dinamika* se bavi ispitivanjem mirovanja i kretanja materijalnih tela i deli se na ***Statiku i Kinetiku***. *Statika* ispituje *mirovanje materijalnih tela*, a *Kinetika* ispituje *kretanje materijalnih tela*. U univerzitetskim udžbenicima i nastavnim programima Dinamikom se naziva Kinetika, a Statika se javlja nezavisno od Dinamike, kao prvi kurs mehanike koji se izučava.

$$Raciona\ln a\quad mehanika\begin{cases} Kinematika \\ \\ Dinamika\ \begin{cases} Kinetika \\ Statika \end{cases} \end{cases}$$

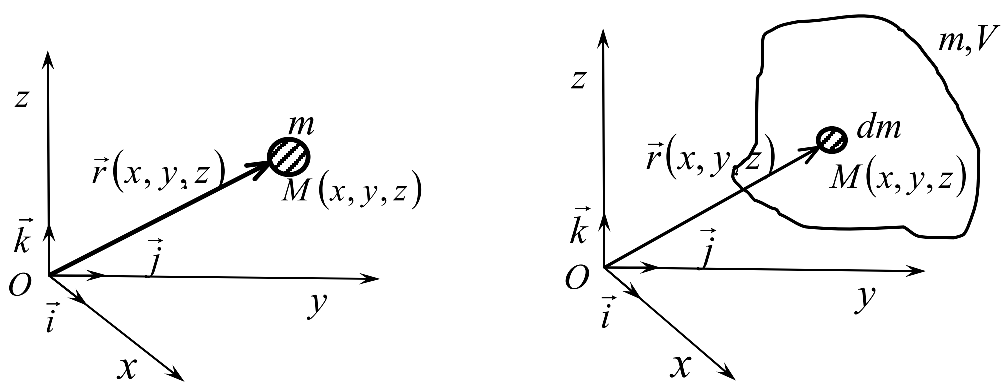
U upotrebi je i naziv *Teorijska mehanika* umesto naziva *Racionalna mehanika*.
Prethodnu podelu možemo dopuniti na sledeći način:

$$Teorijska\ (Analiticka)\ mehanika\begin{cases} Kinematika\begin{cases} Kinematika\ \ kinematicke\ \ tacke \\ Kinematika\ krutog\ kinematickog\ tela \\ Kinematika\ deformabi\ln og\ kinematickog\ tela \\ Kinematika\ \ mehaniyama - \Pr akticni\ deo \end{cases} \\ \\ Dinamika\begin{cases} Kinetika\begin{cases} Kinetika\ \ materija\ln e\ tacke \\ Kinetika\ sistema\ materija\ln ih\ tacaka \\ Kinetika\ krutih\ materija\ln ih\ tela \\ Teorija\ oscilacija \\ Kinetika\ deformabi\ln ih\ tela - kinetika\ kontinuuma\begin{cases} Elastodinamika \\ Kinetika\ \ fluida \\ \mathrm{Re}\,o\log ija \\ Teorija\ \ plasticnosti \\ Biokinetika \end{cases} \end{cases} \\ Statika\begin{cases} Statika\ krutih\ materija\ln ih\ tela \\ Statika\ \ deformabi\ln ih\ tela\begin{cases} Teorija\ elasticnosti \\ Otpornost\ materijala - prakticni\ deo\ Teorije\ elasticnosti \\ Otpornost\ konstrukcija - primena\ u\ tehnici \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Pojam materijalne tačke.

Posmatrajmo takav *materijalni system* koji je *nepromenljiv*. To je takav materijalni sistem čiji delovi ne menjaju svoj relativni položaj jedan prema drugom. Sa njim vezan geoemtrijski sistem takodje je nepromenljiv. *Nepromenljiv materijalni sistem* zove se *kruto telo*. *Promenljiv materijalni system* zove se *deformabilni kontinuum*, koji može biti *čvrsto telo* sa osobinama elastičnosti ili viskoelastičnosti ili plastičnosti, ili pak *fluid* zavisno od osobna materijala i njegovog agregatnog stanja.

Ako se kruto telo kreće translatorno, onda njegovo kretanje možemo predstaviti kretanjem jedne njegove tačke. Tu tačku krutog tela možemo smatrati za zastupnika trenslatornog kretanja tog krutog tela. Tačka koja zastupa *translatorno kretanje materijalnog krutog tela* odredjene mase m zovemo ***materijalnom ili masenom tačkom*** mase m. To je geometrijska tačka sa kojom je vezana celokupna masa m translatorno pokretanog tela. Masa takve materijalne tačke može biti konačna, kada materijalno telo ima neku konačnu masu, ili beskonačno mala kada je telo beskonačno malo, pa tada pišemo da je to elementarna masa dm. Materijalne tačke beskonačno malih masa naročito su važne iz tog razloga što se na takve materijalne tačke može podeliti svaki materijalni sistem, kao i svako materijalno telo, i kruto, i čvrsto, ma u kakvom kretanju.



Masa materijalne tačke može biti i promenljiva sa vremenom kada je materijalno telo promenljive mase, koja se odvajanjem ili pridruživanjem smanjuje ili povećava, kada imamo ***materijalnu tačku promenljive mase*** sa vremenom.

Pojam materijalne tačke važan je ne samo za proučavanje translatornih kretanja materijalnih tela, nego i proizvoljnih kretanja materijalnih sistema. Tada se pokazuje da se za svaki slučaj proizvoljnog kretanja svakog materijalnog sistema, *centar masa sistema* kreće na isti način kao što bi se kretala materijalna tačka koja ima masu sistema i na nju dejstvuje rezultanta svih sila koje dejstvuju na sistem.

Prema rasporedu masa materijalna tela se javljaju kao: *materijalne tačke, materijalne linije, materijalne površi i ravni,* kao i *materijalno telo*.

Linijski rasporedjene mase obrazuju *materijalnu liniju* ili prav ili krivi *materijalni štap*. Njegove su dve dimenzije male u poredjenju sa dužinom, trećom trećom dimenzijom.

Materijalna površ je telo kod koga su mase raporedjene po površi i dve dimenzije su mnogo veće od treće, naprimer debljine.

Prostorni raspored masa obrazuje materijalni sistem. Raspored masa može biti dvojak: *diskretan* i *kontinualni.* U slučaju diskretnog rasporeda masa materijalne tačke su na konačnim rastojanjima i čine *sistem materijalnih tačaka*. U slučaju *kontinualnog rasporeda* materijalnih tačaka, mase obrazuju *telo*. Zbir masa svih *elementarnih materijalnih tačaka* daje masu tela.

Prema rasporedu masa *Dinamiku - Kinetiku* delimo na: *Dinamiku - Kinetiku materijalne tačke*, *Dinamiku - Kinetiku sistema materijalnih tačaka* i *Dinamiku - Kinetiku tela*.

Uz *Dinamiku –Kinetiku,* obično ide i *geometrija masa, koja ispituje linearne i kvadratne momente masa i time polazeći od postojanja masa tela ispituje njena svojstva, pri obrtnim i translatornim kretanjima materijalnog sistema, odnosno tela.*

Zakoni dinamike

Kako smo već napomenuli ranije, reč *Dinamika* potiče od grčke reči: **δύνάμις** što znači *sila*''. U našim izlaganjima ćemo zato pod ***zakonima dinamike*** *podrazumevati formulacije i definicije kojima se odredjuju pojedine sile s tačnošću matematičkih funkcija do imenovanih konstanti, a koje su formulisane na osnovu teorijskih apstrakcija eksperimentalnih merenja izmedju sila i deformacija realnih tela*.

Znanja potrebna za te *formulacije i definicije kojima se odredjuju pojedine sile s tačnošću matematičkih funkcija do imenovanih konstanti* stiču se na osnovu eksperimenata i merenja u prirodi i ljudskoj praksi, te nisu potrebni drugi logički dokazi o njhovoj istinitosti.

Osnovnim odredjenjem u vidu definicije sile inercije utvrdjena je dimenzija sile.

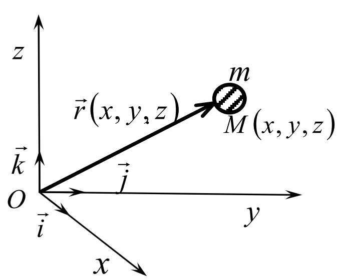
U skladu sa tom definicijom mogu se definisati i druge sile kao ***vektorske invarijente,*** koje imaju dimenziju kao i sila inercije $\dim\left|\vec{I}_F\right| = MLT^{-2}$.

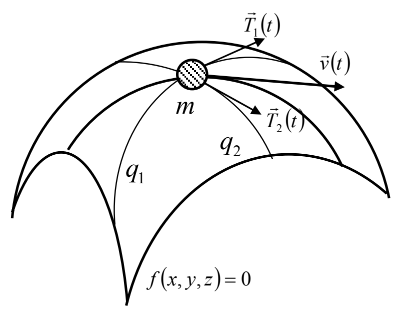
Ovde treba naglasiti razliku izmedju *osnovnog odredjenja – definicija* i *odredjenja – zakon*. Osnovno odredjenje – definicija to je *proizvod čovekovog uma i htenja jedinstvene tačnosti*, dok je *odredjenje - zakon dinamike iskazivanje rečima i formulama prethodno definisanih pojmova osnovnim odredjenjima-definicijama o pojedinim ponovljivim osobinama kretanja tela, u prirodi ili eksperimentu, tačnošću do dimenzione konstante dinamičkih parametara.*

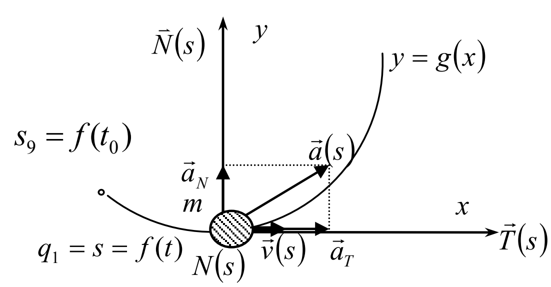
Kako se ove sile, kao i sila inercije, javljaju kao medjudejstva jednih tela u odnosu na druga, odnosno jedne materijalne tačke u odnosu na mnoštvo ostalih, to je potrebno opisati ih formulacijama zakona dinamike. Znači da, izmedju materijalnih tačaka postoje veze, koje su izražene uzajamnim dejstvima koja se označnjavaju silama. Misaono oslobadjanje pojedinih materijalnih tačaka ili sistema materijalnih tačaka od veza sa drugim, u dinamici, se zamenjuje *silama. Te sile se formulišu pojedinim zakonima dinamike.*

Zakon veza i njihove klasifikacije, otpor veze, stepen slobode kretanja i generalisane coordínate.

Iz čovekovih saznanja i nasledjenih znanja, kao i iz spoznaje u prirodi, proističe da tela dejstvuju jedna na druge posredstvom realnih objekata koje nazivamo *vezama*. Današnja saznanja ukazuju da ne postoje izolovana tela, niti sistemi, već da su izložena dejstvu drugih tela i drugih sistema, preko uzajamnih veza. U posmatranom racionalnom ili praktičnom lokalitetu poznati su ograničeni skupovi veza.







Na slikama su prikazane pokretne materijalne tačke i dve vrste veza.

Na prvoj slici je prikazana pokretna materijalna tačka u Descartes-ovom koordinatnom sistemu i pretpostavljeno je da je izolovana od veza, odnosno da je *slobodna*. Njen položaj u prostoru je odredjen pomoću tri koordinate. Kako je ta pokretna materijalna tačka slobodna, to ona ima ***tri stepeni slobode kretanja***. Za svaki stepen slobode kretanja uvodi se po jedna ***generalisana koordinata***, i mogu se izabrati naznačene Descartes-ove koordinate za generalisane coordinate.

Na sledećoj slici prikazano je ***kretanje materijalne tačke po površi***. Ta površ predstavlja ***geometrijsku vezu*** koja primorava materijalnu tačku da se kreće po njoj ne napustajući je. Kao i u prethodnom slučaju, položaj materijalne tačke je odredjen pomoću *tri koordinate* bez obzira koji sistem koordinata izabrali, ali materijalna tačka ima *dva stepena slobode kretanja*, odnosno, jedan stepen slobode kretanja manje od broja koordinata. Znači materijalna tačka ima dva stepena slobode kretanja, jer je vezana jednom vezom. To znači da njen položaj na površi $f(x, y, z) = 0$ možemo odrediti pomoću *dve koordinate* naprimer x i y kao nezavisne, dok treću koordinatu z možemo izraziti pomoću njih u obliku $z = g(x, y)$, ili pak njen položaj na površi možemo odrediti pomoću krivolinijskih koordinata q_1 i q_2 te posmatrane površi. *U ovom slučaju materijalna tačka nije slobodna već je podvrgnuta jednoj vezi*, pa ima dva stepena slobode kretanja i dve generalisane koordinate. Za generalisane koordinate možemo izabrati naprimer koordinate x i y, ili q_1 i q_2, ali taj izbor je višeznačan i zavisi od izbora koordinatnog sistema u kome ćemo opisati vezu i položaj materijalne tačke. Ako je materijalna tačka prinudjena da se kreće po površi, njene koordinate zadovoljavaju jednačinu površi u svakom trenutku vremena i položaju pokretne materijalne tačke.

Na trećoj slici prikazano je ***kretanje materijalne tačke po liniji***. Ta linija predstavlja ***geometrijsku vezu*** koja primorava materijalnu tačku da se kreće po njoj ne napustajući je. Kao i u prethodnom slučaju, položaj materijalne tačke je odredjen pomoću *tri coordinate,* bez obzira koji sistem koordinata izabrali, ali materijalna tačka ima *jedan stepena slobode kretanja*, odnosno, dva stepena slobode kretanja manje od broja koordinata. Znači materijalna tačka ima jedan stepena slobode kretanja, jer je vezana dvema vezama. To znači da njen položaj na liniji odredjenoj kao presek dve površi $f_1(x, y, z) = 0$ i $f_2(x, y, z) = 0$ možemo odrediti pomoću *jedne koordinate,* naprimer x kao nezavisne, dok ostale dve koordinate, y i z možemo izraziti pomoću njih u obliku $y = g_1(x)$ i $z = g_2(x)$, ili pak njen položaj na liniji možemo odrediti pomoću krivolinijske koordinate $q_1 = s$ duž luka te krive linije. *U ovom slučaju materijalna tačka nije slobodna već je podvrgnuta dvema vezama*, pa ima jedan stepen slobode kretanja i jednu pripadajuću generalisanu koordinatu. Za generalisanu koordinatu možemo izabrati, naprimer, jednu od koordinata položaja, naprimer, x ili $q_1 = s$, ali je taj izbor višeznačan i zavisi od izbora koordinatnog sistema u kome ćemo opisati vezu i položaj te pokretne materijalne tačke. Ako je materijalna tačka prinudjena da se kreće po liniji, njene koordinate zadovoljavaju jednačinu krive linije u svakom trenutku vremena i odgovarajućem položaju pokretne materijalne tačke.

Na osnovu prethodnih primera mežemo definisati pojam veza.

Definicija veze. Relacije oblika $f_\mu(x, y, z) = 0, \mu = 1{,}2$, u kojima su funkcije f_μ realne diferencijabilne funkcije na odredjenoj oblasti, a koje na odredjeni način ukazuju da je kretanje materijalne tačke ograničeno nazivamo *relacijama geometrijskih i konačnih veza* ili kratko *geometrijskim konačnim vezama*.

Znači, ***ograničenje kretanja*** se naziva ***veza.*** Veza može biti izvedena pomoću materijalnih tela (tela, površina i linija) koja sačinjavaju ***mehanizam veze***. Matematički se veza izražava relacijama u vidu j*ednačina* ili *nejednačina*. Veze izražene jednaćinama nazivaju se *zadržavajućim ili dvostranim vezama*, a veze izražene nejednačinama nazivaju se *nezadržavajućim ili jednostranim*. U prvom slučaju materijalna tačka ne može napustuti vezu, naprimer površ ili liniju, a u drugom slučaju može napustiti vezu.

Kada je materijalna tačka na vezi, i to zadržavajućoj, kao i dok je ona na nezadržavajućoj vezi, ***veza dejstvuj***e ***na materijalnu tačku***, pa se kaže da ''***veza dejstvuje''***. Kada materijalna tačka napusti nezadržavajuću vezu onda veza nema dejstva na materijalnu tačku i ona se dalje kreće kao slobodna.

Kada je pokretna materijalna tačka prinudjana da se kreće samo u jednom delu prostora, koji je odredjen nekom pokretnom površi, koja se matematički definiše relacijom $f(x, y, z, t) = 0$, onda kažemo da je *veza pokretna, reonomna ili nestacionarna.* Znači da je reonomna i nestacionarna veza opisana relacijom, funkcijom koja zavisi i od vremena, a ne samo od koordinata materijalne tačke. Kada relacija veze ne zavisi od vremena kažemo da je veza *stacionarna* ili *skleronomna.*

U opštem slučaju veze mogu biti i *diferencijalne* ili *kinematičke*. *Diferencijalne* veze mogu biti *integrabilne* i *neintegrabilne*. Tada se sistemi u kojima se javljaju te veze mogu razvrstati u *holonomne* i *neholonomne. Ako su veze differncijalne i integrabilne* onda je to *holonomna* veza, a ako je ona diferencijalna i neintegrabilna veza je *neholonomna*.

Postoji podela i na *statičke* i *dinamičke veze.*

Pošto se veze izvode pomoću materijalnih tela i materijalnih tačaka, to su one izvor sila koje se suprotstavljaju kretanju. Ove sile se zovu ***sile veze*** ili *otpori* ili ***reakcije veza***.

Klasifikaciju veza možemo izvršiti i na osnovu ***otpora veze*** u dve grupe:

1* ***idelne veze***, kod kojih celokupni otpor veze pada u pravac gradijenta (normale) na tangencijalnu ravan veze u tački kroz koju prolazi pokretna materijalna tačka; Takve veze se zovu i *idealno glatke veze*;

II* ***neidealne veze*** kod kojih se javljaju dve komponente otpora veze: jedna komponenta pada u pravac gradijenta (normale na tangencijalnu ravan) veze u tački kroz koju prolazi pokretna materijalna tačka, kao i kod idealnih veza, a druga komponenta je upravna na gradijent i leži u toj tangencijalnoj ravni. Ovakve veze se stvarno realizuju u praksi, i najčešća je neodelna veza sa *trenjem* usled *hrapavosti* površi ili linije po kojoj se kreće materijalna tačka.

Ako je trenje zanemarljivo, kao i elastična svojstva veze, ili krutost veze velika (naprimer površ ili linija idealno glatke, neelastične i krute) onda veze možemo proglasiti idealnim, odnosno idealno glatkim i opisati ih prethodno navedenim i analiziranim relacijama. Opšte svojstvo svih veza može se definisati ***zakonom veza***.

Zakon veza: Veze ograničavaju pomeranja materijalnih tačaka kao sile inercije, i zamenjuju se reakcijama veza. Ako kretanje materijale tačke ograničava k veza, onda se njihovo dejstvo zamenjuje vektorskim zbirom reakcija pojedinačnih veza. Taj vektorski zbir reakcija pojedinačnih veza. koje ograničavaju kretanje materijale tačke, naziva se rezultanta reakcije veza na tu pokretnu materijalnu tačku.

Najbitnije u analizi dejstva veza je da se odredi karakter otpora (reakcije veza).

Otpor realne neidealne veze $\vec{F}_w$ se može napisati u obliku vektorskog zbira dveju komponenata:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT}$$

normalne $\vec{F}_{wN}$ komponente, koja pada u pravac gradijenta (normale na tangencijalnu ravan) veze u tački kroz koju prolazi pokretna materijalna tačka, kao i kod idealnih veza, i tangencijalne $\vec{F}_{wT}$ komponente koja je upravna na gradijent i leži u toj tangencijalnoj ravni.

Prvu normalnu $\vec{F}_{wN}$ komponentu, koja pada u pravac gradijenta (normale na tangencijalnu ravan) veze u tački kroz koju prolazi pokretna materijalna tačka odredjujemo u obliku

$$\vec{F}_{wN} = \lambda \; grad \; f(x, y, z)$$

gde je λ neki množitelj veza koji se odredjuje iz jednačina kretanja materijalne tačke, poznat je pod imenom Lagrange'ov množitelj veza.

Drugu, tangencijalnu komponentu $\vec{F}_{wT}$ otpora neidealnih veza, koja je upravna na gradijent relacije veze i leži u tangencijalnoj ravni, a najčešće potiče od hrapavosti površi veza, odredjujemo na osnovu zakona trenja ili otpora sredine.

Zakon trenja.

U dodirnoj tački materijalnog tela i neidealne veze sa svojstvima hrapavosti javlja se sila trenja $\vec{F}_{wT}$ kao otpor pomeranju tela po njoj i leži u tangencijalnoj ravni na površ veze u toj tački.

Kako je trenje veoma složena hidro i aerodinamička pojava, koja je najčešće štetna, ali se često i korisno upotrebi u vibracionim mašinama za premeštanje tela, to se ona umanjuje ili čak i odstranjuje podmazivanjem tarućih površi. Kulonovi zakoni o trenju pri klizanju definišu trenje pri klizanju po kojima trenje ne zavisi od brzine kretanja tela po hrapavoj površi, već samo od normalnog pritiska izmedju tela i hrapave površi, kao i od vrste materijala. Novija eksperimentalna istraživanja su pokazala da Kulon-Morenovi zakoni ne važe u kretanju, već otpor usled trenja zavisi i od brzina relativnog kretanja jednog u odnosu na drugo telo. Na osnovu tih saznanja može se zaključiti da se razlikuju dva koeficijenta trenja pri klizanju: statički i dinamički. Kod trenja kotrljanja ovaj koeficijent se javlja u sasvim drugom stanju.

Granična vrednost veličine suvog trenja pri mirovanju $\vec{F}_{wT}$ proporcionalna je veličini sile normalnog otpora (pritiska) $\vec{F}_{wN}$ izmedju materijalnog tela i hrapave površi veze I koeficijenta trenja klizanja i mirovanja μ, koji je beydimenyioni broj:

$$\vec{F}_{wT} = -\mu F_{wN} \frac{\vec{v}}{v} = -\mu \left|\lambda \; grad \; f(x,y,z)\right| \frac{\vec{v}}{v}$$

Zakoni otpora i potiska sredine.

Kada se pokretna materijalna tačka pomera u vazdušnom prostoru javlja se otpor vazduha, kao *otporna – pasivna sila.* koja se suprotstavlja kretanju materijalne tačke (tela). Teorijsko odredjivanje veličine sile otpora sredine i zakona po kome se menja se najačešće odredjuje eksperimentalno. Dokazano je da otpor kretanju tela u vazdušnom prostoru zavisi od brzine kretanja materijalnog tela, gustine sredine u kojoj se izvodi kretanje i od samog oblika tela. Prve eksperimente za odredjivanje zakona otpora vazdušne sredine vršio je Isaak Newton i postavio je dva zakona:

1* Kada je brzina kretanja tela mala (do $1\left[m \sec^{-1}\right]$) otpor kretanju je dat u obliku linearne zavisnosti od brzine kretanja:

$$\vec{F}_w = -cL\vec{v}$$

gde su c konstanta, L dužina tela, $\vec{v}$ brzina kretanja tela u vazdušnom prostoru.

2* Kada su brzine kretanja tela veće (ali manje od brzine zvuka) otpor kretanju je dat u obliku kvadratne zavisnosti od brzine kretanja:

$$\vec{F}_w = -c\rho A v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

gde su c konstanta, ρ gustina vazdušnog prostora, A površina najvećeg poprečnog preseka tela u pravcu normalnom na pravac kretanja, $\vec{v}$ brzina kretanja tela u vazdušnom prostoru. Ovaj zakon je u literaturi poznat pod imenom turbulentnog prigušivanja.

Zakon elastičnosti materijala i zakon visko-elastičnosti materijala.

Definišemo *standardni laki element materijalnog deformabilnog tela* u vidu materijalne linije (štapa) pomoću koje *eksperimentalno ispitujemo pojavu sile* pri aksijalnom statičkom ili sporom dinamičkom naprezanju materijalne linije. Na osnovu tako izvedenog eksperimenta na materijalima različitih svojstava: elastičnosti, viskoznosti, plastičnosti moguće je lako utvrditi sledeće zakone:

1* ***Zakon elastičnosti*** materijala na primeru lakog idealno elastičnog tela (aksijalne opruge)

$$F_e = -c\Delta\ell$$

gde je F_e sila elastičnosti, c koeficijent uspostavljanja, $\Delta\ell$ mera deformacije (izduženja, skraćenja) tela.

2* ***Zakon viskoznosti*** materijala na primeru lakog idealno viskoznog tela:

$$F_\mu = -\mu \frac{d(\Delta\ell)}{dt}$$

gde je F_μ sila viskoznosti, μ koeficijent viskoznosti, $\frac{d(\Delta\ell)}{dt}$ mera brzine deformacije (izduženja, skraćenj) tela.

3* ***Zakon plastičnosti*** materijala na primeru lakog idealno plastičnog tela:

$$F_p = F_{PC} = const$$

4* ***Zakon naslednih svojstava viskoelatičnih materijala*** na primeru lakog standardnog naslednog elementa.

Sila $P(t)$ uspostavljanja deformisanog stanja naslednog elementa, u obliku integralne konstitutivne jednačine naponsko-deformacionog stanja ili prosto stanja naslednog tela je:

$$P(t) = c\left[y(t) - \int_0^t \mathcal{R}\,(t-\tau)y(\tau)d\tau \right]$$

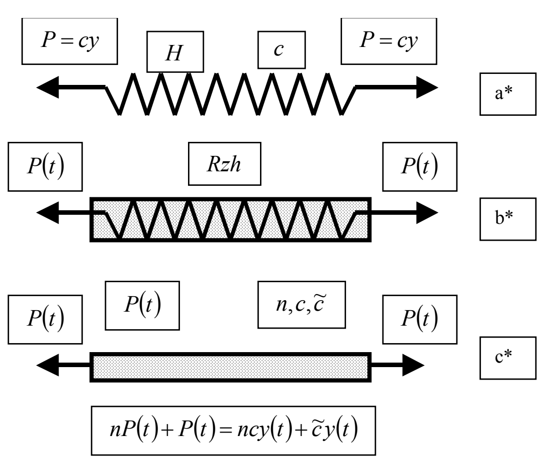
čije se *jezgro* (rezolventa)

$$\mathcal{R}\,(t-\tau) = \frac{c-\tilde{c}}{nc} e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}$$

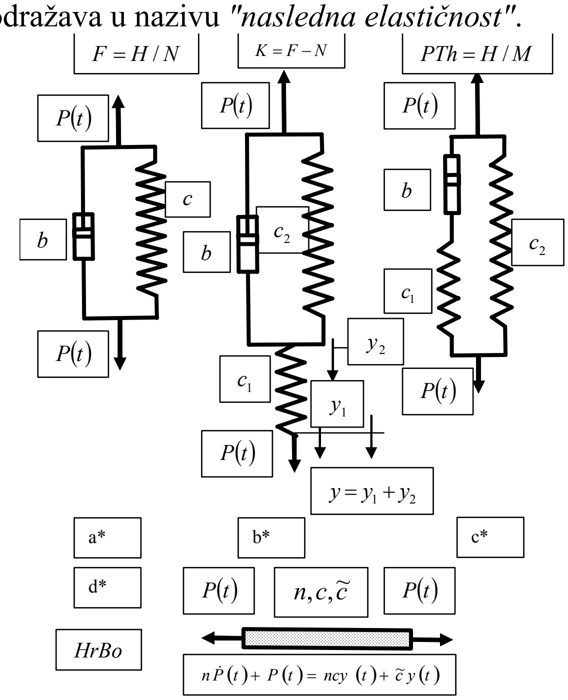
naziva *jezgrom relaksacije sile (napona),* a koeficijent $\beta = \frac{1}{n}$, dobio je ime *koeficijent relaksacije*. Pri fiksiranom izduženju standardnog naslednog elementa $y(t) = y_0 = const.$ konstitutivna jednačina opisuje smanjenje (relaksaciju) sile sa vremenom. Zato se ta jednačina naziva isto tako i jednačinom relaksacije.

Mi smo ovim prethodno navedenim zakonima dinamike, na osnovu eksperimentalnih saznanja i tako stečenog znanja, pridružiti zakon ***standardne naslednosti***. To znači da pod pojmom zakona dinamike diskretnih naslednih sistema podrazumevamo odrednice sila i/ili promena sila sa rastojanjima i promenama rastojanja sa vremenom, sa tačnošću do konstanata, koje zavise od eksperimentom moguće tačnosti odredjivanja istih. Tačnost tih konstanti, a sa njima i formula sila, zavisise ne samo od nepoznavanja prirode objekata, već često i od nemanja matematičkih znanja da se računa sa veoma složenim relacijama .....Na osnovu činjenice da se zakoni dinamike utvrdjuju na osnovu posmatranja i merenja u prirodi i eksperimentalnoj ljudskoj praksi prihvata se da je zadovoljen preprincip postojanja. Ako konstatujemo da postoje sile, onda preprincip invarijatnosti uslovljava da se pri preslikavanju funkcija sila, ili relacija sila i/ili promena sila i rastojanja, i promena rastojanja, pri prelazu iz jednog sistema koordinata u drugi, ne menjaju zakoni dinamike.

Termin *nasledna elastičnost* izražava sposobnost reološkog tela da svojstveno *"zapamti"* istoriju opterećivanja (naprezanja) tela. Viskoelastilno telo poseduje osobenosti deformisanja: Pri kratkovremenom opterećivanju javlja se brzo uspostavljanje forme (oblika) tela, odmah posle uklanjanja opterećenja; dok je, pri dugotrajnom opterećivanju, za uspostavljanje prvobitne forme (oblika) potreban, takodje, dugotrajni interval vremena, posle rasterećenja, (vidi sliku br. 1.1.). To znači da viskoelstično telo "zapamti" ("pamti") istoriju opterećivanja, što se i odražava u nazivu *"nasledna elastičnost"*.



Слика бр. 1.4. Символика у шемама динамичких система.
a* Приказ идеално еластичног Hooke-овог елемента (H).
b* Приказ виско-еластичног тела по А.Р. Ржаницин-у (Rzh).
c* Приказ наследног елемента, који је прихваћен у овом раду (P).



Slika br.1.5. Modeli naslednih tela [34].
a* Model tela Foight-a ($F = H / N$);
b* Model tela Kelvin-a ($K = F - H$);
s* Model tela Ponträgina-Thompson-a ($PTh = H / M$)
d* Simboli~ki prikaz izabranog naslednog elementa

Za svako standardno nasledno telo, koje je sastavljeno od više elastičnih i viskoznih elemenata, vezanih, redno, paralelno ili kombinovao važi uopšteni zakon - zakon dinamike standardnog naslednog elementa u obliku:

$$n\dot{P}(t)+P(t)=nc\dot{y}(t)+\tilde{c}y(t)$$

pri čemu se konkretnim dokazom, zavisno od definisane veze komponentnih elemenata, odredjuje veza koeficijenata elastičnosti i koeficijenata viskoznosti sastavnih elemenata i koeficijenata: vremena relaksacije n, i koeficijenata krutosti c i $\tilde{c}$ složenog modela standardnog naslednog elementa.

Pojasnimo proistekle nazive konstanti. Pri trenutnom (udarnom) dejstvu sile članove $P(t)$ i $\tilde{c}y(t)$ u jednačini zakona zanemarujemo i jednačina se predstavlja u obliku

$$n\dot{P}(t)=nc\dot{y}(t)$$

Posle integraljrnja ta jednačina dobija oblik $P(t)=cy(t)$ iz koga sledi da je c trenutna krutost naslednog elementa.

Pri dugotrajnom (sporom) opterećivanju zanemarujemo "brzinske" članove $n\dot{P}(t)$ i $nc\dot{y}(t)$, jer su mali u odnosu na druge, i jednačina se svodi na relaciju

$$P(t)=\tilde{c}y(t).$$

Ovde se $\tilde{c}$ pojavljuje u kao dugotrajna krutost elementa. Vreme relaksacije n u sekundama, definiše umnožavanje sile, toliko puta, naslednim svojstvima elementa, pri konstantnoj deformaciji $y(t)=y_0=const.$.

Zakon reaktivnog potiska ili reaktivnog pogona.

Ovaj zakon se uočava kod pokretnih materijalnih objekata (tela) promenljive mase sa vremenom $m(t)$, kod kojih se odigrava separacija ili pridruživanje materijala brznom promene mase $\dot{m}(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$.

Tu brzinu promene mase $\dot{m}(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$ nazivamo ***tok mase,*** i ona se odvaja od materijalnog tela promenljive mase relativnom brzinom $\vec{v}_r(t)$ i dejstvuje na telo reaktivnom silom

$$\vec{\Phi}(t)=\dot{m}(t)\vec{v}_r(t)=\vec{v}_r(t)\frac{dm(t)}{dt}.$$

To je formulacija ***zakona reaktivnog potiska ili reaktivnog pogona***.

Zakon gravitacije.

Vekovima su posmatrana i proučavana kretanja i položaji putanja planeta sunčevog sistema, kao i u poslednjem veku kretanja veštačkih satelita,pto je čovečanstvu omogućilo sledeća osnovna saznanja:

1* mnoga nebeska tela u vasioni prividno zadržavaju trajno svoje položaje ili ponovljivo vidljivo svoje putanje, ili kretanja jednih u odnosu na druge;

2* da su njihova relativna, medjusobna rastojanja postojana ili da se periodično menjaju;

3* da postoje pojedini centri oko kojih se tela kreću po spiralnim putanjama; koja vode ka gravitacionom centru.

Takodje, ovome treba pridružiti saznanje da izmedju tih nebeskih tela postoje sile koje su uzrok takvim kretanjima sa navedenim svojstvima. Te sile uzajamnog dejstva zavise od njihovih masa, njihovih rastojanja i kinematičkih parametara kretanja planeta, tj. kinematičkih parametara njihovih putaja, brzina i ubrzanja. Ovde u prvom identifikujemo sile gravitacije, o kojima i danas saznanja nisu potpuna.

Ovde izdvajamo kao najznačajnije za naš program dinamike: *Keplerove zakone o kretanju planeta i Newton-ovu silu opšte gravitacije.*

Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta.

Johan Kepler (1571-1630) je bio naslednik *Tiho Brahea* u zvanju dvorskog astronoma i matematičara na dvoru u Pragu. Na osnovu mnogobrojnih podataka iz posmatranja kretanja nebeskih tela i posebno Marsa, koje mu je ostavio prethodnik Tiho Brahe, Kepler je nastavio posmatranja kretanja Marsa i Zemlje. U svom delu ***''Astronomia nova de motibus stellae Martis''***, koje je publikovano 1609, postavio je svoja prva dva zakona kretanja planeta, a u delu ***''Harmonices mundi***'' 1619 i svoj treći zakon.

Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta glase:

1* *Planete opisuju oko Sunca eliptičke putanje; u zajedničkoj žiži tih elipsi nalazi se Sunce*.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

je jednačina elipse u polarnim koordinatama (r,φ) i sa poluosama (b,c), dok je parametar elipse

$$p = \frac{c^2}{b} = \frac{b^2-e^2}{b},$$

a linearna ekscentričnost je

$$e = \sqrt{b^2-c^2} = \varepsilon b\,.$$

2* *Vektor položaja planete u odnosu na Sunce prevlači u jednakim delovima vremena jednake površine.*

Ovaj zakon tvrdi da je sektorska brzina kretanja planeta konstantna te je u polarnom sistemu koordinata (r,φ) izraženo sledećom relacijom:

$$2S = r^2\dot{\varphi} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = C = const$$

3* *Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca srazmerni su kubovima velikih poluosa eliptičnih putanja planeta*.

Na osnovu prethodnog drugog Kepler-ovog zakona pomoću sektorske brzine dolazi se do trećeg koji izražavamo relacijom:

$$k = \frac{b^3}{T^2}$$

gde je k broj koji važi za sve planete, a T vreme jednog obilaženja planete oko Sunca.

Ova sva tri zakona ne odredjuju silu medjudejstva planeta, pa direktno ne spadaju u grupu zakona dinamike, kako smo ih definisali, ali su osnova na kojoj je Newton odredio silu privlačenja izmedju planeta.

Newton-ova sila opšte gravitacije

Iz Keplr-ovih zakona o kretanju planeta Newton je osmislio dalekosežnije zaključke i publikovao ih sa dokazima u svom delu delo "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Matematički principi prirodne filozofije) koje je publikovano maja 1687 godine i kojim je dao jak oslonac daljem *razvoju Dinamike*. On je iz Keplr-ovih zakona o kretanju planeta odredio komponentnu ubrzanja $\vec{a}_r$ u radijalnom pravcu (pravac od planete do centra privlačenja – Sunca) u obliku:

$$\vec{a}_r = -\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0$$

Ovo je i zakon *Vrena* koji važi i za stvarne, a ne samo za kinematičke eliptične putanje.

Newton se ne zaustavlja na ovome, već svojim genijalnim umom uopštava prethodni rezultat i na ostala nebeska tela, koristeći pri tome i rezultate *Galileo Gelileya* da materijalna tačka na površi Zemlje ima ubrzanje g.

Odredio je silu kojom Sunce privlači planete:

$$\vec{F}_r = -m\vec{a}_r = -m\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je m masa te planete, r radijus u radijalnom pravcu (pravac od planete do centra privlačenja – Sunca), a $\vec{r}_o$ jedinični vektor orjentacije tog pravca planeta - Sunce.

Po tome zakonu dejstva i protivdejstva mase planete i mase Sunca dolazi do zakona o sili uzajamnog privlačenja Sunca i planete u obliku:

$$\vec{F}_r = -f\frac{mM_s}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je M_s masa Sunca, m masa planete, $f = \dfrac{\lambda}{M_s} = \dfrac{4\pi\kappa}{M_s}$ univerzalna konstanta koja važi za sve planete Sunčevog sistema. Time je Newton došao do zakona o opštoj univerzalnoj gravitaciji, koja važi za svaka dva delića materije , kao i za celu Vasionu.

Newton-ov zakon o opštoj univerzalnoj gravitaciji ima sledeću formulaciju:

Svako materijalno telo u Vasioni privlači drugo silom koja pada u pravac spojne prave tih tela, intenziteta srazmernog proizvodu masa tela, a obrnuto srazmernog kvadratu rastojanja:

$$\vec{F}_g = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je f univerzalna gravitaciona konstanta (po Gauss-u). Njena vrednost je odredjena eksperimentalno (po *Kevendišu - Cavendish* 1798.godine) i iznosi $f = 6{,}67\,10^{-8}\left[gr*^{-1}\,cm^3\sec^{-2}\right]$ i ona je privlačna sila dveju masa od po jednog $[gr*]$ na rastojanju od jednog $[cm]$ i izražena je u dyn-ima.

Tako, *Danilo P. Rašković* u svom udžbeniku ''*Dinamika*'' iz 1948. godine, piše da je ovaj *Newton-ov zakon gravitacije* uneo *mnogo poleta u naučna dokazivanja* istina o kretanju nebeskih tela i citira da se o njegovoj važnosti najlepše izrazio velikan naše nauke *Milutin Milanković*: *''Tako se Njutnov zakon najveličanstveniji što ga je ikad smrtni čovek mogao da dokuči, pokazao kao opšti zakon prirode kome se pokorava cela Vasiona*.''

I Veljko A. Vujićić u svojoj monografiji ''*Preprincipi mehanike''* iz 1998. godine takodje citira našeg genijalnog naučnika Milutina Milankovića sledećim rečenicama: *''Njutnovim zakonom posta odgonetnuta hiljadugodišnja zagonetka planetskog kretanja i nova saznanja sledovaše, sama od sebe iz njega. Sve nejednakosti kretanja planeta i Meseca ispoljiše se kao prirodna posledica toga zakona, kao i jasni izražaj medjusobnog privlačnog dejstva tih nebeskih tela. Ne samo da je tim priroda tih nejednakosti postala rastumačena: one su se mogle izračunavati i pratiti i u prošlost i u budućnost. Pokazalo se i za komete, ubrzo iza postavljenja Njutnovog zakona, da on važi za sva nebeska tela bez izuzetka, dakle i izvan Sunčevog sistema. Precesija ravnodnevnica, koju je, kao što smo čuli, prvi konstantovao Hiparhos, našla je Njutnovim zakonom svoje potpuno razjašnjenje., a , isto tako kasnije opažena nutacija Zemljine ose. I oblik naše Zemlje, a naročito njena spljoštenost usled rotacije dobi, u svim pojedinostima, mehaničko i geometrijsko obrazloženje. To isto vazi i za prastaro pitanje o postanku morske plime, koja se pokazala kao neposredna posledica privlačnog dejstva Sunca i Meseca''.*

Zahvaljujući ovom Njutnovom zakonu iznikla je jedna nova nauka – *Nebeska mehanika*.

Zaključujući o zakonima dinamike možemo ponoviti da se pod pojmom zakona dinamike podrazumevaju formulacije - odrednice sila sa tačnošću do neke konstante.

Neke formulacije zakona dinamike, izražene formulama za odredjivanje sila su opštije, a neke manje opšte u definisanju pojedinih sila, ali im je zajedničko da sve sadrže jednu ili skup više konstanti koje dopuštaju odredjivanje ili se odredjuju za pojednine objekte uvodjenjem ili prednačela odredjenosti, ili svojstvima idealnosti veza ili eksperimentalnim putem na tačno poznatom realnom objektu.

O sili uzajamnog privlačenja.

Ovde navodimo formulaciju zakona o sili uzajamnog privlačenja dva tela, kao i formulu iz monografije ''*Preprincipi mehanike''* iz 1998. godine V.A. Vujičića., dok ćemo se kasnije vratiti na sam dokaz.

O sili uzajamnog privlačenja*: Dve materijalne tačke masa m_1 i m_2 privlače jedna drugu na medjusobnom rastojanju $\rho(t)$ silom privačenja*

$$F = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 m_2}{\rho} = \chi \frac{m_1 m_2}{\rho}$$

gde se značenje brzine v_{or} pojašnjava formulom

$$v_{or}^2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 .$$

Prethodnoj formuli o sili privačenja dve materijalne *tačke masa m_1 i m_2 koje privlače jedna drugu na medjusobnom rastojanju $\rho(t)$ treba dodati i relaciju veze ugaone brzine relativnog obrtanja $\dot{\varphi}(t)$ jedne materijalne tačke u odnosu na drugu u rani i njhovog medjusobnog rastojanja $\rho(t)$, koja ne zavisi implicitno od svojstava sile medjusobnog privlačenja tih materijalnih tačaka (vidi Goroškoi Hedrih: Analitička dinamika diskretnih naslednih siustema, obrazac K. Hedrih)*

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)}\right)^2$$

gde su ρ_0 rastojanje materijalnih tačaka u početnom trenutku i $\dot{\varphi}_0$ ugaona brzina *relativnog obrtanja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu.* Iz ove relacije ugaonih brzina *relativnog obrtanja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu* se može izvesti drugi Kepler-ov zakon, jer vidimo da prethodna relacija kaže da je *sektorska brzna relativnog kretanja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu u ravni konstantna*, odnosno da je:

$$2S_m = 2S_{m_2} = [\rho(t)]^2 \dot{\varphi}(t) = \rho_9^2 \dot{\varphi}_0 = const$$

Isto tako imajući u vidu da je period jednog punog relativnog obilaska jedne materijalne tačke oko druge:

$$T(t) = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}(t)}, \quad \text{te sledi da je:} \quad T(t) = T_0 \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right)^2$$

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.

Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основаниимеханики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djutić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
.