DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

DINAMIKA

III. TREĆA NEDELJA
Principi mehanike.

Princip ravnoteže. Princip rada. Princip dejstva. Princip prinude. Newton-ovi principi. Primeri.

IV. ČETVRTA NEDELJA
Teoreme mehanike.

Teorema o promeni impulsa kretanja. Teorema o promeni kinetičke energije. Promena Hamiltonijana. Teorema o promeni mehaničke energije. Teorema o upravljivosti kretanja. Teoreme o optimalnom kretanju upravljivih sistema i optimalnom upravljanju kretanjem. Newton-ovi zakoni.

Principi mehanike.

*Pod pojmom **principa ili načela mehanike** podrazumevamo iskaz **opšteg značenja** pomoću uvedenih pojmova i definicija mehanike, čija istinitost ne podleže dokazivanju.*

Principi mehanike ili *načela mehanike* moraju biti *saglasni sa* preprincipima ili *prednačelima*.

Opšti principi ili opšta načela jesu *i uslovi* iz kojih se mogu izvesti *jednačine kretanja materijalne tačke i materijalnog sistema,* i obrnuto, oni su posledice tih jednačina kretanja. Oni pokazuju osobine kretanja materijalne tačke, odnossno sistema materijalnih tačaka i potpuno su ekvivalentne jednačinama kretanja.

Opšte principe mehanike možemo podeliti u dve grupe: *diferencijalne i integralne principe*.

Diferencijalni principi omogućavaju da se iz njih izvedu *diferencijalne jednačine kretanja*.

Integralni principi karakterišu i putanje materijalnih računa.

Grupi ***diferencijalnih principa*** pripadaju: *Dalamberov princip, Lagražeov princip virtualnih pomeranja i Gausov princip najmanjeg odstupanja (ili prinude).*

Grupi ***integralnih principa*** pripadaju: *Hamiltonov princip najmanjeg dejstva*, *Lagranž-Mopertiev princip najmanjeg dejstva.*

Hamiltonov princip najmanjeg dejstva se najviše koristi u problemima teorijske fizike i i kvantne mehanike. *Lagranž-Mopertiev princip najmanjeg dejstva se najaviše koristi u Teoriji elastičnosti i Teoriji oscilacija i zadacima sa deformacionim radom. Oba ta principa su varijacionog karaktera..*

Pored ovih glavnih principa postoje i drugi, a mdju njima: *Jakobijev princip (Jacobi), Helmholcov (Helmholtz), Hercov (Hertz), Pfafov (Pfaff) i drugi,*

Prva dva integralna principa su našla veliku primenu u tehnici pa ćemo ih detaljnije proučiti i primenjivati.

Princip dinamičke ravnoteže.

*Materijalno kruto telo je u **dinamičkoj ravnoteži** ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Ovaj princip se može izraziti matematički:

1 za jednu materijalnu tačku na koju dejstvuje sistem od* k *sila* $\vec{F}_i$, $i = 1,2,...,k$

$$\sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i = 0$$

2* za materijalni sistem kod koga na svaku materijalnu tačku mase m_ν, $\nu = 1,2,...,N$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_{\nu i}$, , $\nu = 1,2,...,N$, $i = 1,2,...,k_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu I} = 0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu I}\right] = 0$$

U saglasnosti sa *osnovnim odredjenjem, definicijom sile inercije kao vektorske invarijante*

$$\vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\,\vec{a}(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

i *zakonima dinamike,* jednačina (relacija) *principa dinamičke ravnoteže*, u vektorskom obliku, se može napisati:

1* za slobodnu materijalnu (dinamičku) tačku u obliku

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k}\vec{F}_i = 0$$

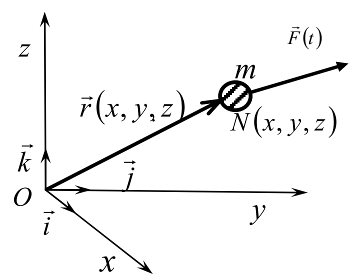
Ili

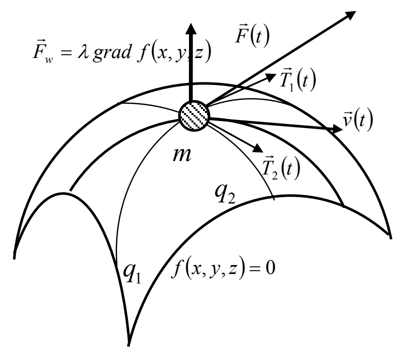
$$\left(-m\vec{a}(t)\right) + \sum_{i=1}^{i=k}\vec{F}_i = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} = 0$$

gde je $\vec{F}(t)$ zbir svuh aktivnih sila koje dejstvuju na slobodnu pokretnu materijalnu tačku.





2* za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x, y, z) = 0$, u obliku

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k}\vec{F}_i + \lambda\, grad\; f(x, y, z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{i=k}\vec{F}_i + \lambda\, grad\; f(x, y, z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} + \lambda\, grad\; f(x, y, z) = 0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x, y, z) = 0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze

$$\left(\vec{v}(t), grad\; f(x, y, z)\right) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda\, grad\; f(x, y, z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze I to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Zaključak 1. *Ako na slobodnu materijalnu tačku ne dejstvuje sila, ili je vektorski zbir aktivnih sila jednak nuli, onda se materijalna tačka kreće konstantnom brzinom jednakom brzini kretanja u početnom trenutku. Ako je početna brzina bila jednaka nuli tada materijana tačka ostaje u mirovanju. To sledi iz sledećih uslova:*

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)=0 \Rightarrow \vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)=const$$

Zaključak 2. *Ako je zbir sila veze i aktivnih sila, koje dejstvuju na materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika* $f(x,y,z)=0$ *jednak nuli, ona se materijalna tačka kreće konstantnom brzinom jednakom brzini kretanja u početnom trenutku. Ako je početna brzina bila jednaka nuli tada materijana tačka ostaje u mirovanju.*
To sledi iz sledećih uslova: za rezultantu aktivnih sila i sila veze

$$\vec{F}+\lambda\, grad\, f(x,y,z)=0$$

i principa dinamičke ravnoteže:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)=0 \Rightarrow \vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)=const$$

Princip dinamičke ravnoteže je drugačija formulacija Dalamber-ovog principa preko osnovnih odredjenja.

U izvornom obliku Dalamber je definisao ovaj princip uvodeći pojam efektivne sile $\vec{F}_e$ i koja je razlika izmedju aktivnih sila i izgubljenih sila (sila otpora veze) i za materijalnu tačku princip se može formulisati u obliku:

$$m\vec{a}(t)=\vec{F}+\vec{F}_W=\vec{F}_e$$

i za sistem materijalnih tačaka:

Materijalni sistem kod koga na svaku materijalnu tačku mase m_ν, $\nu=1,2,...,N$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_{\nu i}$, , $\nu=1,2,...,N$, $i=1,2,...,k_\nu$ *formulacija Principa dinamičke ravnoteže je:*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu I}-\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu Ie}=\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu Ib}=0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu,\vec{F}_{\nu I}\right]-\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu,\vec{F}_{\nu Ie}\right]=\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu,\vec{F}_{\nu Ib}\right]=0$$

jer se unutrašnje sile i sile veze koje dolaze u parovima poništavaju,

Za pokretni sistem materijalnih tačaka *zbir momenata svih sila, aktivnih i sila otpora veza za pol u koordinatnom početku je takodje jednak nuli.*

Prethodni sistem od dve vektorske jednačine je iskaz (izraz) ***Dalamberovog principa*** koji glasi:

Kad u nekom sistemu materihalnih tačaka sile razložimo na efektivne i izgubljene, onda su ove poslednje u ravnoteži .

Dalamber (*Jean Le Rond d'Alambert* (1717-1783)) je napisavši fundamentalno delo "*Traite de Dynamique*", koje je publikovano 1743. godine i u njemu definisao princip dinamičke ravnoteže.
U izvornoj formulaciji ovog principa Dalamber ne govori o silama nego *o promeni količine kretanja* u kratkom vremenskom intervalu.

1740.godine ***Leonid Ojler*** u *''Komentarima Petrogradske akademije nauka'' postavio je princip koji se bitno ne razlikuje od Dalamberovog.* Formulacija tog njegovog principa je:

Za sistem materijalnih tačaka sistem efektivnih sila ekvivalentan je sistemu napadnih (aktivnih) sila.

Dalamberov princip se obično primenjuje u trećem obliku uvodeći ***pojam sile inercije***, kao što smo uradili definišući princip dinamičke ravniteže.

Koriste se i sledeće formulacije (iskazi) za ***Dalamberov princip:***

Za vreme kretanja materijalne tačke sila inercije stoji ''u ravnoteži'' sa svim silama koje dejstvuju na materijalnu tačku.

U sistemu materijalnih tačaka, koji je u kretanju, i sile inercije obrazuju sistem sila koji je ''u ravnoteži''.

Uloga i značaj ***Dalamberovog principa*** je velika, jer omogućava da se *dinamički problemi* rešavaju *statičkim metodama* ispitujući ravnotežu aktivnih sila, sila veze i sila inercije, pri kretanju sistema materijalnih tačaka. Pri tome ne treba gubiti iz vida da se svojstva dinamike sistema bitno razlikuju od svojstava statike sistema.

Princip rada.

Za ovaj princip – ***princip rada*** nisu dovolji do sada definisani pojmovi i odredjenja. Potrebno je definisati *pojam rada* i zato uvodimo ***peto odredjenje - definicijom rada***.

. ***Definicija 5.*** *Elementarni rad sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke je skalarni proizvod te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku:*

$$dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Ukupan rad sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke je ukupan zbir svih elementarnih radova $dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ ili integral skalarnog proizvoda te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku:

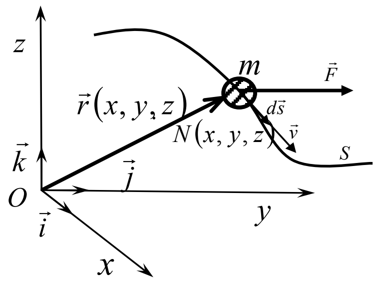
$$A^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

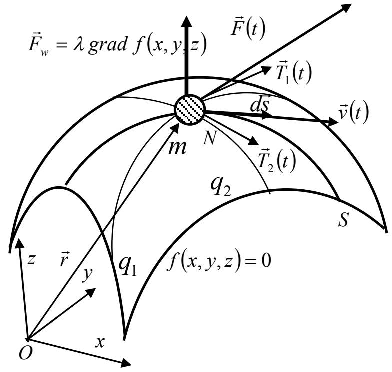
Definicijom ***skalarnog odredjenja*** - *elementarnog rada sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke* uspostavljena je skalarna veza izmedju sila (aktivne $\vec{F}$, ili reaktivne $\vec{F}_w$ odnosno sile inercije $\vec{I}_F$) i pomeranja duž puta s materijalne tačke m. Kako je *vektorskom invarijantom* – silom inercije $\vec{I}_F$ uspostavljena veza izmedju mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena i dimenzija intenziteta sile inercije kretanja materijalne tačke dobijena u obliku $\dim\left|\vec{I}_F\right| = MLT^{-2}$, gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$, kao i da smo time odredili dimenziju intenziteta aktivnih sila $\vec{F}$, kao i dimenziju intenziteta reaktivninh $\vec{F}_w$ *nije teško odrediti dimenziju elementarnog rada, kao i dimeziju ukupnog rada sile na predjenom putu pokretne materijalne tačke u nekom intervalu vremena. Dimenzija rada sile $\vec{F}$ na stvarnom pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke je:*

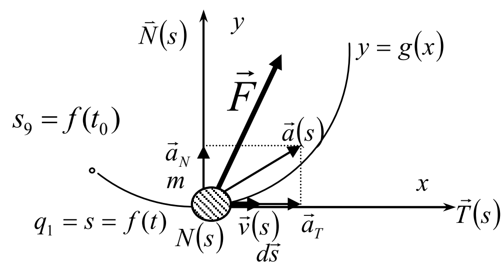
$$\dim A^{\vec{F}} = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

Kako je jedinica sile inercije $\left[kgm\sec^{-2}\right]$ ili $[N]$ to je jedonica rada $\left[kgm^2\sec^{-2}\right]$ ili $[Nm]$ ili $[J]$.

Na slikama su za različite slučajeve kretanja materijalne tačke mase m na koju dejstvuje aktivna sila $\vec{F}$ prikazani putanja S kretanja, stvarno elementarno pomeranje $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke koje je kolijearno sa brzinom $\vec{v}$ i pada u pravac tangente na putanju kretanja tačke.







Za razliku od četiri definicije osnovnih odredjenja, kojima su uvedene ***vektorske invarijante***, brzina $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$, impuls kretanja $\vec{p}$ i sila inercije $\vec{I}_F$ pokretne materijalne tačke, ćiji je položaj u kretanju odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$, ova definicija uvodi peto ***osnovno odredjenje*** koje je ***skalarna invarijanta***. Time je u ***teoriju dinamike*** uvedena, pored vektorskih, i ***skalatna invarijanta***.

Integral u definicija rada $A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s (\vec{F}, d\vec{s})$ je krivolinijski i u opštem slučaju zavisi od puta integraljenja i funkcija je položaja pokretne dinamičke tačke na putanji odredjenih kinematičkih i dinamičkih parametara od kojih zavisi familija mogućih trajektorija materijalne tačke definisanih odgovarajućim početnim položajima i brzinama. Podintegralne vektorske funkcije su sile, odnosno koordinate sila i u opštem slučaju zavise od vektora položaja $\vec{r}$ i vektora brzine $\vec{v}$ materijalne tačke, ili odgovarajućih njihovih koordinata, a u slučaju kada je reč o radu sile inercije onda zavise i od ubrzanja $\vec{a}$, odnosno njegovih koordinata.

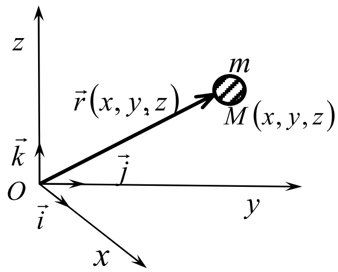
Za pojedine sile $\vec{F}$, naprimer $\vec{F}(\vec{r})$, *elementarni rad* $dA^{\vec{F}}$ *te sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke uzima oblik :*

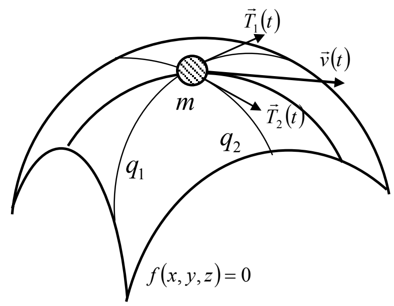
$$dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} (\vec{F}, d\vec{s}) = dU$$

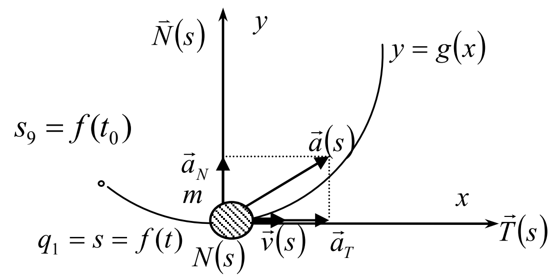
i ***predstavlja totalni diferencijal neke funkcije*** dU , koju smo označili sa U , taj integral se može ***integraliti nezavisno od puta*** o putanje integracije i *predstavlja invarijantu* u odnosu na put integraljenja i zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja materijalne tačke na putani kretanja materijalne tačke. Za taj slučaj možemo za *ukupan rad sile* $\vec{F}$ *na bilo kom stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke da napišemo samo u funkciji konetičkih parametara kretanja tačke u početnom i krajnjem položaju na putanji u obliku:*

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s} (\vec{F}, d\vec{s}) = \int_{s_0}^{s} dU = U - U_0$$

Funkcija $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, u optem slučaju, zavisi od vektora položaja $\vec{r}$ i vektora brzine $\vec{v}$ i to je ***funkcija sile***. Funkcija $E = -U$, koja je suprotnog znaka od funkcije sile $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ je ***funkcija energije ili kraće energija,*** a u specijalnim slučajevima to može biti ***promena ukupne energije kretanja materijalne tačke*** ΔE , ili pak njen deo: $\Delta E_p(\vec{r})$ ***promena potencijalne energije*** kada sila zavisi od vektora položaja $\vec{r}$ pokretne dinamičke tačke , ili $\Delta E_k(\vec{r}, \vec{v})$ ***promena kinetičke energije*** kada ona zavisi i od vektora brzine $\vec{v}$ kretanja materijalne tačke, što zavisi od ***prirode sila čiji rad i energiju odredjujemo***. Ako se radi o elektomehaničkom sistemu, onda ova energija ima i još i druga svojstva u zavisnsosti od svojstava elektrodinamičkih sila čiji rad odredjujemo.







Rad sile inercije.

Imajući u vidu definiciju sile inercije $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$, kao *vektorske invarijante* i jednog od osnovnih odredjenja dinamike, kao i definiciju rada sile kao *skalarne invarijante* za ***rad sile inercije*** $\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$ možemo da pišemo sledeću relaciju_

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s}(\vec{F},d\vec{s}) = \int_{t_0}^{t}\left(-m\frac{d\vec{v}}{dt},\vec{v}dt\right) = -m\int_{\vec{v}_0}^{v}(\vec{v},d\vec{v}) = -\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\left(E_k - E_{k0}\right)$$

Za rad sile inercije $\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$, a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli, $v_0 = 0$ možemo da pišemo sledeću relaciju

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_{s_0}^{s}(\vec{F},d\vec{s}) = \int_{t_0}^{t}\left(-m\frac{d\vec{v}}{dt},\vec{v}dt\right) = -m\int_{0}^{v}(\vec{v},d\vec{v}) = -\frac{m}{2}v^2 = -E_k$$

*Iz poslednje relacije sledi **zaključak**: Rad sile inercije* $\vec{I}_F(t)$ *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* m *koja se kreće brzinom* $\vec{v}$*, a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli,* $v_0 = 0$ *jednak negativnoj vrednosti njene kinetičke energije* E_k.

Kinatička energija se naziva i imenom ''živa sila''.

Potencijalna energija

Za sve sile koje imaju funkciju sile $U(\vec{r})$ ili $U(x,y,z)$ možemo da napišemo da je sila $\vec{F}(\vec{r})$ ili $\vec{F}(x,y,z)$ gradijent te skalarne funkcije u obliku:

$$\vec{F} = grad\,U(\vec{r}).$$

Kako je:

$$(\vec{F},d\vec{s}) = (gradU,d\vec{r}) = dU$$

to je rad te sile $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$ je:

$$\int_{s_0}^{s}(\vec{F},d\vec{s}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}(gradU,d\vec{r}) = \int_{U_0}^{U}dU = U - U_0 = -E_p$$

*Iz poslednje relacije sledi **zaključak**: Rad sile* $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$, koja ima funkciju sile $U(\vec{r})$, *na stvarnom putu pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* m *koja se kreće brzinom, jednak negativnoj vrednosti njene potencijalne energije* E_p *sa tačnošću do jedne aditivne konstante.*

Rad sila otpora veza

Za slučaj neidealnih veza zaključili smo da ukupna sila otpora veza $\vec{F}_w$ ima dve komponete normalnu $\vec{F}_{wN} = \lambda\, grad\, f(\vec{r})$ i tangencijalnu $\vec{F}_{wT}$ za čije definisanje su nam potrebni i eksperimentalni podaci (naprimer za silu trenja - koeficijent trenja μ).

Rad ukupne sile otpora veza $\vec{F}_w$, koja ima dve komponete, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$, je:

$$A^{\vec{F}_w}\int_{s_0}^{s}\left(\vec{F}_w, d\vec{s}\right)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\left(\vec{F}_{wT}+\lambda\, grad\, f(\vec{r}), d\vec{r}\right)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\left(\vec{F}_{wT}, d\vec{r}\right)$$

jer je jednačina veze $f(\vec{r})=0$*, pa je:*

$$A^{\vec{F}_{wN}}\int_{s_0}^{s}\left(\vec{F}_{wN}, d\vec{s}\right)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\left(\lambda\, grad\, f(\vec{r}), d\vec{r}\right)=f(\vec{r})-f(\vec{r}_9)=0$$

Na osnovu prethodnog moćemo izvesti sledeće ***zaključke***:

Zaključak 1. Rad sile otpora $\vec{F}_{wN} = \lambda\, grad\, f(\vec{r})$ idelane geometrijske veze $f(\vec{r})=0$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ jednak je nuli.

Zaključak 2. Za odredjivanje rada tangencijalne komponete $\vec{F}_{wT}$ sile otpora za čije definisanje su nam potrebni i eksperimentalni podaci mora se odredjivati u svakom konkretnom slučaju pojedinačno. Ta tangencijalna komponenta $\vec{F}_{wT}$ se najčešće javlja kao funkcija brzine $\vec{v}$ materijalne tačke te je za odredjivanje rada te komponente sile otpora najčešće potrebno poznavati i konačne jednačine kretanje ili druge relacije pomoću kojih je moguće odrediti brzinu u funkciji položaja pokretne materijalne tačke.

Rad sila otpora proporcionalne brzini

Rad sile otpora proporcionalne brzini $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ je:

$$A^{\vec{F}_{wT}}\int_{s_0}^{s}\left(\vec{F}_{wT}, d\vec{s}\right)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\left(-b\vec{v}, d\vec{r}\right)=-b\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\left(\vec{v}, d\vec{r}\right)$$

Formulacija principa rada

$$\sum_{i=1}^{i=N}\Delta A^{\vec{F}_i}=0$$

$$\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_F+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i}, \Delta\vec{r}_i\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_F+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i}, \delta\vec{r}_i\right)=0$$

Newton-ovi principi

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основаниимеханики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djutić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
.