DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VII.3. DEVETA NEDELJA

Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VIII. DESETA NEDELJA

Dinamika krutog tela

Osnovni pojmovi dinamike krutog tela: Momenti inercije mase tela. Definicije. Steiner-ova teorema. Elipsoid inercije. Translatorno kretanje tela. Količina kretanja tela. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija tela.

XI.1. JEDANAESTA NEDELJA

Obrtanje tela oko nekretne ose. Moment količine kretanja. Diferencijalna jednačina kretanja. Kinetička energija. Rad. Snaga.
Fizičko klatno. Kinetički pritisci.

XI.2. DVANAESTA NEDELJA

Ravansko kretanje tela. Količina kretanja. Moment količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija. Uslov kotrljanja bez klizanja.

Obrtanje tela oko nepkretne tačke. Kinetička energija. Moment količine kretanja. Euler-ove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. Regularna precesija.

XI.3 TRINAESTA NEDELJA

Sudar. Centralni upravni sudar. Centar udara. Charpy-jevo klatno.
Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog. Kelijev problem. Jednačina Ciolkovskog.

Dinamika materijalnog sistema
Dinamika sistema materijalnih tačaka
Dinamika krutog tela

Uvod

Na slici je prikazan sistem materijalnih taćaka koji sadrži veći broj materijalanih tačaka, ali taj broj je konačan. Onda kažemo da se radi o *diskretnom materijalnom sistemu sa konačnim brojem materijalnih tačaka* koje su na konačnim rstojanjima ili o sistemu materijalnih tačaka.

Ako su mase materijalnih tačaka male – elemtarne i nalaze se na malim rastojanjima i rasporedjene su kontinualno onda kažemo da se radi o *neprekidnom sistemu - kontinuumu*. Oblast prostora ispunjena neprekidno rasporedjenom materijom sastavljenom od malih čestica elementarnih masa na bliskim medjusobnim rastojanjima čini *materijalno telo.* Ako to telo pod dejstvom sila ne menja veličinu i oblik onda je to model *krutig tela* čije kretanje izučavamo u dinamici. U suprotnom, ako telo pod dejstvom sila menja oblik i zapreminu onda se radi o deformabilnom telu – čvrstom telu. i sistem materijalnih tačaka može biti krut, ako se medjusobna rastojanja tačaka ne menjaju.

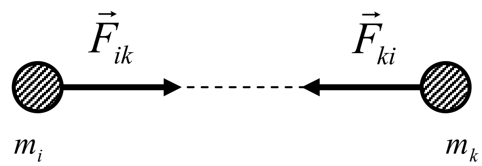
Materijalni sistem može da bude obrazovan i od materijalnih tačaka i od materijalnih tela.

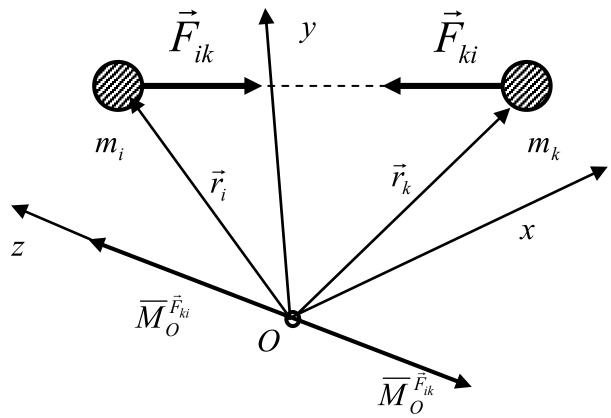
Do sada smo proučili *vektorske i skalatnu invarijantu jedne* pokretne materijalne tačke, kao i odgovarajuće *principe,* kao i *teoreme o kretanju jedne materijalne tačke*. Ta znanja ćemo primeniti i na *sistem materijalnih tačaka* vodeći računa da se materijalni sistem sastoji iz sistema materijalnih tačaka konačnih ili beskonaćno malih masa, koje su na malim rastojanjima.

Može se koristiti i sledeća definicija materijalnog sistema: *Pod materijalnim sistemom podrazumevamo skup materijalnih tačaka u kome kretanje jedne tačke zavisi od kretanja svih ostalih tačaka.*

Unutrašnje i spoljašnje sile. Sile koje dejstvuju na slobodan sistem delimo u dve grupe: spoljašnje i unutrašnje. *Sile koje dejstvuju izmedju masa pojedinih materijalnih tačaka sistema su unutrašnje sile*. Na osnovu trećeg *Newton*-ovog aksimoma (dejstva i protivdejstva) materijalna tačka mase m_i dejstuje na materijalnu tačku mase m_k dejstvuje silom $\vec{F}_{ik}$ koja pada u pravac spojne prave materijalnih tačaka sa smerom ka materijalnoj tački mase m_i; Medjutim materijalna tačka mase m_k dejstvuje silom $\vec{F}_{ki}$ na materijalnu tačku mase m_i. Ove dve sile su po intenzitetu jednake, ali su po smerovioma suprotnosmerne. Njihovo uzajamno dejstvo se poništava. Vektorski to možemo da napišemo:

$$\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ik} = 0$$





Kako se unutrašnje sile uvek javljaju u parovima – dejstva i protivdejstva, to se njihova dejstva uzajamno poništavaju. Na osnovu toga sledi da je zbir svih unutrašnjih sila sistema jednak nuli.

$$\vec{F}_{ru} = \sum_{k=1}^{k-N}\sum_{1=1}^{i=N} \vec{F}_{ik} = 0$$

Možemo da iskažemo sledeći zaključak*: Vektorski zbir svih unutrašnjih sila (glavni vektor unutrašnjih sila) sistema materijalnih tačaka uvek je jednak nuli, bilo da materijalne tačke miruju, bilo da se kreću.*

Neka je položaj materijalnih tačaka m_i i m_k odredjen vektorima položaja $\vec{r}_i$ i $\vec{r}_k$ u odnosu na nepokretnu tačku O koju smo izabrali za momentni pol. Momenti para unutrašnjih sila $\vec{F}_{ik}$ i $\vec{F}_{ki}$ za momentnu tačku u polu O su jednaki, ali su suprotnog smera:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_{ik}} = -\vec{M}_O^{\vec{F}_{ki}} \qquad \vec{M}_O^{\vec{F}_{ik}} = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] = \left[\vec{r}_k + r_{ki}, -\vec{F}_{ki}\right] = -\left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right] = -\vec{M}_O^{\vec{F}_{ki}}$$

pa sledi da je:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_{ik}} + \vec{M}_O^{\vec{F}_{ki}} = 0$$

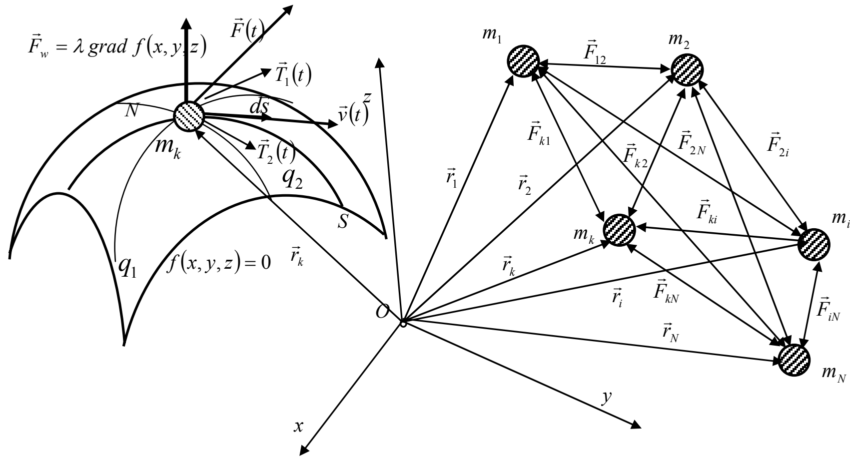
Vektorski zbir momenata svih unutrašnjih sila materijalnog sistema (glavni moment unutrašnjih sila) za proizvoljnu momentnu tačku jednak je nuli.

$$\vec{\mathfrak{M}}_O = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k-1}^{N} \vec{M}_O^{\vec{F}_{ik}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] = 0$$

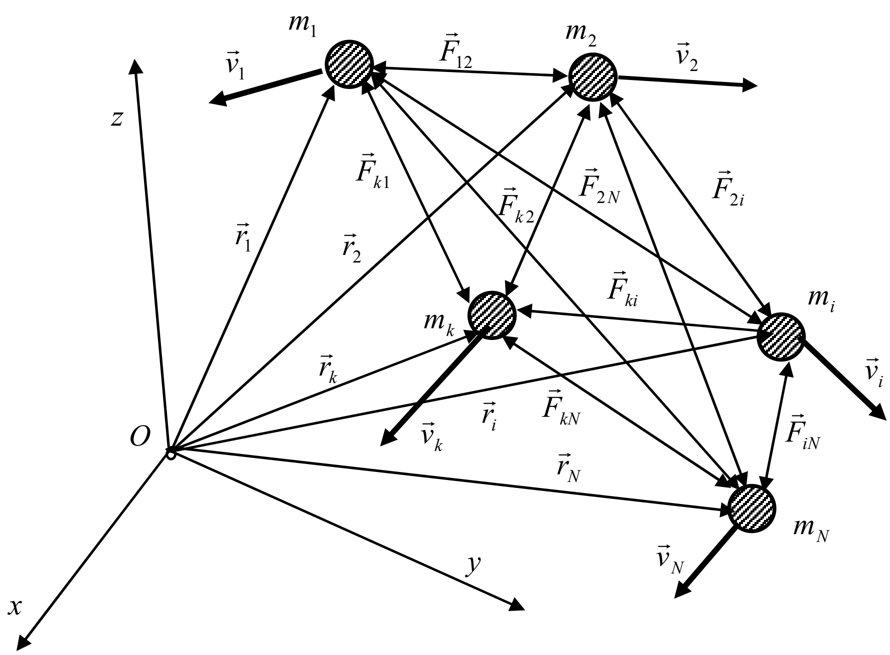
Sile koje dejstvuju na materijalne tačke posmatranog maretijalnog sistema, a potiču od materijalnih tačaka i masa drugih sistema nazivamo *spoljašnjim silama*.

Sve što smo govorili o vezama koje dejstvuju na jednu materijalnu tačku važi i ovde, ali se moraju analizirati sile otpora veza za svaku pojedinačnu tačku i za svaku materijalnu tačku pojedinačno odrediti broj stepeni slobode kretanja. Broj stepeni slobode kretanja sistema se odredjuje kao zbir svih stepeni slobode kretanja pojedinačnih tačaka sistema. Ako sistem ima N materijalnih tačaka i sve su slobodne od veza, onda takav sistem ima $3N$ stepeni slobode kretanja i potrebno je toliko koordinata za odredjivanje položaja svake od materijalnih tačaka sistema. To je zato jer je položaj svake od materijalnih tačaka u prostoru odredjen sa po tri koordinate.

Ako materijalne tačke nisu slobodne, nego na njih dejstvuju stacuonarne holonomne veze, onda se se broj stepeni slobode kretanja odredjuje kao razlika izmedju broja koordinata potrebnih za odredjivanje položaja svih materijalnih tačaka sistema i ukupnog broja veza koje dejstvuju na materijalne tačke (zbir broja veza u pojedinačnom dejstvu na materijalne tačke sistema). Naprimer, ako je broj tih stacionatnih konačnih geopmetrijskih, ili diferencijalnih integrabilnih veza s to je broj stepeni slobode kretanja sistema $n = 3N - s$. Sada na isti način kao i kod jedne materijalne tačke od $3N$ koordinata biramo n koordinata za generalisane, a ostale koordinate materijalnih tačaka izražavamo pomoću generalisanih koordinata sistema koristeći jednačine veza. Ako su veze idealne, onda se otpori veza odredjuju pomoću gradijenta funkcije veze i Lagrange-ovog množioca veze $\vec{F}_{wi} = \lambda_i grad\ f_i(x, y, z)$.



Osnovna odredjenja dinamike sistema materijalnih tačaka



Skup materijalnih tačaka u kome kretanje i položaj svake materijalne tačke zavisi od položaja i kretanja ostalih tačaka toga skupa čini pokretni *sistem materijalnih tačaka ili materijalni sistem u kretanju*.

I. OSNOVNA ODREDJENJA

4.1. Osnovna odredjenja.

Da bi smo odredili bitne pojmove i odredjenja, kao i invarijante mehanike sistema materijalnih tačaka, koristimo već uvedene, prilikom izučavanja kretanja jedne materijalne tačke. I za materijalni system sastavlčjen od konačnog broja materijalnih tačaka, osnovna odredjenja su: ***definiciju brzine i definicija impulsa kretanja***, kao i ***definicija ubrzanja i definicija inercijalne sile*** [1], [2] za jednu materijalnu tačku, primenjujući je na svaku od materijalnih tačaka sistema pojedinačno. .

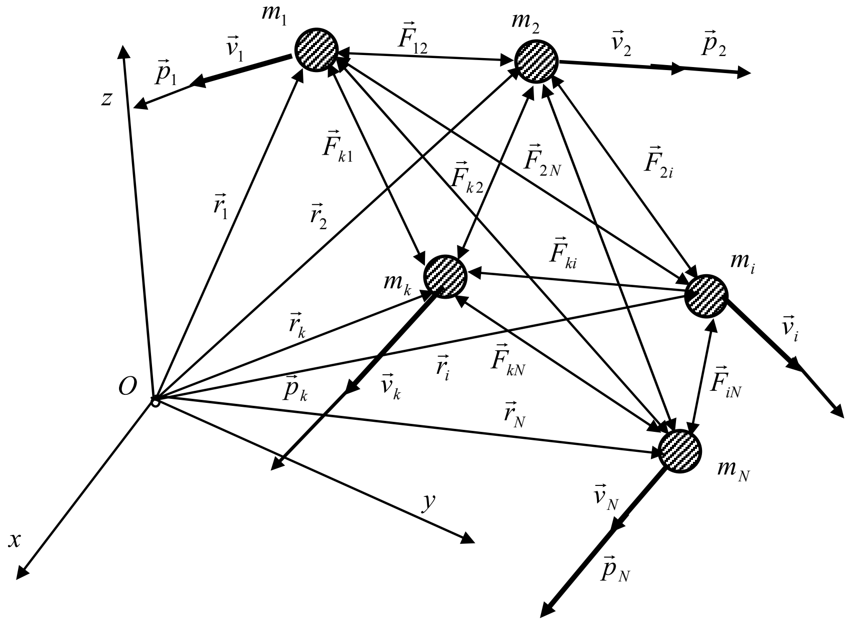
Definicija 1. *Brzina* $\vec{v}_i(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i, *mase* m_i, $i = 1,2,3,...,N$ *čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t, *odredjen vektorom položaja* $\vec{r}_i(t)$ *je granična vrednost odnosa rastojanja dva njena bliska položaja* $N_i(t)$ *i* $N_i(t+\Delta t)$ *odredjena vektorima položaja* $\vec{r}_i(t)$ *i* $\vec{r}_i(t+\Delta t)$ *i intervala vremena* Δt, *za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:*

$$\vec{v}_i(t) \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_i(t+\Delta t) - \vec{r}_i(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}$$

Znači da je brzina $\vec{v}_i(t)$ i - te materijalne tačke, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorom položaja $\vec{r}_i(t)$ po definiciji jednaka prirodnom izvodu vektora položaja $\vec{r}_i(t)$ po vremenu t. Brzina svake od materijalnih tačaka u sistemu je znači vektor, i kao takav je invarijantan pri transformaciji koordinata iz jednog u drugi sistem koordinata. Definicijom brzine uspostavlja se *veza izmedju rastojanja i vremena*. Dimenzija intenziteta brzine je:

$$\dim|\vec{v}| = LT^{-1}$$

gde smo sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znači da je jedinica brzine $[m\sec^{-1}]$.



Definicija 2. *Impuls kretanja* $\vec{p}_i(t)$ *ili* $\vec{K}_i(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i*, mase* $m_i, i = 1,2,3,...,N$*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položja* $\vec{r}_i(t)$ *je proizvod njene mase* m_i *i vektora* $\vec{v}_i(t)$ *njene brzine u tom trenutku vremena*:

$$\vec{p}_i(t) \overset{def}{=} m_i \vec{v}_i(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}_i(t) \overset{def}{=} m_i \vec{v}_i(t)$$

$$\vec{p}_i(t) \overset{def}{=} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \qquad \text{ili} \qquad \vec{K}_i(t) \overset{def}{=} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}$$

Znači da je impuls kretanja $\vec{p}_i(t)$ *ili* $\vec{K}_i(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i*, mase* $m_i, i = 1,2,3,...,N$, vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom impulsa kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza izmedju mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta impulsa kretanja materijalne tačke je:

$$\dim|\vec{p}(t)| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znaći da je jedinica impulsa $[kg\, m \sec^{-1}]$ ili $[N \sec]$.

Impuls kretanja materijalnog sistema koji se sastoji od N *pokretnih materijalnih tačaka* N_i*, masa* $m_i, i = 1,2,3,...,N$*, čiji su položaji u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjeni vektorima položja* $\vec{r}_i(t)$ *je jednak zbiru proizvoda odgovarajućih masa* m_i *i vektora* $\vec{v}_i(t)$ *odgovarajućih brzina u tom trenutku vremena ili jednak vektorskom zbiru impulsa kretanja pojedinih materijalnih tačaka sistema. To možemo napisati i sledećom relacijom:*

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{K} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i(t)$$

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t) \overset{def}{=} \sum_{i=`}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \qquad \text{ili} \qquad \vec{K} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}$$

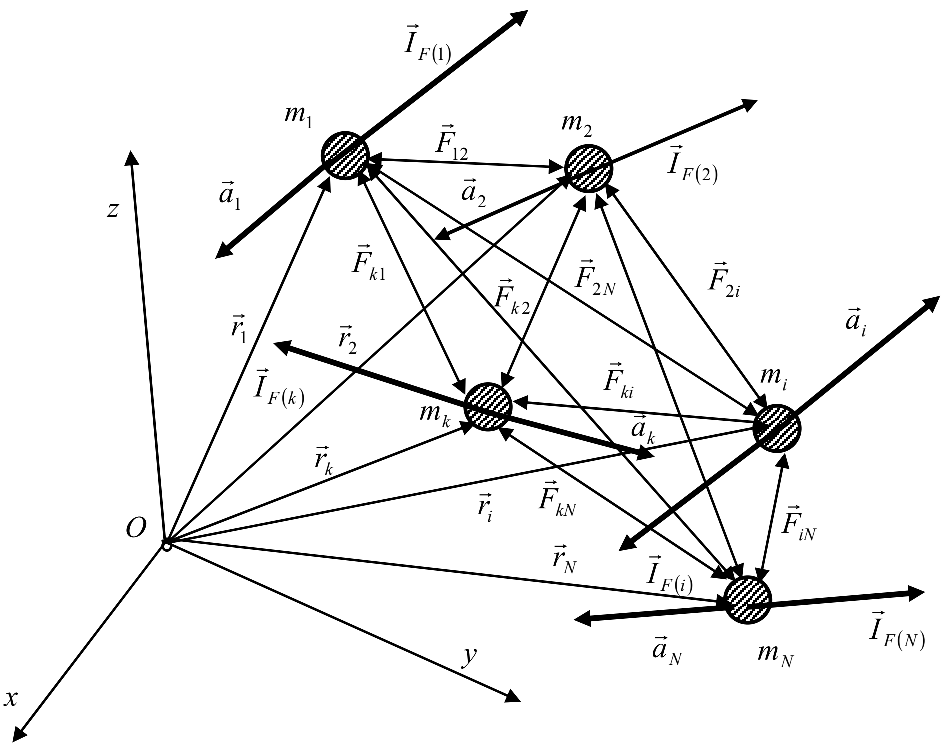
Definicija 3. *Ubrzanje* $\vec{a}_i(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i *, mase* m_i *,* $i = 1,2,3,...,N$ *, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t *, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}_i(t)$ *je granična vrednost odnosa razlike njenih brzina* $\vec{v}_i(t+\Delta t)$ *i* $\vec{v}_i(t)$ *dva njena bliska položaja* $N_i(t)$ *i* $N_i(t+\Delta t)$ *odredjena vektorima položaja* $\vec{r}_i(t)$ *i* $\vec{r}_i(t+\Delta t)$ *i intervala vremena* Δt *, za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:*

$$\vec{a}_i(t) \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_i(t+\Delta t) - \vec{v}_i(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt}$$

Znači da je ubrzanje $\vec{a}_i(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i *, mase* m_i *,* $i = 1,2,3,...,N$,, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , po definiciji jednako prirodnom izvodu vektora njene brzine $\vec{v}_i(t)$ po vremenu t . Ubrzanje je vektor i kao takav je invarijantan. Definicijom ubrazanja uspostavlja se veza izmedju rastojanja i vremena. Dimenzija ubrzanja je:

$$\dim|\vec{a}| = LT^{-2}$$

gde smo sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jednica $[\sec]$. Znači da je jedinica ubrzanja $[m \sec^{-2}]$.



Definicija 4. *Sila inercije* $\vec{I}_{F(i)}(t)$ i *-te materijalne tačke* N_i *, mase* m_i *,* $i = 1,2,3,...,N$ *,, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t *, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}_i(t)$ *je proizvod njene mase* m_i *i suprotno usmerenog vektora njenog ubrzanja* $\vec{a}_i(t)$ *u tom trenutku vremena:*

$$\vec{I}_{F(i)}(t) \overset{def}{=} -m_i \vec{a}_i(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_{F(i)}(t) \overset{def}{=} -m_i \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt}$$

Znači da je sila inercije $\vec{I}_{F(i)}(t)$ i *-te* materijalne tačke vektor i kao takav je *invarijantan* u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom sile inercije kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza izmedju mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta sile inercije kretanja materijalne tačke je:

$$\dim\left|\vec{I}_F\right| = MLT^{-2}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jednica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jednica $[\sec]$. Znači da je jedinica sile inercije $[kgm \sec^{-2}]$ ili $[N]$.

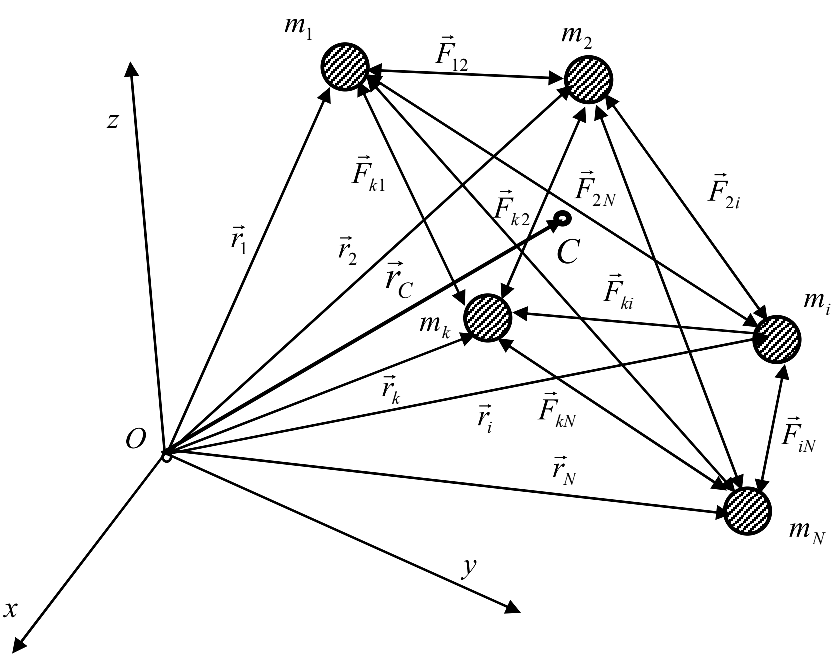
Rezultujuća sila inercije kretanja materijalnog sistema koji se sastoji od N *pokretnih materijalnih tačaka* N_i, *masa* $m_i, i = 1,2,3,...,N$, *čiji su položaji u prostoru, u trenutku vremena* t, *odredjeni vektorima položja* $\vec{r}_i(t)$ *je jednak zbiru proizvoda odgovarajućih masa* m_i *i suprotno usmerenog vektora* $\overline{a}_i(t)$ *odgovarajućih ubrzanja materijalnih tačaka u tom trenutku vremena ili jednaka vektorskom zbiru sila inercije pojedinih materijalnih tačaka sistema. To možemo napisati i sledećom relacijom:*

$$\vec{I}_F = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_{F(i)}(t) \overset{def}{=} -\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i(t) \qquad \text{ili} \qquad \vec{I}_F = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_{F(i)}(t) \overset{def}{=} -\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt}$$

Na osnovu preprincipa kauzalne odredjenosti [1], rastojanja, njihove promene, brzina, ubrzanje, impuls kretanja i drugi činioci kretanja materijalne taćke jednoznačno su odredjeni u toku vremena, kako u budućnosti, tako i u prošlosti, i to sa onolikom tačnošću koliko su nam poznate odrednice kretanja u bilo kom odredjenom trenutku vremena.

Na osnovu preprincipa invarijantnosti kretanje i svojstva kretanja materijale tačke ne zavise od forme iskaza, jer utvrdjena istina o kretanju i zapisana jednom u odredjenom obliku nekog jezika jednako je sadržana u zapisu drugog oblika ili drugog pisma. Ovo znači da definisano kretanje materijalne tačke možemo izražavati u različitim sistemima koordinata, i označavati odredjenim realnim brojevima za masu, vreme i rastojanje, ali da su pri tome sva tri realiteta invarijante

Središte masa materijalnog sistema



Ukupna masa materijalnog sistema koji se sastoji od N *materijalnih tačaka, masa* $m_i, i = 1,2,3,...,N$ *je:*

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Vektor položaja $\vec{r}_i(t)$, i *-te materijalne tačke* N_i, *mase* $m_i, i = 1,2,3,...,N$ *odredjuje njen položaj u prostoru, u trenutku vremena* t, *a u odnosu na nepokretni pol u* O. *Sa* $\vec{P}_O$ *označimo polarni linearni moment masa materijalnog sistema koji je jednak zbiru polarnih linearnih momenata masa materijalnih tačaka* $\vec{P}_{Oi} = m_i \vec{r}_i$ *za isti pol te možemo da napišemo:*

$$\vec{P}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \vec{r}_C \sum_{i=1}^{N} m_i$$

gde smo uveli oznaku $\vec{r}_C$ koja predstavlja vector položaja tačke C koju ćemo nazvati *središte sistema materijalnih tačaka ili centar inercije. Vektor položaja* $\vec{r}_C$ dobijamo kao količnik *polarnog linearnog momenta masa materijalnog sistema* $\vec{P}_O$ *i ukupne mase materijalnog sistema:*

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Proizvod $M\vec{r}_C$ predstavlja linearni moment masa sistema za isti pol kada je celokupna masa materuijalnog sistema skoncentrisana u središtu sistema C kao da je jedna materijalna tačka mase jednake ukupnoj masi sistema.

Na osnovui prethodnog možemo formulisati sledeći iskaz:

Polarni linearni moment celokupne mase materijalnog sistema sažete u njegovom središtu C *kao da je system materijalna tačka, jednak je vektorskom zbirupolarnih linearnih momenata svih masa materijalnih tačaka sistema za isti pol* O.

Kada je pol u središtu sistema masa tada je polarni linearni moment jednak nuli.

Ako diferenciramo po vremenu vektor položaja središta sistema masa dobijamo brzinu $\vec{v}_C$ središta sistema masa:

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{p}}{M}$$

Sada možemo da napišemo:

$$\vec{p} = M\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

što predstavlja impuls kretanja materijalnog sistema sa brzinom središta sistema masa materijalnog sistema.

Ako još jedamput diferenciramo po vremenu vektor položaja središta sistema masa dobijamo ubrzanje $\vec{a}_C$ središta sistema masa:

$$\vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_{F(i)}}{M} = \frac{\vec{I}_F}{M}$$

Sada možemo da napišemo da je sila inercije sistema materijalnih tačaka:

$$\vec{I}_F = -M\vec{a}_C = -\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_{F(i)}$$

i vidimo da je jednaka vektorskom zbiru svih pojedinačnih sila inercija $\vec{I}_{F(i)}(t) \overset{def}{=} -m_i \vec{a}_i(t)$, koje potiču od pojedinačnih materijalnih tačaka sistema, koje se kreću ubrzanjima $\vec{a}_i$, a imaju mase m_i, odnosno sili inercije koju bi imala materijalna tačka mase $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ jednake masi celog sismeta, a kretala se ubrzanjem $\vec{a}_C$ središta sistema materijalnih tačaka. Znači, to je sila inercije one materijalne tačke, koju dobijamo kao kada je celokupna masa sistema materijalnih tačaka skoncentrisana (sažeta) u središtu sistema i kao da se kreće ubrzanjem $\vec{a}_C$ središta sistema materijalnih tačaka.

Imajući u vidu ovaj i prethodni zaključak, koji se odnose na *impuls kretanja* $\vec{p} = M\vec{v}_C$ i *silu inercije* $\vec{I}_F = -M\vec{a}_C$ *središta sistema materijalnih tačaka*, i njihovu vezu sa brzinom $\vec{v}_C$ i ubrzanjem $\vec{a}_C$ središta sistema materijalnih tačaka, i modelom materijalne tačke mase jednake skupljenoj (sažetoj) masi sistema $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ u središte sistema C, koje je odredjeno vektorom položaja $\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$, to sve principe, teoreme i leme mehanike, kao i vektorske i skalarne jednačine dimnamike, koje smo izveli za kretanje i dinamičku ravnotežu materijalne tačke možemo primeniti i na *reprezentativnu materijalnu taćku* u srediđtu sistema - model sistema materijalnih tačaka u vidu te reprezentativne materijalne tačke.

Isto tako, ako svaku od materijalnih tačaka N_i, masa m_i, pojedinačno izdvojimo iz sistema i posmatramo je kao poseban system od jedne materijalne tačke, a pri tome uticaj odstranjenog dela sistema (svih ostalih tačaka sistema) apstrahujemo (zamenimo) silama i vezama medjudejstva izdvojene pojedinačne materijalne tačke N_i i ostalih materijalnih tačaka N_k, $k = 1,2,3,...,N;\ k \neq i$ to možemo primeniti sve principe, teoreme i leme mehanike, kao i vektorske i skalarne jednačine dimnamike, koje smo izveli za kretanje jedne materijalne tačke, slobodne od veza ili podvrgnute vezama, zavisno od apstrahovanog uticaja ostalog dela sistema. Naravno kao i u svakom konkretnom zadatku treba imati specifičnosti pri tome, a to je da sve dobijene jednačine dinamičke ravnoteže pojedinih materjalnih tačaka i matematičke relacije će biti spregnuti sa kinetičkim parametrima i vektorskim skalarnim invarijalntama sa svim ostalim materijalnim tačkama sistema. Broj tih spregnutosti se može smanjiti odgovarajućim izborom koordinatnih sistema u kojima će se pisati vektorske i skalarne jednačine dinamike pojedinih materijalnih tačaka, a u nekim specijalnim slučajevima linearnih sistema, pa i nekih nelinearnih sistema možemo izborom pogodnih sistenma koordinata dobiti čak i sasvim nezavisne jednačine kretanja (naprimer oscilatorni sistem materijalnih tačaka sa linearnim vezama, i n generalisanih koordinata, izborom koordinatnog sistema glavnih koordinata, se može predstaviti modelom - sistemom n parcijalnih harmonijskih oscilatora, pri čemu svi nezavisni jedan od drugog).

Teoreme mehanike sistema materijalnih tačaka

Pod pojmom ***teorema mehanike*** ovde ćemo podrazumevati *matematičko tvrdjenje opšteg značenja o kretanju* materijalnih sistema čija se *istinitost dokazuje na osnovu preprincipa, principa mehanike, osnovnih i posledičnih definicija i zakona dinamike.*

Teorema o promeni impulsa (količine) kretanja

Osnovnim odredjenjem uveli smo vektorsku invarijantu dinamike impuls kretanja, koji smo definisali sledećom definicijom:

Potražimo sada izvod vektorske invarijante $\vec{p}(t)$ impulsa kretanja ili količine kretanja sistema materijalnih tačaka:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{a}_i(t) = -\vec{I}_F = M\vec{a}_C$$

Vidimo da je prvi izvod po vremenu impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ sistema materijalnih tačaka nepromenljive mase, jednak rezultujućoj sili inercije $\vec{I}_F$ sa promenjenim smerom, ili je jednak rezultanti aktivnih sila $\vec{F}_R(t)$ koje dejstvuju na materijalni sistem, pa možemo da pišemo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{a}_i(t) = -\vec{I}_F = M\vec{a}_C = \vec{F}_R = \sum_{i=1}^{K} \vec{F}_i$$

Odnosno:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = M\vec{a}_C = \vec{F}_R(t)$$

Prvi izvod impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ sistema materijalnih tačaka, nepromenljive mase, *po vremenu jednak je vektirskom zbiru svih sila* $\vec{F}_R(t)$ *koje dejstvuju na materijalni sistem.*

Diferencijal *impulsa (količine) kretanja* $d\vec{p}(t)$ sistema materijalnih tačaka jednak je :

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}_R(t)dt = d\vec{K}_F(t)$$

gde smo sa $\vec{K}(t)$ označili *impuls sile*. Ako prethodnu diferencijalnu relaciju integralimo, za *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$, dobijamo sledeći izraz:

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \int_0^t \vec{F}(t)dt$$

`Kako je:

$$\vec{p}(t) = M\vec{v}_C(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t)$$

$$\vec{p}(0) = M\vec{v}_C(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(0) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(0)$$

to sledi i:

$$\vec{K}_F(t) = \sum_{i-1}^{N} \left[\vec{p}_i(t) - \vec{p}_i(0)\right] = M\left[\vec{v}_C(t) - \vec{v}_C(0)\right] = \int_0^t \vec{F}_R(t)dt$$

Priraštaj količine kretanja (impulsa kretanja) $\Delta\vec{p}(t)$ *sistem pokretnih materijalnih tačaka za konačni vremenski razmak* Δt *jednak je impulsu* $\vec{K}_F(t)$ *rezultujuće sile* $\vec{F}_R(t)$, *koja dejstvuje na materijalni sistem u tom vremenu.*

Dimenzije količine kretanja (impulsa kretanja) $\vec{p}(t)$ *i impulsu* $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}_R(t)$*, koja dejstvuje na materijalni sistem u tom vremenu su iste.* Dimenzija intenziteta impulsa $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}_R(t)$*, koja dejstvuje na materijalni sistem je*:

$$\dim\left|\vec{K}_F(t)\right| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jednica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znaći da je jedinica impulsa sile $\left[kg\, m \sec^{-1}\right]$ ili $[N \sec]$.

Pošto je impuls sile $\vec{K}_F(t)$ *vektorski integral, to se on u opštem slučaju ne poklapa sa pravcem sile* $\vec{F}_R(t)$.

U slučaju da je sila konstantna $\vec{F}_R(t) = \overrightarrow{const}$ *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$ *iako vektorski integral, je kolinearan sa silom.*

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = M[\vec{v}_C(t) - \vec{v}_C(0)] = \int_0^t \vec{F}_R dt = \vec{F}_R(t - t_0)$$

Ako na materijalni sistem ne dejatvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila koje dejstvuju na materijalni sistem i otpora veza koje dejstvuju na tu tačku jednak nuli, onda sledi da je:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_R(t) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = M\vec{a}_C = 0 \;\; \vec{p}(t) = const \Rightarrow \vec{p}(t_0) = \vec{p}(t) = const \Rightarrow$$

$$M\vec{v}_C(t_0) = M\vec{v}_C(t) = const$$

Na osnovu prethodne relacije možemo definisati sledeću lemu.

Lema o održanju impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka: *Ako na sistem materijalnih tačaka ne dejstvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila, koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka i otpora veza koje dejstvuju na tačke tog sistema jednak nuli, tada je impuls kretanja sistema materijalnih tačaka nepromenljiv u toku kretanja i jednak vrednosti na počeku kretanja sistema,* $\vec{p}(t_0) = \vec{p}(t) = M\vec{v}_C = \vec{c}onst$. *Ako je početna brzina* $\vec{v}_C$ *središta sistema materijalnih tačaka bila jednaka nuli, odnosno ako je središte sistema materijalnih tačaka bilo u mirovanju, ona će ostati u miru.*

Ovo je i *lema o održanju količine kretanja sistema materijalnih tačaka.*

Sada možemo da formuišemo i sledeći zaključak: *Ako na sistem materijalnih tačaka nepromenljive mase ne dejstvuju sile i ne dejstvuju veze, te se ne javljaju otpori veza, ili pak ako je zbir aktivnih sila koje dejstvuju na materijalni sistem i otpora veza, koje dejstvuju na taj sistem jednak nuli, tada se središte* C *sistema materijalnih tačaka kreće ravnomerno i pravolinijski u pravcu početne brzine, istom tom brzinom* $\vec{v}_C(t_0) = \vec{v}_C(t) = \vec{c}onst$. ***To je kretanje središta sistema materijalnih tačaka po ineerciji.***

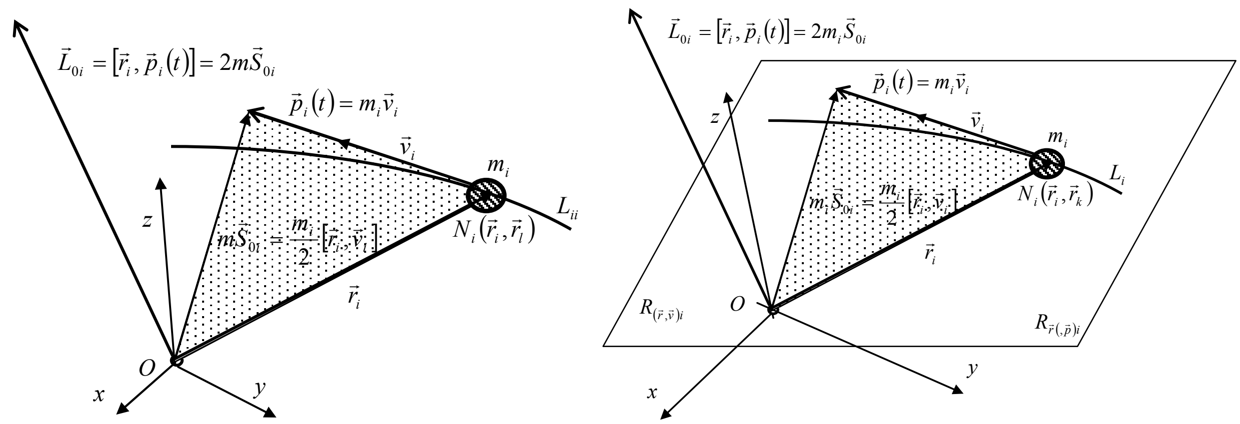
Ako je početna brzina središta sistema materijalnih tačaka bila jednaka nuli, odnosno, $\vec{v}_C(t_0) = \vec{v}_C(t) = 0$, odnosno *ako je središte sistema materijalnih tačaka bilo u mirovanju, ona će i ostati u miru.*

Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja

Definicija: Pod ***momentum impulsa (količine) kretanja*** i ***-te materijalne tačke*** N_i***, mase*** $m_i, i = 1,2,3,...,N$ *sistema materijalnih tačaka podrazumevamo moment vektora impulsa kretanja te* i *-te materijalne tačke za jednu stalnu tačku* O *- pol u toj stalnoj tački. To je vektorski proizvod izmedju vektora položaja* i *-te materijalne tačke* $\vec{r}_i(t)$ *u odnosu na momentnu tačku - pol* O *i vektora impulsa kretanja te* i *-te materijalne tačke* $\vec{p}_i(t)$:

$$\vec{L}_{O(i)}(t) \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i(t), \vec{p}_i(t)] \qquad \text{ili} \qquad \vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i].$$

Moment impulsa kretanja i *-te materijalne tačke* $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ *za pol u stalnoj tački nazivamo i* ***kinetičkim momentum,*** *a koristi se i naziv* ***zamah*** i *-te materijalne tačke materijalnog sistema za pol u tački* O. Na narednim slikama je dat grafički, geometrijski prikaz *vektora momenta impulsa kretanja* i *-te materijalne tačke* $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$*, za pol u stalnoj tački* O*, koji je upravan na ravni koju čine vektor položaja* i *-te materijalne tačke* $\vec{r}_i(t)$ *u odnosu na momentnu tačku - pol* O *i vektor impulsa kretanja te* i *-te materijalne tačke* $\vec{p}_i(t)$*, a tu ravan smo obeležili sa* $R_{(\vec{r},\vec{p})i}$ *ili* $R_{(\vec{r},\vec{v})i}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $\vec{L}_{Oi}$ i */te materijalne tačke materijalnog sistema , za pol* O *i odgovarajućih kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti..*

Dimenzija *moment impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ *za pol u stalnoj tački,* odnosno *kinetičkog momenta,* odnosno *zamaha je:*

$$\dim\left|\vec{L}_O\right| \overset{def}{=} ML^2T^{-1}$$

dok je jedinica $\left[kgm^2 \sec^{-1}\right]$ *ili* $\left|Nm\sec\right|$ *ili* $\left[J\sec\right]$.

Kako je sektorska brzina $\vec{S}_{Oi} = \frac{1}{2}[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$ i*-te materijalne tačke za pol u stalnoj tački* O *to vektor momenta impulsa kretanja* i*-te materijalne tačke* $\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$, *za pol u stalnoj tački* O, *možemo napisati i u obliku dvostrukog proizvoda mase* i*-te pokretne materijalne tačke i vektora sektorske brzine te* i*-te materijalne tačke pomoću sledeće relacije (izraza):*

$$\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i] = 2m_i\vec{S}_{Oi}$$

Znači da je, *sektorska brzina* $\vec{S}_{Oi} = \frac{1}{2}[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$ i*-te materijalne tačke za pol u stalnoj tački* O, *pomnožena dvostukom masom pokretne* i *-te materijalne tačke jednaka vektoru momenta impulsa kretanja* i*-te materijalne tačke* $\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$, *za pol u toj stalnoj tački* O.

Moment impulsa kretanja materijalnog sistema od N materijalnih tačaka N_i, masa $m_i, i = 1,2,3,...,N$ za momentnu tačku u polu O jednak je vektorskom zbiru vektora momenata impulsa kretanja $\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ materijalnih tačaka koje čine taj sistem:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i] = 2\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{S}_{Oi}$$

Sada potražimo prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa kretanja pokretnog sistema materijalnih tačaka za pol u stalnoj tački O, *tako da dobijemo:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{N}[\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{v}_i, m_i\vec{v}_i] + \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, m_i\vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_i + \vec{F}_{wi} + \vec{\Phi}_i] = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{Oi}^{\vec{F}+\vec{F}_w+\vec{\Phi}} = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

odnosno

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

gde smo sa $\vec{\mathfrak{M}}_O = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ označili rezultujući moment svih sila $\vec{F}_i$, koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka za isti momentni pol u tački O.

Prethodna relacija važi i za slučaj kretanja materijalnog sistema u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu veza, pri čemu oznaka $\vec{F}_i$ uključuje rezultantu svih sila aktivnih i sila otpora veza koje dejstvuju na i -tu materijalnu tačku, ali ne i silu inercije.

Izvedena relacija $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathfrak{M}}_O$ je matematički iskaz ***leme o promeni momenta impulsa (količine) kretanja***, koju rečima možemo formulisati u sledećem obliku:

Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja sistema materijalnih tačaka: *Prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa (količine) kretanja sistema materijalnih tačaka nepromenljive mase,* $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \vec{\mathfrak{M}}_O$*, za pol u stalnoj tački* O *jednak je vektorskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na materijalni sistem za isti pol* O*, kao momentnu tačku.*

Možemo formulisati i sledeću lemu:

Izvod to vremenu zamaha sistema pokretnih materijalnih tačaka za nepokretni pol jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem, a za isti pol kao momentnu tačku.

Sada na osnovu relacije $\vec{L}_O = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{S}_{Oi}$ *tj. veze vektora momenta impulsa (količine) kretanja tj. zamaha sistema pokretnih materijalnih tačaka nepromenljive mase za pol u stalnoj tački* O, kinematičkih odrednica sektorskih brzina pojedinih materijalnih tačaka $\vec{S}_{Oi} = \frac{1}{2}[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$ *možemo da napišemo:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{S}}_{Oi} = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

Znači da je, *sektorsko ubrzanje* $\dot{\vec{S}}_{Oi} = \frac{1}{2}[\vec{r}_i, \vec{a}_i]$ *i-te materijalne tačke za pol u stalnoj tački* O*, pomnožena dvostukom masom pokretne* i *-te materijalne tačke jednaka izvodu vektora momenta impulsa kretanja* i*-te materijalne tačke* $\dot{\vec{L}}_{Oi} \overset{def}{=} 2m_i \dot{\vec{S}}_{Oi}$*, za pol u toj stalnoj tački* O*, odnosno momentu sila, spoljašnjih i unutrašnjih, koje dejstvuju na* ***i-tu*** *materijalnu tačku sistema za isti pol za koji se uzima to sektorsko ubrzanje.*

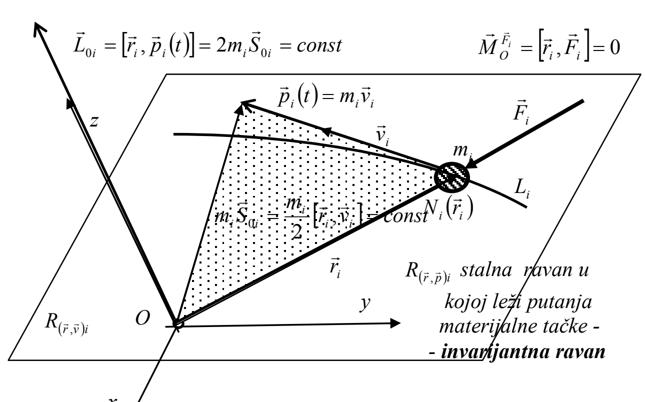
Ovaj iskaz predstavlja *lemu o površini*, jer *sektorska brzina* predstavlja *površinu* koju opisuje *u jedinici vremena, vektor položaja pokretne* i*-te materijalne tačke u odnosu na neki pol* O*, pri njenom kretanju.*

Prethodnu lemu možemo izraziti i na sledeći način:

Izvod po vremenu zamaha sistema pokretnih materijalnih tačaka za nepokretni pol jednak je vektorskom zbiru proizvoda dvostrukih masa sa njhovim sektorskim ubrzanjima.

Ako je moment sila, koje dejstvuju na i*- materijalnu tačku, jednak nuli za neku nepokretnu tačku – pol, onda je moment impulsa kretanja* $\vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ *za taj pol konstantan (nepromenljiv) u toku kretanja te tačke.*

$$\forall \quad \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \dot{\vec{L}}_{Oi} = 2m\dot{\vec{S}}_{Oi} = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M}_O^{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{Oi} = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i] = 2m_i\vec{S}_{Oi} = \vec{C}_i = const$$



Znači možemo da formulišemo ***sledeći zaključak****: Kada je moment sila koje dejstvuju na i -tu pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku jednak nuli, tada je i zamah kretanja i 'te materijalne tačke sistema za tu tačku konstantan.*

To je ***lema*** *o održanju* ***momenta impulsa (količine) kretanja*** *pokretne materijalne tačke.*

Grafička ilustracija prethodnog zaključka – leme prikazana je na prethodnoj slici. Kako je vektor zamaha kretanja i -te materijalne tačke, tj vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ vektorski proizvod vektora položaja i -te materijalne tačke $\vec{r}_i(t)$ u odnosu na momentnu tačku - pol O i vektora impulsa kretanja te i -te materijalne tačke $\vec{p}_i(t)$ i kao takav upravan na ravan koju obrazuju ta dva vektora $\vec{r}_i(t)$ i $\vec{p}_i(t)$, to u slučaju kada je moment $\vec{M}_O^{\vec{F}_i}$ sile $\vec{F}_i$, koja dejstvuje na pokretnu i -tu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku jednak nuli $\vec{M}_O^{\vec{F}_i} = 0$, ta ravn je *stalna ravan* i u njoj leži putanja i -te materijalne tačke. Znači da je putanja kretanja i -te materijalne tačke, u slučaju kada je *vektor momenta impulsa kretanja konstantan*, $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{C}_i = \vec{c}onst$, *ravanska kriva linija* koja leži u toj *stalnoj ravni*. Ta stalna ravan je *invarijantna ravan kretanja* i -te *materijalne tačke* i početna brzina leži u toj ravni, kao i sve brzine te pokretne materijalne tačke u toku njenog kretanja, kada je vektor momenta impulsa kretanja konstantan $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{C}_i = \vec{c}onst$. Naziv *invarijantna ravan kretanja materijalne tačke u* toj *stalnoj ravni* dao je znameniti francuski naučnik, tvorac *Nebeske mehanike Laplas (Pierre Simon Laplace, 1749 ' 1827* godine).

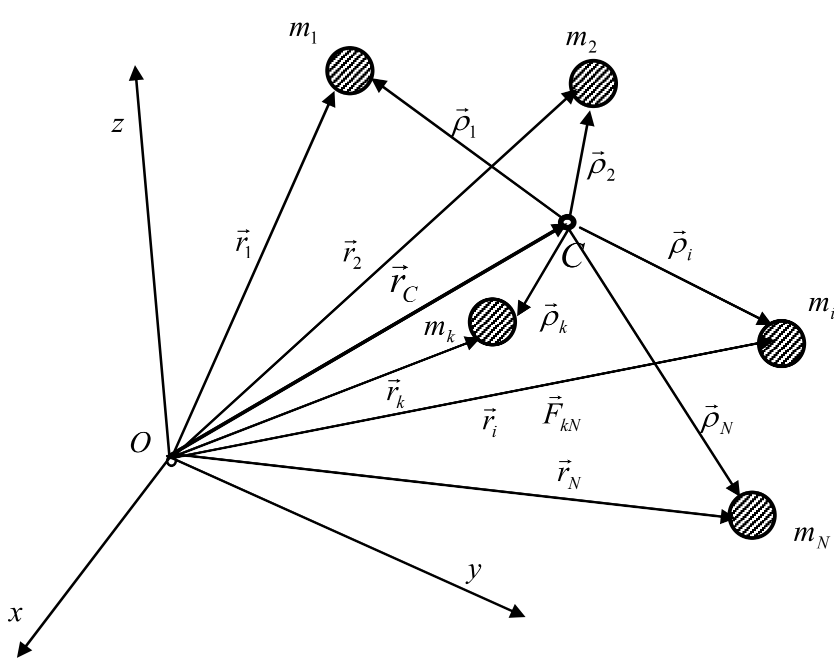
Jednačinu i *-te invarijantne ravni* dobijamo, skalarnim množenjem konstantnog *vektora momenta impulsa kretanja*, $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{C}_i = \vec{c}onst$ vektorom položaja materijalne tačke $\vec{r}_i(t)$, u obliku:

$$\left(\vec{r}_i, \vec{C}_i\right) = \left(\vec{r}_i, \vec{L}_{Oi}\right) = \left(\vec{r}_i, [\vec{r}_i, \vec{p}_i]\right) = 0$$

Jednačina invarijantne ravni u razvijenom obliku u Descartes-ovom sistemu koordinata, može da se napiše u obliku:

$$\left(\vec{r}_i, \vec{C}_i\right) = xC_{i1} + yC_{i2} + zC_{i3} = 0$$

gde su C_{ik}, $k = 1,2,3$ koordinate vektorske konstante $\vec{C}_i = C_{i1}\vec{i} + C_{i2}\vec{j} + C_{i3}\vec{k}$ kojoj je jednak *vektor momenta impulsa kretanja*, $\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{C}_i = \vec{c}onst$ u slučaju kada je moment $\vec{M}_O^{\vec{F}_i}$ sile $\vec{F}_i$, koja dejstvuje na i -tu pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku O jednak nuli $\vec{M}_O^{\vec{F}_i} = 0$.



Sa slike vidimo da je $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ te za moment impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka za pol u nepokretnoj tački možemo da pišemo:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{Oi} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_C, \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}_i, \vec{p}_i] = \left[\vec{r}_C, \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_C, \vec{p}] + \vec{L}_C$$

odnosno

$$\vec{L}_O = [\vec{r}_C, \vec{p}] + \vec{L}_C = \vec{L}_C + \vec{L}_O^{\vec{p}}$$

Moment impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka za neki pol O jednak je vektorskom zbiru momenta impulsa sistema materijalnih tačaka za središte sistema i momenta impulsa za isti pol.

Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka za neki pol O jednak je vektorskom zbiru momenta količine kretanja sistema materijalnih tačaka za središte sistema i momenta količine kretanja za isti pol.

Zamah sistema materijalnih tačaka za neki pol O jednak je vektorskom zbiru zamaha sistema materijalnih tačaka za središte sistema i zamaha količine kretanja za isti pol.

Sada diferencirajmo prethodni izraz za moment količine kretanja, te dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{L}}_C + [\dot{\vec{r}}_C, \vec{p}] + [\vec{r}_C, \dot{\vec{p}}] = \dot{\vec{L}}_C + [\vec{v}_C, \vec{p}] + [\vec{r}_C, \dot{\vec{p}}] = \dot{\vec{L}}_C + [\vec{r}_C, \dot{\vec{p}}] = \dot{\vec{L}}_C + [\vec{r}_C, \vec{F}_R] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

odnosno

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{L}}_C + [\vec{r}_C, \vec{F}_R] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

Iz poslednjeg izraza možemo dobiti sledeće:

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathfrak{M}}_O - [\vec{r}_C, \vec{F}_R] = \vec{\mathfrak{M}}_O - \vec{M}_O^{\vec{F}_{R(C)}}$$

gde je

$\vec{M}_O^{\vec{F}_{R(C)}} = [\vec{r}_C, \vec{F}_R]$ moment glavnog vektora spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka, sa napadnom tačkom u središtu sistema, a za tačku O kao momentnu tačku.

Izvod po vremenu zamaha sistema za središte sistema kao momentnu tačku, jednak je vektorskoj razlici glavnog momenta sistema spoljašnjih sila za nepokretni pol i momenta glavnog vektora (rezultante) tih sila, sa napadnom tačkom u središtu tih sila, a za nepokretni pol kao momentnu tačku.

Iz relacije $\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathfrak{M}}_O - [\vec{r}_C, \vec{F}_R] = \vec{\mathfrak{M}}_O - \vec{M}_O^{\vec{F}_{R(C)}}$ imajući u vidu da je $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ pišemo:

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathfrak{M}}_O - [\vec{r}_C, \vec{F}_R] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] - \left[\vec{r}_C, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}_i, \vec{F}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_C$$

$$\dot{\vec{L}}_C = \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}_i, \vec{F}_i] = \vec{\mathfrak{M}}_C$$

Odavde smo dobili potvrdu da teorema o zamahu kretanja sistema materijalnih tačaka vazi i za središte sistema, iako ta momentna tačka nije nepokretna.

Vektori momenata inercije masa materijalnog sistema

Primer. Proučimo, sada, impuls kretanja $\vec{p}(t)$, moment impusla kretanja $\vec{L}_O$ (zamah) i njihove promene na primeru kretanja sistema materijalnih tačaka od N materijalnih tačaka N_i, masa $m_i, i = 1,2,3,...,N$, koji *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ i koja prolazi kroz momentnu tačku O. Grafički prikaz kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti za jednu i-tu materijalnu tačku dat je na narednoj slici.

Označimo sa $\vec{r}_i$ vektor položaja materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O, kroz koju prolazi i osa orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ oko koje, *ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, rotira i-ta materijalna tačka. Brzina $\vec{v}_i$ kretanja te i-te materijalne tačke je jednaka vektorskom proizvodu te ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ i njenog vektora položaja $\vec{r}_i$: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \omega [\vec{n}, \vec{r}_i]$. Brzina $\vec{v}_i$ obrtnog kretanja te materijalne tačke je upravna na osu rotacije i vektor položaja, odnosno na vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}_i$.

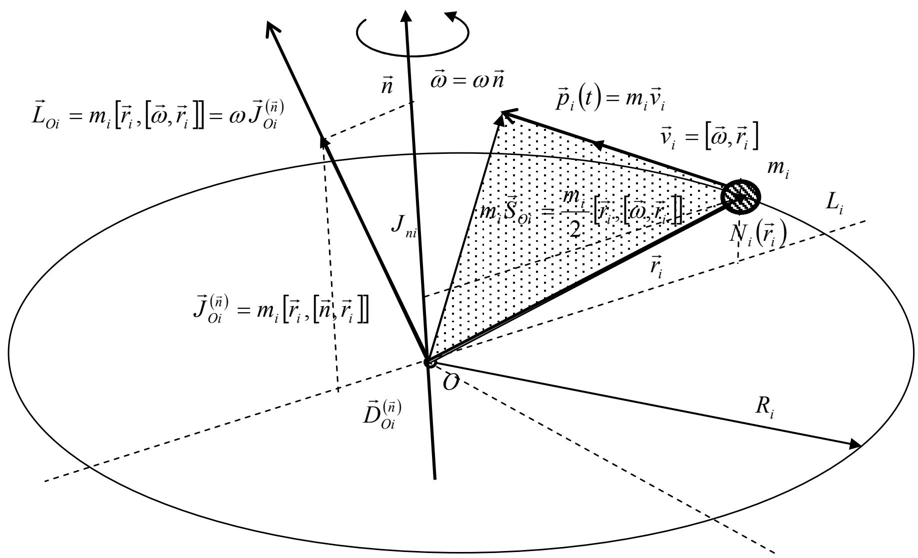
Vektor impulsa kretanja $\vec{p}_i(t)$ te materijalne tačke, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i = m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \omega m_i [\vec{n}, \vec{r}_i] = \omega \vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} m_i[\vec{n},\vec{r}_i]$$

i vektorsku definiciju za vektor $\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke u odnosu na osu, odnosno od rasporeda materijalnih tačaka u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo prvog reda pri rotaciji materijalne tačke oko nepokretene ose. U slučaju kada je materijalna tačka na osi vector $\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}_i$ kolinearni. Poredeći ovo odredjenje vector $\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *linearnog momenta mase* m_i materijalne tačke sa vektorom dobijenim množenjem mas m_i materijalne tačke i jediničnog vektora orjentacije ose $\vec{n}$, a koju smo uveli preko preprincipa (prednačela) postojanja, možemo uvesti i vector $\vec{M}_{Oi}^{(\vec{n})} = m_i\vec{n}$ nazvati *momentom mase nultog reda* ili *nulti moment mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $\vec{L}_{Oi}$ i *-te materijalne tačke, koja rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ *oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *, i prolazi kroz pol* O *i vektora momenta inercije mase* $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke za pol* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase* J_{Oni} *i devijacionog momenta mase* $\vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke za tu osu i taj pol.*

Dimenzija intenziteta vektora $\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, je:

$$\dim\left|\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}\right| = ML$$

a jedinica je $[kgm]$.

Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_{Oi}$ te i-te materijalne tačke, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{L}_{Oi} \stackrel{def}{=} [\vec{r}_i,\vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i,\vec{v}_i] = m_i[\vec{r}_i,[\vec{\omega},\vec{r}_i]] = \omega m_i[\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]] = \omega\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} m_i[\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]]$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i vector *momenta mase drugog reda* ili *kvadratnog momenta mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke u odnosu na osu, odnosno od rasporeda mase u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. *Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo drugog reda pri rotaciji materijalne tačke oko nepokretene ose*. U slučaju kada je materijalna tačka na osi vektor $J_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}_i$ kolinearni.

Oba vektora koje smo prethodno definisali:

* vector $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O:

$$\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})} \overset{def}{=} m_i\left[\vec{r}_i,\left[\vec{n},\vec{r}_i\right]\right]$$

kao i vektor $\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O ili *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* m_i materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O:

$$\vec{S}_{Oi}^{(\vec{n})} \overset{def}{=} m_i\left[\vec{n},\vec{r}_i\right]$$

su vektori vezani za tačku –pol o orjentisanu osu i kao takvi su *tenzorskog karaktera* i odredjeni su, u opštem slučaju sa devet skalara. To znači das u tenzori drugog reda.

Vektori momenata inercije masa materijalnog sistema. Vektor $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O ima dve komponente aksijalnu $\vec{J}_{Oai}^{(\vec{n})} = \left(\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right) = J_{Oni}\vec{n}$ u pravcu ose i $\vec{J}_{Odi}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n},\left[\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = \vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})} = D_{ni}\vec{d}$ devijacionu upravnu na tu osu i orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{d}$ devijacionog pravca upravnog na osu $\vec{n}$. Možemo da napišemo:

$$\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})} \overset{def}{=} m_i\left[\vec{r}_i,\left[\vec{n},\vec{r}_i\right]\right] = \left(\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n} + \left[\vec{n},\left[\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = J_{Oni}\vec{n} + \vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})}$$

Intenzitet J_{Oni} aksijalne komponente $\vec{J}_{Oai}^{(\vec{n})} = \left(\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right) = J_{ni}\vec{n}$ vectora $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ predstavlja *aksijalni moment inercije mase* i*-te materijalne tačke za osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O i jednak je proizvodu mase m_i i kvadrata rastojanja materijalne tačke od te ose. Dimenzija J_{Oni} aksijalnog momenta inercije mase materijalne tačke za osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ je:

$$\dim J_{Oni} = \dim\left|\vec{J}_{O}^{(\vec{n})}\right| = ML^2$$

a jedinica je $\left[kgm^2\right]$.

Intenzitet $D_{Oni} = D_{Ondi}$ devijacione komponente $\vec{J}_{Odi}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n},\left[\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = \vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})} = D_{Oni}\vec{d}$ vectora $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, predstavlja *devijacioni ili centrifugalni moment mase* i-te *materijalne tačke za dve ortogonalne ose, koje se seku u polu* O i to za osu rotacije $\vec{n}$ i na nju upravnu osu orjentisanu ortom $\vec{d}$ u devijacionom pravcu i devijacionoj ravni materijalne tačke koja rotira. Devijacionu ravan obrazuju osa rotacije $\vec{n}$ i vector $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i. U toj, devijacionoj ravni, za slučaj rotacije materijalne tačke oko nepokretne ose, leži vektor $\vec{L}_{Oi}$ momenta impulsa kretanja te materijalne tačke.

Dimenzija intenziteta $D_{Oni} = D_{Ondi}$ devijacione komponente $\vec{J}_{Odi}^{(\vec{n})} = \left[\vec{n},\left[\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = \vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})} = D_{Oni}\vec{d}$ vektora $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* m_i i-te materijalne tačke u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, odnosno *devijacionog ili centrifugalnog momenta mase materijalne tačke za dve ortogonalne ose, koje se seku u polu* O je:

$$\dim D_{On} = \dim D_{Ond} = \dim\left|\vec{D}_{O}^{(\vec{n})}\right| = ML^2$$

a jedinica je $\left[kgm^2\right]$.

Na prethodnoj slici dat je grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta $\vec{L}_{Oi}$ jedne i-te materijalne tačke, koja rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$ oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, i prolazi kroz pol O i vektora momenta inercije mase $\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}$ i-te materijalne tačke za pol O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase J_{Oni} i devijacionog momenta mase $\vec{D}_{Oi}^{(\vec{n})}$ i-te materijalne tačke za tu osu i taj pol. Na slici je prikazana i devijaciona ravan.

Na osnovu prethodne analize za jednu materijalnu tačku sistema, proučimo, sada, impuls kretanja $\vec{p}(t)$, moment impusla kretanja $\vec{L}_O$ (zamah) i njihove promene na primeru kretanja sistema materijalnih tačaka od N materijalnih tačaka N_i, masa $m_i, i=1,2,3,...,N$, koji *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ i koja prolazi kroz momentnu tačku O.

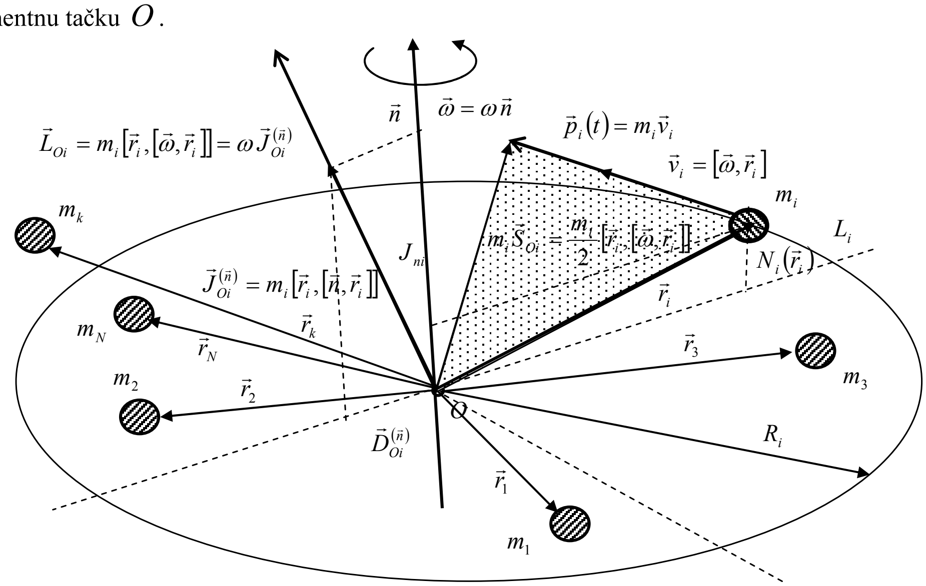
Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O$ sistema materijalnih tačaka od N materijalnih tačaka N_i, masa $m_i, i=1,2,3,...,N$, koje rotiraju pišemo pomoću vektorskog zbira vektora momenata impulsa i-te materijalne tačke, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{L}_O=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{Oi}\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i,\vec{p}_i]=\sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i,\vec{v}_i]=\sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i,[\vec{\omega},\vec{r}_i]]=\omega\sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]]=\omega\sum_{i=1}^{N}\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})}=\omega J_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})}\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]]$$

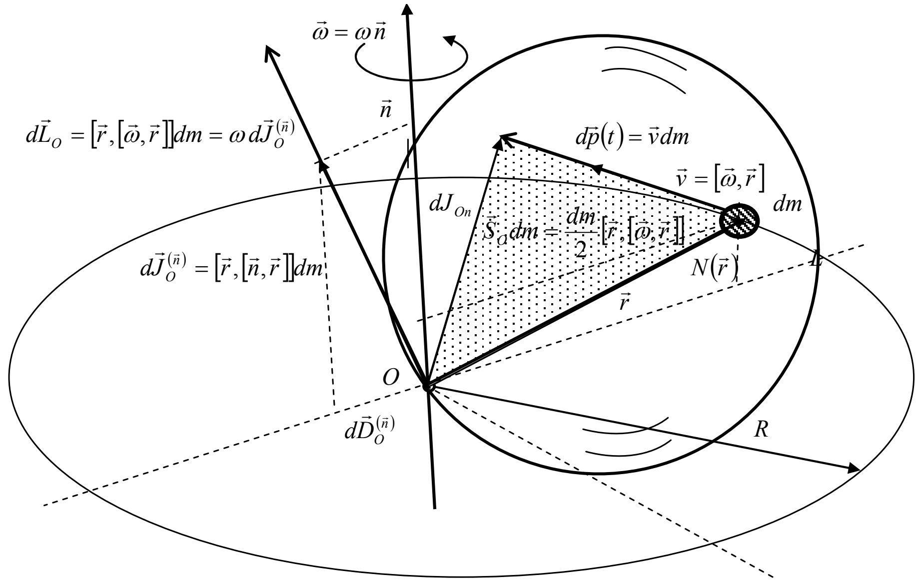
i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase drugog reda* ili *kvadratni moment mase* sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O.



Ako je materijalni sistem materijalno telo, koje sadrži beskonačno mnogo materijalnih tačaka elementarnih masa dm onda za isto prethodna vektorska definicija vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O dobija oblik zapreminskog integrala(umesto sume):

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})}\overset{def}{=}\iiint_V[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm=\iiint_V\rho[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dV$$

gde je ρ masena gustina tela, a V zapremina tela u kojoj je smeštena masa tela. Koordinate ovog vektora su aksijalni moment inercije tela za osu orjentisanu ortom $\vec{n}$ i proizvodi inercije za dve upravne ose.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $d\vec{L}_O$ *elementarne mase* dm *materijalnog tela, koja rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ *oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *, i prolazi kroz pol* O *i vektora momenta inercije mase* $d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *elementarne mase* dm *materijalnog tela za pol* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase* dJ_{On} *i devijacionog momenta mase* $d\vec{D}_O^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke za tu osu i taj pol.*

Steiner-ova teorema. Imajući u vidu da je $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ to unošenjem u

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]]$$

dobijamo:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}_i,[\vec{n},\vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}_C + \vec{\rho}_i,[\vec{n},\vec{r}_C + \vec{\rho}_i]] = [\vec{r}_C,[\vec{n},\vec{r}_C]]\sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{\rho}_i,[\vec{n},\vec{\rho}_i]]$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \vec{J}_C^{(\vec{n})} + [\vec{r}_C,[\vec{n},\vec{r}_C]]M$$

a to je izraz ***Steiner-ove teoreme***, koja kaže da je *vektor momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O *jednak zbiru vektora sopstvenog momenta inercije mase* $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* C *u središtu sistema i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz središte sistema* C *i pložajnog* $[\vec{r}_C,[\vec{n},\vec{r}_C]]M$ *u odnosu na središte sistema.*

Vektor sopstvenog momenta inercije mase $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku C, u središtu sistema, i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz središte sistema C nazivamo i ***centralni vector*** momenta inercije mase $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ sistema materijalnih tačaka za središte sistema C i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$.

Vektor *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O*, možemo razložiti u dve komponente, jednu* J_{On} *u pravcu ose* $\vec{n}$ *i drugu* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *upravnu na tu osu, a obe u devijacionoj ravni, koju čine vektori* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *i* $\vec{n}$ *i to možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = (\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})})\vec{n} + [\vec{n},[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}]] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$$

Aksijalni i devijacioni deo vektora momenta inercije mase. ***Glavne ose inercije***. Komponenta vektora *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačaka u pravcu ose* $\vec{n}$*, koju smo označili sa* $J_{On}\vec{n}$*, odnosno* $\vec{J}_{On}^{(\vec{n})}$ *nazivamo još i aksijalni moment inercije mase sistema materijalnih tačaka za osu orjentisanu ortom* $\vec{n}$ *i koja prolazi kroz pol* O*:*

$$\vec{J}_{On}^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n}$$

i njen intenzitet je J_n *je jednak:*

$$J_{On} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)$$

Komponenta vektora *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *sistema materijalnih tačakau pravcu upravnom na osu* $\vec{n}$*, koju smo označili sa* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *nazivamo još i vektor devijacionog momenta inercije mase sistema materijalnih tačaka za osu orjentisanu ortom* $\vec{n}$ *i koja prolazi kroz pol* O*:*

$$\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right]$$

i ona leži u devijacionoj ravni i izražava devijaciona sviojstva sistema materijalnih tačaka u odnosu na osu, oko koje rotira taj sistem, odnosno devijaciona svojstva rasporeda materijalnih materijalnih tačaka u odnosu na osu rotacije. (Naprimer, masa točka, koji je nasadjen ekscentrično pokazuje devijaciona svojstva pri rotaciji oko te ekscentrične ose, a masa izbalansiranog točka, koji je centrično nasadjen ne pokazuje devijaciona svojstva. Balansiranje točkova se izviodi dodavanjem olovnih ‘’materijalnih tačaka’’ čime se poništavaju wevijaciona svojstva točka u odnosu na osu rotacije.)

Ako vektor momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}$ sistema materijalnih tačaka ima samo komponentu u pravcu ose $\vec{n}_s$, koju smo označili sa $\vec{J}_{On}^{(\vec{n}_s)}$ i nazivali još i aksijalni moment inercije mase sistema materijalnih tačaka, onda ćemo tu osu $\vec{n}_s$ nazvati ***glavnom osom inercije***. Znači da je za glavnu osu inercije orjentisanu ortom $\vec{n}_s$ komponenta u pravcu upravnom na osu $\vec{n}_s$, koju smo označili sa $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n}_s)}$ nazivamo još i vektor devijacionog momenta inercije mase sistema materijalnih tačaka jednaka nuli: $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n}_s)} = 0$. Tada je:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)} \equiv \left(\vec{n}_s, \vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}\right)\vec{n}_s$$

Takvih pravaca i osa ima tri u svakoj tački prostora i set od tri glavna pravca inercije, odnosno od tri glavne ose inercije sadrži ose koje su medjusobno ortogonalne. A to ćemo kasnije i dokazati.

Ako sada vektor momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O razložimo u tri pravca osa koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$ možemo da napišemo:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_{Ou}^{(\vec{n})} + \vec{\mathfrak{D}}_{Ow}^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} + D_{Onu}\vec{u} + D_{Onw}\vec{w}$$

Projekcije $D_{Onu} = -I_{Onu}$ i $D_{Onw} = -I_{Onw}$ vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ sistema materijalnih tačaka u pravcima dveju medjusobno ortogonalnih osa $\vec{u}$ i $\vec{w}$ nazivamo devijacionim momentima za dve ortogonalne ose $\vec{n}$ i $\vec{u}$, odnosno $\vec{n}$ i $\vec{w}$. Ove projekcije se zovu još i proizvodi inercije.

Tenzor momenata inercije masa sistema i matrica tenzora momenata inercije masa sistema. Svakom od vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ sistema materijalnih tačaka u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, možemo pridružiti jednu matricu kolonu čiji su elementi njegove projekcije na ose koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$ na sledeći način:

$$\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})} = \begin{Bmatrix} J_{On} \\ D_{Onu} \\ D_{Onw} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{u})} = \begin{Bmatrix} D_{Oun} \\ J_{Ou} \\ D_{Ouw} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{w})} = \begin{Bmatrix} D_{Own} \\ D_{Owu} \\ J_{Ow} \end{Bmatrix}$$

i pomoću njih sastaviti matricu 3×3 koju ćemo nazvati ***matrica tenzora inercije masa materijalnog sistema***, čije su kolone sastavljene od matrica kolona, koje sadrže projekcije vektora momenata masa materijalnog sistema redom, za ose koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$, a čiji su elementi aksijalni momenti inercije masa i devijacioni momenti masa materijalnog sistema, odnosno proizvodi inercije masa materijalnog sistema za par osa redom iz skupa ortogonalnih vektora $\vec{n}$, $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Na osnovui toga možemo da napišemo:

$$\mathbf{J}_\mathbf{O} = \left(\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{u})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{w})}\right) = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_{On} \\ D_{Onu} \\ D_{Onw} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} D_{Oun} \\ J_{Ou} \\ D_{Ouw} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} D_{Own} \\ D_{Owu} \\ J_{Ow} \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{On} & D_{Oun} & D_{Own} \\ D_{Onu} & J_{Ou} & D_{Owu} \\ D_{Onw} & D_{Ouw} & J_{Ow} \end{pmatrix}$$

Ako za skup ortohonalnih ortova uzmemo ortove Descartes-ovog koordinatnog sistema $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ prethodna matrica postaje:

$$\mathbf{J_O} = \begin{pmatrix} \mathbf{J_O}^{(\vec{i})} & \mathbf{J_O}^{(\vec{j})} & \mathbf{J_O}^{(\vec{k})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_{Ox} \\ D_{Oxy} \\ D_{Oxz} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} D_{Oyx} \\ J_{Oy} \\ D_{Oyz} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} D_{Ozx} \\ D_{Ozy} \\ J_{Oz} \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}$$

U vektorskom obliku vektori momenata masa za koordinatne ose Descartes-ovog koordinatnog sistema su:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + D_{Oxy}\vec{j} + D_{Oxz}\vec{k}$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} = J_{Oy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{j})} = D_{Oyx}\vec{i} + J_{Oy}\vec{j} + D_{Oyz}\vec{k}$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} = J_{Oz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{k})} = D_{Ozx}\vec{i} + D_{Ozy}\vec{j} + J_{Oz}\vec{k}$$

ili

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{i}, \vec{r}_i\right]\right]$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{j}, \vec{r}_i\right]\right]$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{k}, \vec{r}_i\right]\right]$$

Ako sada redom pomnožimo vektore momenata masa za koordinatne ose Descartes-ovog koordinatnog sistema za pol u koordinatnom početku kosinusima smerova jediničnog vektora $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\beta + \vec{k}\cos\gamma$ onda ćemo dobiti sledeće:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{j})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{k})}\cos\gamma \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\beta + \vec{k}\cos\gamma, \vec{r}_i\right]\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{n}, \vec{r}_i\right]\right] = \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

ili

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{n}, \vec{r}_i\right]\right] = \vec{J}_O^{(\vec{i})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{j})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{k})}\cos\gamma$$

Sada se pomoću definisane matrice tenzora inercije materijalnog sistema može napisati prethodna relacija u sledećem obliku:

$$\left\{\mathbf{J_O}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = \mathbf{J_O}\{n\}$$

te je aksijalni moment inercije mase sistema materijalnih tačaka za osu $\vec{n}$ koja prolazi kroz koordinatni početak O jednak:

$$J_{On} = (n)\left\{\mathbf{J_O}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = (n)\mathbf{J_O}\{n\}$$

Devijacioni moment mase sistema materijalnih tačaka za dve upravne ose $\vec{n}$ i $\vec{u}$ koje se seku u koordinatnom početku O je:

$$D_{Onu} = (u)\left\{\mathbf{J_O}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_u & \cos\beta_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = (u)\mathbf{J_O}\{n\}$$

Da bi smo odredili glavne pravce inercije potrebno je da nađemo one pravce $\vec{n}_s$ za koje je $\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)} \equiv \left(\vec{n}_s, \vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}\right)\vec{n}_s$, odnosno u matričnom obliku:

$$\left\{\mathbf{J_O}^{(\vec{n}_s)}\right\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha_s \\ \cos\beta_s \\ \cos\gamma_s \end{Bmatrix} = \mathbf{J_O}\{n_s\} = J_{On_s}\{n_s\}$$

te odatle dobijamo:

$$\mathbf{J_O}\{n_s\} - J_{On_s}\mathbf{I}\{n_s\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} - J_{On_s} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha_s \\ \cos\beta_s \\ \cos\gamma_s \end{Bmatrix} = 0$$

Gde je $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ jedinična dijagonalna materica- Poslednja matrična jednačina predstavlja sistem homogenih algebarskih jednačina sa nepoznatim kosinusima smerova orta glavnog pravca inercije materijalnog sistema $\vec{n}_s = \vec{i}\cos\alpha_s + \vec{j}\sin\beta_s + \vec{k}\cos\gamma_s$, ali sadrži i nepoznati aksijalni moment inercije mase materijallnog sistema J_{On_s} za osu u tom glavnom pravcu inercije. Kako je sistenm algebarskih jednačina po nepoznatim cosinusima smerova orta glavnog pravca, to da bi postojala rešenja različita od trivijalnih i nultih, potrebno je da determinanta sistema jednačina bude jednaka nuli, a tome treba pridružiti i uslov da je zbir kvadrata kosinusa uglova jednog pravca jednak jedinici. Na osnovui toga pišemo sekularnu jednačinu:

$$\left(\mathbf{J_O} - J_{On_s}\mathbf{I}\right)\{n_s\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} - J_{On_s} \end{vmatrix} = 0$$

iz koje odredjujemo glavne momente inercije masa materijalnog sistema: $J_{On_s}, s = 1,2 = 3$,kao korene jednačine trećeg reda koju dobijamo razvijanjem prethodne determinante:

$$P_3\left(J_{On_s}\right) = -\left[\left(J_{On_s}\right)^3 - \mathrm{J}_1\left(J_{On_s}\right)^2 + \mathrm{J}_2\left(J_{On_s}\right) - \mathrm{J}_3\right] = 0$$

u kojoj su J_1, J_2 i J_3 skalari, redom prvi, drugi i treći, matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

* J_1 je prvi scalar i jednak je zbiru elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_1 = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} = J_{On} + J_{Ou} + J_{Ow} = J_{On_1} + J_{On_2} + J_{On_3}$$

* J_2 je drugi scalar i jednak je zbiru minora elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_2 = \begin{vmatrix} J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{(yz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Ozx} \\ D_{(xz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} \\ D_{(xy} & J_{Oy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_2} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_2} \end{vmatrix}$$

* J_3 je treći scalar i jednak je determinanti matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_3 = \det\left|\mathbf{J_O}\right| = \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_1} & & \\ & J_{On_2} & \\ & & J_{On_3} \end{vmatrix} = J_{On_1} \cdot J_{On_2} \cdot J_{On_3}$$

Kosinuse smerova glavnih pravaca momenata inercije masa materijalnog sistema za neki pol O odredjujemo kao odnose:

$$\frac{\cos\alpha_s}{K_{31}^{(s)}} = \frac{\cos\beta_s}{K_{32}^{(s)}} = \frac{\cos\gamma_s}{K_{33}^{(s)}} = C_s$$

gde su $K_{3k}^{(s)}, k = 1,2,3,\ s = 1,2,3$ kofaktori elemenata treće vrste I odgvarajuće k 'te kolohe za odgivarajući s-ti koren $J_{On_s}, s = 1,2 = 3$ sekularne jednačine:

$$K_{31}^{(s)} = \begin{vmatrix} D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{32}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{33}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} \end{vmatrix}$$

Kosinusi smerova glavnog pravca momenata inercije masa moraju da zadaovoljavaju uslov da je zbir kvadrata kosinusa uglova glavnih pravaca jednak jedinici:

$$\cos^2\alpha_s + \cos^2\beta_s + \cos^2\gamma_s = 1$$

Odakle odredjuemo nepoznate konstante C_s :

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{\left(K_{31}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{32}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{33}^{(s)}\right)^2}}$$

Može se dokazati da u svakoj tački prostora u kome je materijalni sistem postoje uvek tri ortogonalana glavna pravca inercije $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ za koje su vektori momenata inercije masa materijalnog sistema bez devijacionih svojstava, tj. postoje samo aksijalni momenti inercije mase z ate pravce.

Matrica tenzora inercije u tom sistemu glavnih pravaca inercije $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ je dijagonalna, jer za te pravce postoje samo aksijalni momenti inercije masa materijalnog sistema, pa sa tim postoje samo elementi na glavnoj dijagonali:

$$\mathbf{J_O} = \left(\mathbf{J_O}^{(\vec{n}_1)} \quad \mathbf{J_O}^{(\vec{n}_2)} \quad \mathbf{J_O}^{(\vec{n}_3)}\right) = \left(\begin{Bmatrix} J_{O1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ J_{O2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{O3} \end{Bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} J_{O1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{O2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{O3} \end{pmatrix}$$

Ako sistem materijalnih tačaka ima osu simetrije onda je ta osa simetrije jedan njen glavni pravac inercije.

Iz Steiner-ove teoreme

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \vec{J}_C^{(\vec{n})} + \left[\vec{r}_C, \left[\vec{n}, \vec{r}_C\right]\right] M$$

imajući u vidu da je:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + D_{Oxy}\vec{j} + D_{Oxz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} = J_{Oy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{j})} = D_{Oyx}\vec{i} + J_{Oy}\vec{j} + D_{Oyz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} = J_{Oz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{k})} = D_{Ozx}\vec{i} + D_{Ozy}\vec{j} + J_{Oz}\vec{k}$$

kao i

$$\vec{J}_C^{(\vec{i})} = J_{Cx}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{i})} = J_{Cx}\vec{i} + D_{Cxy}\vec{j} + D_{Cxz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_C^{(\vec{j})} = J_{Cy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{j})} = D_{Cyx}\vec{i} + J_{Cy}\vec{j} + D_{Cyz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_C^{(\vec{k})} = J_{Cz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{k})} = D_{Czx}\vec{i} + D_{Czy}\vec{j} + J_{Cz}\vec{k}$$

i $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$

u skalarnom obliku možemo dobiti sldeće relacije:

$$J_{Ox} = J_{Cx} + \left(y_C^2 + z_C^2\right)M$$
$$J_{Oy} = J_{Cy} + \left(x_C^2 + z_C^2\right)M$$
$$J_{Oz} = J_{Cz} + \left(x_C^2 + y_C^2\right)M$$
$$D_{Oxy} = D_{Cxy} + x_C y_C M$$
$$D_{Oxz} = D_{Cxz} + x_C z_C M$$
$$D_{Oyz} = D_{Cyz} + z_C y_C M$$

a to su izraz Steiner-ove teoreme o odnosu aksijalnih momenata inercije masa sistema materijalnih tačaka za dve paralelne ose, od kojih jedna prolazi kroz središte tog sistema materijalnih tačaka, kao i o odnosu devijacionih momenata masa sistema materijalnih tačaka za parove paralelnih osa, od kojih jedan par prolazi kroz središte sistema materijalnih tačaka.

Centrifugalni momenti masa sistema materijalnih tačaka su jednaki devijacionim momentima masa sa promenjenim znakom.

Teorema o promeni kinetičke energije sistema materijalnih tačaka

Kinetička energija ili ‘’*živa sila*’’ je mera kretanja materijalnog sistema kojim se ispoljava svojstvo transformacije jednog kretanja u drugo, ekvivalentno.

Definicijom 5. smo uveli skalarnu invarijantu dinamike elementarni rad sile $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke kao skalarni proizvod te* *sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$.*

Na osnovu te definicije skalarne invarijante, uveli smo i ukupan rad sile $\vec{F}$ na stvarnom putu - pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke, kao ukupan zbir svih elementarnih radova $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ ili integral skalarnog proizvoda te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku:

$$A^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Definicijom ***skalarnog odredjenja*** - *skalarne invarijante - elementarnog rada sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke* uspostavljena je skalarna veza izmedju sila (aktivne $\vec{F}$, ili reaktivne $\vec{F}_w$ odnosno sile inercije $\vec{I}_F$) i pomeranja duž puta s materijalne tačke m.

Imajući u vidu definiciju sile inercije $\vec{I}_F(t) \overset{def}{=} -m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$, kao *vektorske invarijante* i jednog od osnovnih odredjenja dinamike, kao i definiciju rada sile kao *skalarne invarijante* za ***ukupan rad svih sila inercije*** *kretanja sistema materijalnih tačaka, koji se sastoji od N pokretnih materijalnih tačaka N_i, masa m_i, $i = 1,2,3,\ldots,N$, čiji su položaji u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorima položja $\vec{r}_i(t)$, jednak je zbiru radova komponentnih sila inercije pojedinih materijalnih tačaka sistema i za elementarni rad svih sila inercije na elementarnim pomeranjima materijalnih tačaka možemo da napišem:*

$$dA^{\vec{I}_F} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{I}_{F(i)}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{a}_i, d\vec{s}_i\right)$$

$$dA^{\vec{I}_F} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{I}_{F(i)}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt}, \vec{v}_i(t)dt\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{v}_i(t), d\vec{v}_i(t)\right)$$

$$dA^{\vec{I}_F} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{I}_{F(i)}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{v}_i(t), d\vec{v}_i(t)\right) = -\sum_{i=1}^{N} d\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]$$

Ukupan rad svih sila inercije sistema materijalnih tačaka jednak je zbiru radova pojedinih materijalnih tačaka na njihovom stvarnom putu - pomeranju duž odgovarajućih putanja s_i kretanja svake od materijalnih tačaka materijalnog sistema, te možemo da napišemo:

$$A^{\vec{I}_F} = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{s_i}\left(\vec{I}_{F(i)}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = -\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right] - \sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(0)\right)^2}{2}\right]\right\} = -\left(E_k - E_{k0}\right)$$

i time smo doveli ukupan rad sila inercije materijalnih tačaka sistema u veztu sa kinetičkom energijom sistema materijalnih tačaka.

Za ukupan rad sila inercije $\vec{I}_{Fi}(t)$ na stvarnim putevima pomeranja duž putanja s_i kretanja materijalnih tačaka m_i, koja se kreću brzinom $\vec{v}_i$, a u početnom položaju su sve materijalne tačke imale početne brzine jednake nuli, $v_{i0} = 0$ izvodimo i sledeću relaciju

$$A^{\vec{I}_F} = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{s_i}\left(\vec{I}_{F(i)}, d\vec{s}_i\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = -\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]\right\} = -\left(E_k\right)$$

*iz koje smo izveli **zaključak**:*

Rezultujući rad sila inercije $\vec{I}_{F(i)}(t)$ materijalnih tačaka sistema na stvarnim putevima - pomeranjima duž putanja s_i kretanja svake od materijalnih tačaka materijalnog sistema, koje se *kreću brzinama $\vec{v}_i$*, a u početnom položaju su sve materijalne tačke imale početne brzine jednake nuli, $v_{i0} = 0$ *jednak je negativnoj vrednosti kinetičke energije E_k sistema materijalnih tačaka.*

*Kinetička energija se naziva i imenom **''živa sila''**.*

Takodje smo analizirali i izvod po vremenu rada sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ i uveli pojam ***snaga*** *ili* ***efekat rada sile,*** koja se iskazuje sledećom matematičkom relacijom:

$$P \overset{def}{=} \frac{dA^{\vec{F}}}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

Za sistem materijalnih tačaka materijalnog sistema možemo da pišemo:

$$\frac{dA^{\vec{I}_F}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{I}_{F(i)}, \frac{d\vec{s}_i}{dt}\right) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{v}_i(t), \vec{a}_i(t)\right) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{d\left[m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]}{dt} = -\frac{d\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\left(\vec{v}_i(t)\right)^2}{2}\right]}{dt} = -\frac{dE_k}{dt}$$

Zaključili smo da je ***snaga*** *ili* ***efekat rada sila*** *inercije sistema materijalnih tačaka* na stvarnim putevima - pomeranju duž sopstvenih putanja s_i kretanja odgovarajućih materijalnih tačaka m_i, koje se kreću sopstvenim brzinama $\vec{v}_i$, jednaka izvodu kinetičke energije po vremenu, to je i ***brzina vršenja rada****, i to je zbir skalarnih proizvoda sila inercija, koje dejstvuju na pokretnu odgovarajuću materijalnu tačku i brzine* $\vec{v}_i$ *kretanja te materijalne tačke duž njene putanje.*

Ove definisane skalarne invarijante - definisane pomoću vektorskih invarijanti dinamike, dovoljne su da se definiše *teorema o promeni kinetičke energije po vremenu.*

Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu sistema materijalnih tačaka*: Promena kinetičke energije sistema materijalnih tačaka po vremenu, konstantnih masa, koje se kreću brzinama* $\vec{v}_i$, *i na koje dejstvuju spoljašnje sile* $\vec{F}_{si}$ *i unutrašnje sile* $\vec{F}_{ui}$, *jednaka je zbiru snaga rada spoljašnjih sila* P_{si}. *Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dA^{\vec{I}_F}}{dt} = -\frac{dE_k}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(P_{ui} + P_{si}\right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N}\frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si}, \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si}, \sum_{j=1}^{n=3N-s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{j=n=3N-s} Q_j\dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si}, \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\begin{cases} q_i, i = 1,2,3,....,3N \ \ (krivolinijski\ sistem\ koordinata) \\ q_i, i = 1,..,n; \quad n = 3N - s; \ s < 3N \ \ (sistem\ generalisanih\ koordinata)\end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i = 1,2,3,....,3N$ i dejstvuju na sistem materijalnih tačaka. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo kordinate položaja materijalnih tačaka materijalnog sistema u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima $3N$, q_i, $i = 1,2,3,...,3N$, za svaku materijalnu tačku po 3, ili su to nezavisne koordinate pokretnih materijalnih tačaka, kada ih ima $n = 3N - s$, q_i, $i = 1,..,n(= 3N - s)$, gde je $s < 3N$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na materijalne tačke tog sistema materijalnih tačaka. Ako su sve materijalne tačke sistema slobodne, onda ima tih koordinata ima $3N$, te je toliko i generalisanih koordinata q_i, $i = 1,2,3,...,3N$ i $3N$ generalisanih sila Q_i, $i = 1,2,3,...,3N$, ili u slučaju kada materijalne tačke sistema nisu slobodne, već su podvrgnute vezama i tada postoji manji broj generalisanih koordinata za onoliko koliki je broj veza kojima je sistem podvrgnut. Tada je i broj generalisanih sila jednak tom broju generalisanih koordinata te su generalisane koordinate q_i i generalisane sile Q_i, za $i = 1,2,3,...,n(= 3N - s)$).

Snaga rada unutrašnjih sila materijalnog sistema jednaka je nuli.

Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu sistema materijalnih tačaka*: Promena kinetičke energije sistema materijalnih tačaka po vremenu, konstantnih masa, koje se kreću brzimana* $\vec{v}_i$ *na koje dejstvuju spoljašnje sile* $\vec{F}_i$ *jednaka je snazi* P *tih sila. Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dE_k}{dt} = P \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N}\frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i, \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i, \sum_{j=1}^{n=3N-s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_i\right) = \sum_{j=1}^{j=n=3N-s} Q_j\dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right), \begin{cases} q_i, i = 1,2,3,...,3N \text{ (krivolinijski sistem koordinata)} \\ q_i, i = 1,2,3,...,n; \quad n = 3N - s \text{ (sistem generalisanih koordinata)} \end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i = 1,2,3,...,3N$ i dejstvuju na materijalnu tačku. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo koordinate položaja materijalnih tačaka u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima $3N$, q_i, $i = 1,2,3,...,3N$, ili su to nezavisne koordinate pokretnog sistema pokretnih materijalnih tačaka, kada ih ima $n = 3N - s$, q_i, $i = 1,..,n(= 3N - s)$, gde je $s < 3N$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na taj sistem ili pojedinačno na neku njegovu pokretnu materijalnu tačku. Analizu bi smo ri tome sproveli na sledeći način: Prvo bi smo analizirali broj stepeni slobode kretanja svake materijalne tačke sadržane u sistemu pojedinačno, a zatim svake u odnosu na svaku drugu iy sistema. Na osnovu toga bi smo zaključili koliki je minimalno potreban minimalni broj $n = 3N - s$ nezavisnih koordinata q_i, $i = 1,..,n$ da potpuno odredimo jednoznačno položaj svake pokretne materijalne tačke materijalnog sistema u tom krivolinijskom sistemu koordinata. Sistem generalisanih koordinata (nezavisnih) može biti izabran i u Descartes-ovom sistemu koordinata. Naprrimer, analizu bi smo počeli sa pojedinačnim materijalnim tačkama. Ako je pokretna materijalna tačka u tom sistemu slobodna, onda ona ima tri generalisane coordinate q_i, $i = 1,2,3$ i tri generalisane sile Q_i, $i = 1,2,3$, ili u slučaju kada nije slobodna već je podvrgnuta vezama i tada postoje dve ili jedna generalisana sila zavisno da li je podvrgnuta jednoj ili dvema vezama (prinudno kretanje po površi odnosno liniji) kada ima dva stepena slobode kretanja (prinudno kretanje po površi, q_i i Q_i, za $i = 1,2$), odnosno, jedan stepen slobode kretanja (prinudno kretanje po liniji, q_1 i Q_1,). Zatim se sabere broj tako dobijenih nezavisnih koordinata, pa se od tog zbira oduzme broj koji odgovara broju medjuveza izmedju tih materijalnih tačaka i koordinata.analiziraju veze izmedju. Kao rezultat se dobija broj $n = 3N - s$ nezavisnih koordinata, koje nazivamo *generalisanim koordinatama* pokretnog materijalnog sistema q_i, $i = 1,..,n(= 3N - s)$, gde je $s < 3N$ ukupan broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na taj sistem ili pojedinačno na neku njegovu pokretnu materijalnu tačku. Broj generalisanih sila Q_i, $i = 1,..,n$ koje dejstvuju na mehanički sistem materijalnih tačaka je jednak broju generalisanih koordinata $n = 3N - s$.

Kada materijalne tačke sistema nisu slobodne, već na njih dejstvuju veze, onda relacija snage rada sila uključuje i sile otpora veza, kojima su podvrgnute pojedine tačke materijalnog sistema:

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{F}_i, \vec{v}_i\right) + \left(\vec{F}_{wTi}, \vec{v}_i\right) + \left(\vec{F}_{wNi}, \vec{v}_i\right)\right] = \sum_{j=1}^{j=n=3N-s} Q_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{j=n=3N-s} Q_{wNj}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{j=n=3N-s} Q_{wTj}\dot{q}_j$$

U zaključku možemo teoremu o promeni kinetičke energije sistema materijalnih tačaka da formuliđemo na sledeći način:

Prvi izvod kinetičke energije mehaničkog sistema jednak je snazi sila koje na njega dejstvuju.

Možemo da definišemo i sledeće teoreme:

Diferencijal kinetičke energije sistema materijalnih tačaka jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Priraštaj kinetičke energije, ili '' žive sile''sistema materijalnih tačaka jednak je zbiru mehaničkih radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje dejstvujući na sistem vrše duž odgovarajućih putanja kretanja materijalnih tačaka tog sistema. Kada su unutrašnje sile konzervativne one imaju funkciju sile.

Priraštaj mehaničke energije sistema materijalnih tačaka jednak je zbiru mehaničkih radova svih spoljašnjih sila koje u datom vremenskom razmaku dejstvuju na pojedine materijalne tačke sistema.

Realativno kretanje sistema materijalnih tačaka u odnosu na središte sistema

Usvojimo središte sistema materijalnih tačaka za početak pokretnog sistema koordinata $C\xi\eta\zeta$, koji se translatorno kreće u odnosu na apsolutni, nepokretni Descartes-ov trijedar $Oxyz$. Položaj svake materijalne tačke odredjen je u odnosu na apsolutni, nepokretni sistem koordinata $Oxyz$ vektorom $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C$ relativnog položaja materijalne tačke u odnosu na središte sistema C.

Kinetička energija sistema je:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_C + \vec{v}_{ri}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_C^2 + 2\left(\vec{v}_{ri}, \vec{v}_C\right) + \vec{v}_{ri}^2\right)$$

$$E_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_C^2 + 2\left(\vec{v}_{ri}, \vec{v}_C\right) + \vec{v}_{ri}^2\right) = \frac{1}{2}\vec{v}_C^2\sum_{i=1}^{N}m_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{ri}^2 = \frac{1}{2}\vec{v}_C^2 M + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_{ri}^2,$$

jer je $\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_{ri},\vec{v}_C) = \left(\vec{v}_C, \sum_{s=1}^{N} m_i\vec{v}_{ri}\right) = \left(\vec{v}_C, \sum_{s=1}^{N} m_i\vec{v}_{ri}\right) = (\vec{v}_C, M\vec{v}_{Cr}) = 0$, jer je relativna brzina središta sistema C u odnosu na to središte jednaka nuli. $\vec{v}_{Ct} = 0$. Sada iz prethodne relacije možemo napisati:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\vec{v}_C^2 M + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{ri}^{\,2} = E_C + E_{ur}$$

Na osnovu prethodnog možemo formulisati sledeću teoremu o kinetičkoj energiji sistema materijalnuh tačaka:

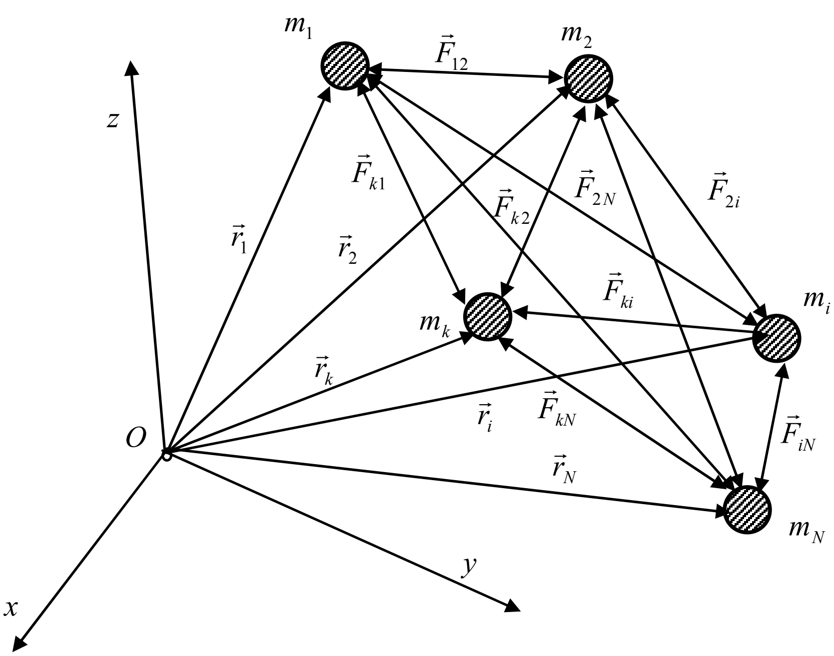
Kinetička energija sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru kinetičke energije translacije brzinom $\vec{v}_C$ ***središta sistema, kao da je celokupna masa*** M ***svih materijalnih tačaka sažeta u središtu sistema materijalnih tačaka i kinetičke energije relativnog kretanja materijalnih tačaka sistema u odnosu na središte sistema***.

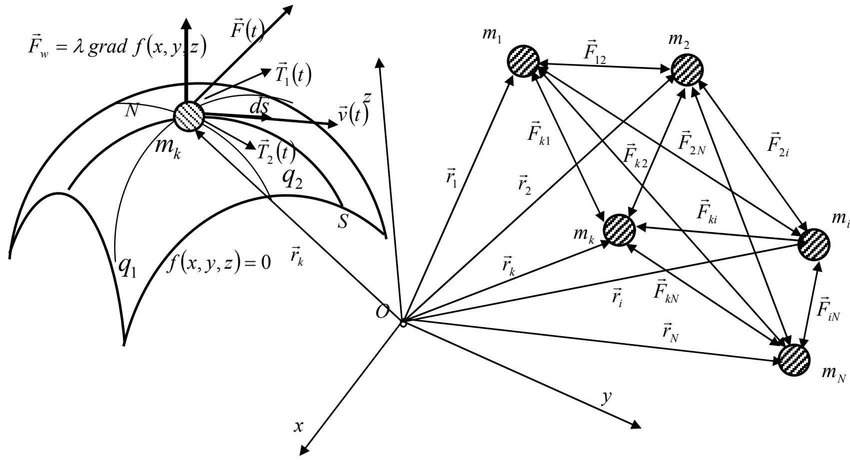
Ova teorema je poznata pod imenom Kenigova teoreme (***Samuel König*** 1712-1757). Ovaj holandki naučnik izveo je ovu teoremu 1751. Formulacija Kenigove teoreme je:

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka za slučaj apsolutnog kretanja sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru kinetičke energije njegovog središta (spoljašnje kinetičke energije) i relativne kinetičke energije u odnosu na središte (unutrašnja kinetička energija).

Na osnovu prethodnih teorema i zaključaka možemo zaključiti i sledeće:

Svako kretanje sistema materijalnih tačaka se može predstaviti da se sastoji translatornog kretanja sistema brzinom njegovog središta i relativnog kretanja pojedinih njegovih tačaka u odnosu na središte sistema, koje u tom trenutku smatramo nepokretnim.





APPENDIX

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.

БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - Ensslin - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940

Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - *Webers* - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - *Newton* - *Gross* - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - *Scheffers* - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. Ј. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. Ј. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - *Pöschl* - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - *Cranz* - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Èléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:

- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.