DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VII.1. SEDMA NEDELJA

Konzervativno kretanje. Konzervativne sile. Funkcija sile. Cauchy-Reiman-ovi uslovi. Rad konzervativne sile. Potencijalna energija. Teorema o održanju mehaničke energije. Integral energije. Odredjivanje funkcije sile.

Centralna kretanja. Funkcija sile kod centralnih kretanja. Bineov obrazac.

Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanom sistemu koordinata. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VII.2. OSMA NEDELJA

Prinudno kretanje materijalne tačke. Veze. Podela veza. Uslovi za brzinu i ubrzanje. Lagrange-ovi množioci veza. Kretanje materijalne tačke po idealnoj površi. Lagrange-ove jednačine I vrste. Diferencijalne jednačine kretanja u prirodnom sistemu koordinata. Integral energije. Kretanje materijalne tačke po obrtnoj površi. Prinudno kretanje materijalne tačke po liniji. Integral energije. kretanje materijalne tačke po krugu u polju zemljine teže. Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke.

VII.3. DEVETA NEDELJA

Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

Specijalni slučajevi slobodnog ili prinudnog kretanja materijalne tačke.

Razne vrste hitaca
Harmonijski oscilator - sopstvene oscilacije, prinudne oscilacije
Oscilator sa otpornom silom
Cikloidno klatno
Kretanje materijalne tačke po paraboli
Kretanje materijalne tačke po sferi pod dejstvom Zemljine teže
Matematičko klatno, sekundno klatno, konusno klatno
Kretanje materijalne tačke po konusu

Specijalni slučajevi relativnog kretanja materijalne tačke.

Koncepcija ili filozofija rešavanja zadataka dinamike materijalne tačke (ili algoritam za rešavanje postavljenog zadataka)

1 Napraviti analizu kinetičkih parametara materijalnog modela kretanja materijalne tačke sa ciljem rešavanja postavljenog zadatka i odredjivanja traženih kinetičkih / dinamičkih invarijanti i u cilju najoptimalnijeg pristupa rešavanju postavljenog zadatka prethodno treba odgovoriti na sledeća pitanja:*

- *Da li je materijalna tačka slobodna ili vezana?*
- *Kojimm vezama je izložena materijalna tačka? Koliki je njihov broj i kom tipu pripadaju?*
- *Koliko stepeni slobode kretanja ima ta materijalna tačka na koju dejstvuju veze?*
- *Zatim izabrati najpogodniji koordinatni sistem za rešavanje postavljenog zadatka i u njemu izabrati potreban broj generalisanih kordinata, čiji broj odgovara broju stepeni slobiode kretanja::*
    - *tri kada je materijalna tačka slobodna i kada na nju ne dejstvuju veze;*
    - *dve (kada dejstvuje jedna stacionarna geometrijska veza);*
    - *jednu (kada dejstvuju dve stacionarne geometrijske veze),*

Kada smo izabrali jednu ili više (maksimum 3) generalisanih koordinata materijalne tačke kojima se definiše njeno kretanje,ostale koordinate kojima se definiše njen položaj u prostoru izražavamo pomoću generalisanih koordinata. Da razjasnimo, položaj svake materijalne tačke u prostoru, pa i posmatrane je uvek odredjen pomoću tri koordinate u odredjenom izabranom koordinatnom sistemu, samo zavisno od broja stepeni slobode kretanja materijalne tačke, biramo neke koordinate za generalisane a ostale kaoodrinate iznad broja stepeni slobode kretanja, koje nisu izabrane kao generalisane, se izražavanju pomoću generalisanih koordinata.

- *Po izboru generalisanih koordinata, potrebno je napraviti analizu sila koje dejstvuju na materijalnu tačku, i njihove komponente u izabranom koordinatnom sistemu.*
  - *Prvo, analizirati koje aktivne sile dejstvuju na materijalnu tačku i odrediti njihove komponente u izabranom sistemu koordinata za rešavanje postavljenog zadatka, a zatim utvrditi da li su takve sile konzervativne i da li imaju funkciju sile i ako je odgovor da, odrediti njihovu funkciju sieč:*
  - *Drugo, analizirati da li ima otpornih sila sredine kretanju materijalne tačke i koje su i u kom pravcu i smeru se javljaju, kao otpor kretanju materijalne tačke. Ako su te sile proporcionalne brzini kretanja materijalne tačke odrediti funkciju rasipanja ili snagu njihovog rada na putu kretanja materijalne tačke;*
  - *Treće, analitirati pojavu i prisutnost reakcija (otpora) dejstu veza na materijalnu tačku i materijalnu tačku osloboditi veza supstitucijom (zamenom) uticaja veza odredjenim silama otpora veza. Ako su veze skleronomne i konačne geometrijske, onda se dejstvo odstranjenih veza zamenjuje silama koje padaju u pravac gradijanta (normale) na odgovarajuću površ veze sa odgovarajućim i nepoznatim množiocem veze za slučaj idealne veze, a ako veza nije idealna, nego hrapava i neidealna onda se tome pridodaju i komponente otpora veza koje padaju u pravac tangenti na vezu, odnosno na pravac brzine, ali suprotnosmerno od nje:*
  - *Zatim se pristupa anlizi sila inercije odnosno fiktivinh sila i one kao vektorske invarijante dinamike materijalne tačke izražavaju preko komponenti u odgovarajućem sistemu koordinata; Naravno pre toga treba odrediti komponente vektorske kinematičke invarijante osnovnog odredjenja vektora ubrzanja pokretne materijalne tačke;*
- *Sada dolazimo do pitanja izbora metode koju ćemo koristiti za postavljanje jednačina kretanja materijalne tačke i rešavanja zadatka u izabranom sistemu koordinata;*
  - *Za sastavljanje jednačina kretanja materijalne tačke stoje nam na raspolaganju Principi mehanike i teoreme dinamike materijalne tačke. Najćešće koristimo princip dinamičke ravnoteže aktivnih sila, otpornih sila kretanju materijalne tačke kroz sredinu, sila veza i sila inercije, pomoću koga možemo da sastavimo jednu vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže iz koje zavisno od broja stepeni slobode kretanja i izbora pogodnog sistema generalisanih koordinata možemo dobiti tri skalarne jednačine, od čega je onoliki broj diferencijalnih jednačina, koliki je broj stepeni slobode kretanja,a ostale daju ralacije iz kojih odredjujemo nepoznate sile otpora veza..*
  - *Pored principa dinamike na raspolaganju nam stoje teoreme i leme mehanike i dinamike kao što si teorema o promeni impulsa ili količine kretanja materijalne tačke, teoreme ili lema o promeni momenta impulsa kretanja materijalne tačke, zatim teorema o promeni kineričke energije, teorema o održanju impulsa kretanje, teorema o održanju energije sistema za konzervativne sisteme ili o degradaciji ukupne energije sistema ako se radi o nekonzervativnom sistemu koji ima funkciju rasipanja i tako dalje...*
  - *I zatim po postavljanju diferencijalnih jednačina potrebno je na osnovu znanja o rešavanju diferencijalnih jednačina rešiti postavljene diferencijalne jednačine, a pri time dobijene integracione konstante odrediti iz početnih uslova kretanja ili i njima dodatih usliva kontinualnosti i neprekidnosti kretanja, ako se radi o složenim kretanjima, koja su opisana sa više diferencijalnih jednačina u zavisnosti od toga da li se u toku kretanja materijalne tačke smenjuje tip kretanja materijalne tačke. Naprimer ako postoje nezadržavajuće veze, smenjivanje tipa kretanja od slobodne meterijalne tačke na slučaj dejstva veza ili pak promene i pojave dejstva novih veza,*

tada treba koristiti uslove kompatibilnosti kinetičkog stanja kretanja materijalne tačke pri prelazu sa slobodne na vezanu i izloženu dejstvu veza.

** Naravno prethodno nabrojani elementi i pitanja za analizu kretanja i sastavljanje odgovarajućih jednačina u konkretnim slučajevima se uprošćavaju, zavisno od toga šta treba odrediti i koji se od kinetičkih parametara zadatkom traži, pa se pristup, selektivnim putem, uprošćava.*

Na napred pobrojanim primerima kretanja slobodne materijalne tačke ili materijalne tačke izložene dejstvu veza pokazaćemo kako se ova filozofija rešavanja zadatka realizuje i sama koncepcija, odnosno algoritam, uprošćavaju.

Treba obratiti pažnju da se kretanje materijalne tačke, na koju dejstvuju stacuibarne skleronomne geometrijske veze, može posmatrati i kao slobodno kretanje materijalne tačke, ako se uticaj veza zameni dejstvom sila otpora veza, a položaj materijalne tačke odredjuje u podsistemu . sistemu koordinata koji odgovara po dimenzionalnosti broju stepeni slobode kretanja materijalne tačke.

Primer: Razne vrste hitaca

Kroz zadatke na vežbanjima obradjene su različite vrste kretanja hitaca (vertikalni hitac naviše i naniže, kosi hici).

Primer: Harmonijski oscilator - sopstvene oscilacije, prinudne oscilacije
Primer: Oscilator sa otpornom silom

Cikloidno klatno

Teška materijalna tačka prinudjena da se kreće po cikloidi u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže predstavlja sistem sa jednim stepenom slobode kretanja. Iabrali smo dva sistema koordinata. Jednan koordinatni sistem je $Oxyz$, a ravan u kojoj leži cikloida je $0xz$ i drugi prirodni sistem koordinata sa koordinatom s duž linije cikoide i nomalom na cikloidu u svakoj njenoj tački.

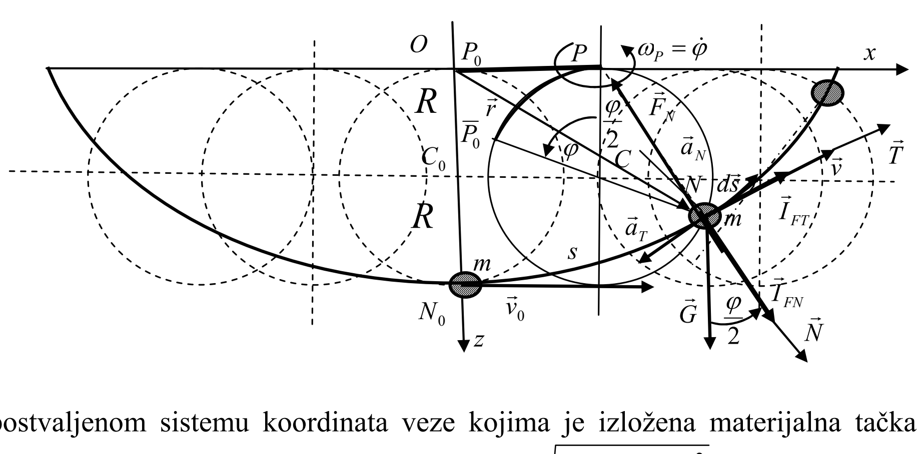
Kako je cikloida kriva koju opisuje tačka na kružnici koja se kotrlja po pravoj liniji, to su parametarske jednačine cikloide:

$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$
$$z = R(1 + \cos\varphi)$$

gde je φ ugao kotrljanja fiktivnog kruga koji opisuje cikloidu, dok je

$$\cos\varphi = \frac{z}{R} - 1$$

$$\frac{x}{R} = \arccos\left(\frac{z}{R} - 1\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R} - 1\right)^2}$$



U tako postvaljenom sistemu koordinata veze kojima je izložena materijalna tačka koja se kreće po cikloidi su: $f_1(y) = y = 0$ i $f_2(x,z) = \frac{x}{R} - \arccos\left(\frac{z}{R} - 1\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R} - 1\right)^2} = 0$ S obzirom na komplikovanost druge veze izražene u sistemu koordinata $Oxyz$ korišćenje ovog koordinatnog sistema nema prednosti, pa ćemo se opredeliti za prirodni sistem koordinata i s obzirom da materijalna tačka ima jedan stepen slobode kretanja izabraćemo za generalisanu koordinatu s duž luka cikloide mereno od tačke N_0, koja odgovara najnižoj tački na cikloidi i s obzirom da se cikloida nalazi u vertikalnoj ravni i da na materijalnu tačku dejstvuje sila težine, to je najniži pložaj materijalne tačke na cikloidi u tački N_0, koja odgovara minimumu potencijala, te je taj položaj, položaj stabilne ravnoteže materijalne tačke na cikloidi. Da to i dokažemo, kasnije.

Element luka ds po cikloidi, odnosno duž putanje kretanja materijalne tačke je:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = dx\sqrt{1 + (z'_x)^2}$$

te kako je:

$$dx = R(1 + \cos\varphi)d\varphi$$
$$dz = -R\sin\varphi \, d\varphi$$

to je

$$ds = Rd\varphi\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = Rd\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = Rd\varphi\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

Integraljenjem prethodnog diferencijala dobijamo parametarsku jednačinu luka putanje $s(\varphi)$ duž cikloide u sledećem obliku:

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$$

Do ove relacije, - zavisnosti elementa luka $s(\varphi)$ putanje kretanja materijalne tačke duž cikloide možemo doći i kinematičkim putem s obzirom da je putanja kretanja materijalne tačke po cikoloidi je ista kao i putanja kretanja geometrijske tačke na konturi kružnice, koja se kotrlja po pravoj liniji i pri tome tačka dodira kotrljajućeg kruga poluprečnika R i prave po kojoj se kotrlja je tačka P, koja predstavlja trenutni pol rotacije te tačke na periferiji kotrljajućeg kruga, te je brzina te tačke brzina rotacije oko trenutnog pola P ugaonom brzinom $\omega_P = \dot{\varphi}$ kotrljanja i tog kruga.

Iz trougla ΔPCN sledi da je to jednakokraki trougao sa jednakim uglovima $\frac{\varphi}{2}$ na osnovici, te je rastojanje tačke N od trenutnog pola P je $\overline{NP} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}$, te je brzina tačke N jednaka:

$$v = \overline{NP}\dot{\varphi} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\,\dot{\varphi},$$

a kako je

$$ds = vdt = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\,\dot{\varphi}dt = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{dt}dt = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

što posle integraljenja daje $s(\varphi) = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$, a to je relacija dobijena, kao i, u prethodnom prilazu odredjivanja dužine luka.

Na materijalnu tačku dejstvuju i sila težine $\vec{G} = mg\vec{k}$, sila otpora veze $\vec{F}_N = -F_N\vec{N}$ upravna na tangentu na putanju u tački N, kao i sila inercije

$$\vec{I}_F = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T = -m\dot{v}\vec{N} - m\frac{v^2}{R_k}\vec{T}$$

gde je R_k poluprečnik krivine putanje, odnosno, cikloide u tački u kojoj je pokretna materijalna tačka u posmatranom trenutku.

Sada koristimo princip dinamičke ravnoteže i pišemo odgovarajuču vektrsku jednačinu u prirodnom sistemu koordinata linije putanje:

$$\vec{I}_F + \vec{G} + \vec{F}_N = 0$$

Skalarnim množenjem sa $\vec{T}$ i $\vec{N}$, ortovima normale i tangente na putanju materijalne tačke, te dobijamo dve skalarne jednačine za koordinatne pravce prirodnog sistema koordinata putanje:

$$\left(-m\dot{v}\right)+mg\sin\frac{\varphi}{2}=0$$

$$\left(-m\frac{v^2}{R_k}\right)+\left(-F_N\right)+mg\cos\frac{\varphi}{2}=0$$

Iz prve od ovih jednačina dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu po generalisanoj koorsinati – luku $s(t)$ duž cikloide:

$$\ddot{s}+\frac{g}{4R}s=0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja teške materijalne tačke po cikloidi u vertikalnoj ravni i u polju Zemljine teže.

Poluiprečnik krivine putanje R_k po cikloidi je:

$$R_k=\frac{\left[\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2}\right]^3}{z''}=\frac{\left[\frac{ds}{dx}\right]^3}{z''}=\frac{\left[\dfrac{2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi}{2R\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi}\right]^3}{\dfrac{1}{2R\cos^4\frac{\varphi}{2}}}=\frac{2R\cos^4\frac{\varphi}{2}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}=2R\cos\frac{\varphi}{2}=2R\sqrt{1-\left(\frac{s}{4R}\right)^2}$$

jer je:

$$dx=R(1+\cos\varphi)d\varphi=2R\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$dz=-R\sin\varphi\, d\varphi=-2R\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$ds=dx\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2}$$

$$ds=2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi \qquad \frac{s(\varphi)}{4R}=\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$z'=\frac{dz}{dx}=\frac{-2R\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi}{2R\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi}=-tg\frac{\varphi}{2} \qquad d(z')=-\frac{-\sin^2\frac{\varphi}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi$$

$$z''=\frac{d(z')}{dx}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi}{2R\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi}=\frac{1}{2R\cos^4\frac{\varphi}{2}}$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže u pravcu normale $\vec{N}$ na cikloidnu putanju dobijamo:

$$\left(-m\frac{v^2}{R_k}\right)+\left(-F_N\right)+mg\cos\frac{\varphi}{2}=0$$

$$-m\frac{\dot{s}^2}{2R\sqrt{1-\left(\frac{s}{4R}\right)^2}}-F_N+mg\sqrt{1-\left(\frac{s}{4R}\right)^2}=0$$

odakle dobijamo normalni otpor $\vec{F}_N=-F_N\vec{N}$ veze usled kretanja teške materijalne tačke po cikloidi u funkciji luka cikloide s (izabrane generalisane koordinate):

$$F_N = mg\sqrt{1-\left(\frac{s}{4R}\right)^2} - m\frac{\dot{s}^2}{2R\sqrt{1-\left(\frac{s}{4R}\right)^2}}$$

Kako je jednačina kretanja materijalne tačke po cikloidi

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0$$

odnosno

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0$$

gde je $\omega^2 = \frac{g}{\$R}$ sopstvena kružna frekvencija oscilatornog kretanja teške materijalne tačke po cikloidi, to je njeno rešenje oblika:

$$s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

u kome su A i B integracione konstante, koje se odredjuju iz početnih uslova. Pretpostavimo da se u početnom trenutku materijalna tačka nalazila u položaju odredjenom dužinom luka $s_0 = s(0)$ i da je dobila početnu brzinu $v_0 = v(0)$, onda je zakon kretanja materijalne tačke za zadate početne uslove:

$$s(t) = s_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

Kretanje odredjeno ovim zakonom je oscilatorno kretanje frekvencije $\omega = const$ i perioda oscilovanja:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = const$$

Kako su kružna frekvencija, a sa tim i period oscilovanja materijalne tačke pri kretanju po cikloidi konstantni, to sledi da je ***oscilovanje izohrono***. Cikloidno klatno ima i osobinu ***tautohronosti,*** a to je da materijalna tačka pustena bez početne brzine iz različitih položaja sa cikloide pri kretanju po cikloidi za isto vreme stiže u najniži položaj - položaj ravnoteže. To pokazujemo na sledeći način: Neka je materijalna tačka puštena bez početne brzine da se kreće po cikloidi pod dejstvom zemljine teže onda su njihovi zakoni kretanja:

$s_1(t) = s_{01}\cos\omega t$ i

$s_2(t) = s_{02}\cos\omega t$

postavljamo pitanje za koje će vrema materijalna tačka stići u položaj $s_1(t_1) = 0$ i $s_2(t_2) = 0$ te dobijamo da je

$$t_1 = t_2 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4},$$

čime smo dokazali osobinu tautohronosti. Kako dobijeno rešenje za zadate početne uslove možemo napisati i u obliku

$$s(t) = s_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = S\cos(\omega t + \varphi_0)$$

gde je $S = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ amplituda oscilovanja, a $\varphi_0 = arctg\frac{v_0}{\omega s_0}$ faza oscilovanja, to nam taj oblik rešenja omogućava da zajljučimo da se radi o kretanju oscilatornog karaktera konstantne amplitude i faze, koje zavise od početnih uslova, ali da je konstantne frekvencije ω koja ne zavisi od početnih uslova i da je svojstvena vrednost ovog kretanja i zavisi samo od parametara cikloide - prolupречnika R kruga koji je opisuje, ali ne i od početnih uslova.

Da sada rezimiramo: Cikloidno klatno ima tri važne osobine, dve koje smo dokazali i treću koju treba dokazati.

1* Osobina ***izohronosti***, je posledica nezavisnosti perioda oscilovanja, a sa tim i frekvencije oscilovanja od početnih uslova, već samo od parametara cikloide - putanje kretanja materijalne tačke, a to znači od poluprečnika kruga kojim se opisuje i drfiniše cikloida.

2* Osobina ***tautohronosti*** je posledica izohronosti oscilovanja, jer period oscilovanja ne zavisi od početnih uslova i sa tim za različite početne uslove materijalna tačka za isto vreme izvodi jednu oscilaciju, pa na taj način i puštena bez početne brzine sa različitih položaja na putanji, za isto vreme stiže u teme cikloide N_0.

3* Treća osobina je ***brahistohronost.*** Ova osobina kaže da je vreme pada teške materijalne tačke po cikloidi u vertikalnoj ravni najmanje u poredjenju sa vremenom kretanja materijalne tačke po drugim krivim linijama ili pravoj liniji. Da bi se dokazala ova osobina potrebno je koriistiti varijacioni račun i teoremu o promeni kinetičke energije.

Pretpostavimo da se materijalna tačka, bez početne brzine, spušta u vertikalnoj ravni po nekoj krivoj liniji od tačke N_1 do tačke N_2, koje su na visinskoj razlici h onda je na osnovu teoreme o promeni kinetičke energije:

$$E_k - E_{k0} = mgh$$

$$v^2 = 2gh = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+(z')^2}$$

$$dt = \sqrt{\frac{1+(z')^2}{2gz}}dx \qquad t = \int_0^t \sqrt{\frac{1+(z')^2}{2gz}}dx$$

Sada pomoću integrala $t = \int_0^t \sqrt{\frac{1+(z')^2}{2gz}}dx$ treba odrediti krivu liniju po kojoj treba da se kreće teška materijalna tačka, a da to vreme bude minimalno.

Znači, ***linija koja ima osobinu da je vreme prelaska od jednog do drugog položaja pod dejstvom sile teže naziva se brahistohrona****.*

Problem ***brahistohrone*** svodi se na odredjivanje funkcije $z = f(x)$ pod uslovom da vreme prelaska *od jednog do drugog položaja pod dejstvom sile teže bude minimalno, tj, da prethodni odredjeni integral ima ekstremnu vrednost.*

Označimo sa $\chi(z,z') = \sqrt{\frac{1+(z')^2}{2gz}}$ podintegralnu funkciju, te prethodni integral ima oblik:

$$t = \int_0^t \chi(z,z')dx$$

Da bi prethodni integral imao ekstremnu vrednost potrebno je da prva varijacija tog integrala bude jednaka nuli:

$$\delta t = \delta\int_0^t \chi(z,z')dx = 0$$

te odatle sledi uslov, poznat u literaturi kao Ojlerova (*Leonid Euler*) diferencijalna jednačina :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\chi(z,z')}{\partial z'}\right) - \frac{\partial\chi(z,z')}{\partial z} = 0$$

Kako je

$$\left(\frac{\partial\chi(z,z')}{\partial z'}\right) = z'\left\{2gz\left[1+(z')^2\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

To na osnovu Ojlerove jadnačine dobijamo:

$$\frac{d}{dx}\left\{z'\left\{2gz\left[1+(z')^2\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+(z')^2}{2gz^3}} = 0$$

čijim se rešavanjem dobija jednačina cikloide.

Kretanje teške materijalne tačke po paraboli u vertikalnoj ravni

Proučimo kretanje materijalne tačke mase m koja se kreće pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli,ikalnoj ravni, jednačine $y = 4px^2$, gde je $p\left[m^{-1}\right]$ parametar dimenzione saglasnosti, a puštena je iz početnog položaja $N_0(x_0, y_0)$ odnosno $N_0(s_0)$ da pada po paraboli bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u vertikalnoj ravni. Odtediti Lagrangev množplac veze, kao i koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?

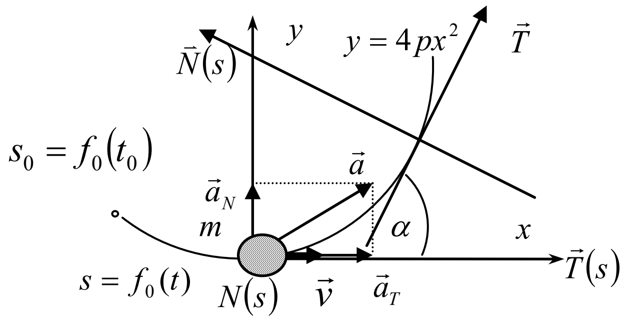
Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes+ove koordinate (x, y, z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde paraboli, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija – parabola u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je $f(x, y) = y - 4x^2 = 0$. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna.

Zadatkom se traži da se napišu jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole kada je izložena dejstvu dve geometrijske stacionarne veze i dejstvu sile sopstvene težine primenom principa dinamičke ravnoteže. Kako ova materijalna tačka ima, kako smo prethodnom analizom zaključili, jedan stepen slobode kretanja za generalisanu koordinatu izabraćemo put po luku parabole po kojoj se kreće i označićemo ga sa: s. Brzina materijalne tačke pada u pravac tangente na putanju, ovde na zadatu parabolu i iznosi

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \ .$$

Pravac tangente na putanju materijalne tačke – zadatu parabolom je definisan uglom α, i jasno je da je $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx} = y' = 8px$ za slučaj zadate parabole. Za primenu principa dinamičke ravnoteže potrebno je napraviti analizu sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku. Na materijalnu tačku dejstvuju sledeće sile: aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{j}$, a dejstvom veza javlja se sila otpora veza koja je upravna na liniju putanje i može se izraziti u obliku $\vec{F}_{wN} = \vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x, y)$, jer se radi o idealnim vezama $z = 0$ ***i*** $f(x, y) = y - 4px^2 = 0$**,** pa nema tangencijalne komponente. Analizom zaključujemo da se radi o kretanju u ravni xOy**.** Javlja se i sila inercije koja je suprotno smerna od vektora ubrzanja materijalne tačke pomoženog masom, što je definisano jednom od definicija vektorskih invarijanti dinamike materijalne tačke. Za silu inercije možemo da napišemo: $\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$. U ovom slučaju radi jednostavnosti rešavanja zadatka dobro je koristiti prirodni koordinatni sistem linije putanje kretanja materijalne tačke, ali se jednačine kretanja mogu napisati i u Descartes'ž-ovom sistemu koordinata.



Princip dinamičke ravnoteže smo formulisali sledećim iskazom:
Materijalno kruto telo je u ***dinamičkoj ravnoteži*** *ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda \, grad \; f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda \, grad \; f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} + \lambda \, grad \; f(x,y,z) = 0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze

$$\left(\vec{v}(t), grad \; f(x,y,z)\right) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda \, grad \; f(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze I to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuju dve geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda_1 \, grad \; f_1(x,y,z) + \lambda_2 grad f_2(x,y,z) = 0$$

gde su λ_1 i λ_2 nepoznati Lagrange-ovi množioci veza $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na obe površi veza, odnosno liniju

$$\left(\vec{v}(t), grad \; f_1(x,y,z)\right) = 0 \quad \text{i} \quad \left(\vec{v}(t), grad \; f_2(x,y,z)\right) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda_1 \, grad \; f_1(x,y,z) + \lambda_2 grad f_2(x,y,z)$ je upravna na tangentu na presečnu krivu obe površi idealne veze I to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i linije po kojoj se kreće .

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda \, grad \; f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad \left(\vec{v}(t), grad \; f(x,y,z)\right) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

a R je poluprečnik krivine $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$.

Element luka s duž parabole – putanje materijalne tačke je:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju smo napisali:

$(-m\vec{a}) + m\vec{g} + \lambda\, grad\;\; f(x,y,z) = 0$ i uslov brzine $\left(\vec{v}(t), grad\; f(x,y,z)\right) = 0$

ili

$$(-m\vec{a}_N) + (-m\vec{a}_T) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

Iz prikazanih vektorskih jednačina možemo napisati odgovarajući broj skaranih jednačina. Iz prvohžg zapisa možemo da napišemo dve diferencijalne jednačine :

$$(-m\ddot{x}) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$(-m\ddot{y}) + (-mg) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i uslov za brzinu

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ili kako je $f(x,y) = y - 4px^2 = 0$, prethodni sistem diferencijalnih jednačina i uslov za brzinu postaju:

$$(-m\ddot{x}) - 8\lambda px = 0$$

$$(-m\ddot{y}) + (-mg) + \lambda = 0$$

$$-8p\dot{x}x + \dot{y} = 0$$

U Descartes-ovom sistemu koordinata smo dobili dve diferencijalne jednačine i jedan uslov za brzinu, iz kojih treba odrediti Lagrange-ov množilac veze i dve koordinate što nije tako prost zadatak. Zato čemo se ovde i zaustaviti jer je zadatkom tražemo da se napišu diferencijalne jednačine.

Lagrange-ov množilac veze je:

$$\lambda = m(\ddot{y} + g) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)$$

i sila otpora veze je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\; f(x,y,z) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)\left(-8px\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Pri tome je potrebno prethodno rešiti nelinearnu diferencijalnu jednačinu:

$$\ddot{x} + 8px\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right) = 0 \qquad y = 4px^2$$

po koordinati x koju smo u Descartes-ovom sistemu koordinata izabrali za generalisanu koordinatu.

Kako je:

$$\ddot{x}\left(1+64p^2x^2\right)=-8px\left(8p\dot{x}^2+g\right) \qquad \ddot{x}=-\frac{8px\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Sledi da je

$$\lambda=m\left(8p\dot{x}^2-64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+g\right)=m\left(\frac{8p\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}-64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+\frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right)=$$

$$=m\left(\frac{8p\dot{x}^2+8p\dot{x}^2 64p^2x^2}{\left(1+64p^2x^2\right)}-\frac{\left(8p\dot{x}^2 64p^2x^2+g64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+\frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right)=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

I konačno se za Lagrange-ov množilac veze dobija izraz preko kvadeata horizontalne komponente brzive i kvadrata apscise položaja materijalne tačke na paraboli.:

$$\lambda=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Normalna komponenta otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po idealno glatkoj paraboli u vektorskom obliku je:

$$\vec{F}_w=\vec{F}_N=\lambda\, grad\ f(x,y,z)=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}\left(-8px\vec{i}+\vec{j}\right)$$

što predstavlja izraz u funkciji zavisnosti od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Intenzitet normalne komponente otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po paraboli

$$\left|\vec{F}_w\right|=F_w=\left|\vec{F}_N\right|=F_N=m\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$$

i zavisi samo od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Drugi pristup je da vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po paraboli pod dejstvom sopstvene težine anliziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanjue. Zato ćemo razmotriti u drugom obliku istu vektorsku jednačinu dinamičke ravcnoteže te materijalne tačke na paraboli:

$$\left(-m\vec{a}_N\right)+\left(-m\vec{a}_T\right)+m\vec{g}+\vec{F}_{N.}=0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T=\dot{v}\vec{T}=\ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N=\dfrac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right)+\left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right)+mg\left(-\sin\alpha\vec{T}-\cos\alpha\vec{N}\right)+F_{N.}\vec{N}=0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ parabole, ose oskulatorne ravni parabole dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s}-mg\sin\alpha=0$, u pravcu tangente na putanbju – na parabolu

$-m\dfrac{v^2}{R_k}-mg\cos\alpha+F_N=0$, u pravcu normale na putanju - na parabolu

gde je poluprečnik krivine: $R_k=\dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}=\dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$, $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se odredi otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$F_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg(y - y_0) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y).$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže za pravac normale sledi:

$$F_N = \frac{mv_0^2}{R_k} + 2\frac{mg}{R_k}(y_0 - y) + \frac{mg}{\sqrt{1+64p^2x^2}}.$$

Kako je $y = 4px^2$ to je kvadrat brzune:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)$$

Pa imajući u vidu izraz za poluprečnik krivine izraz za otpor veze možemo da napišemo u sledećem obliku:

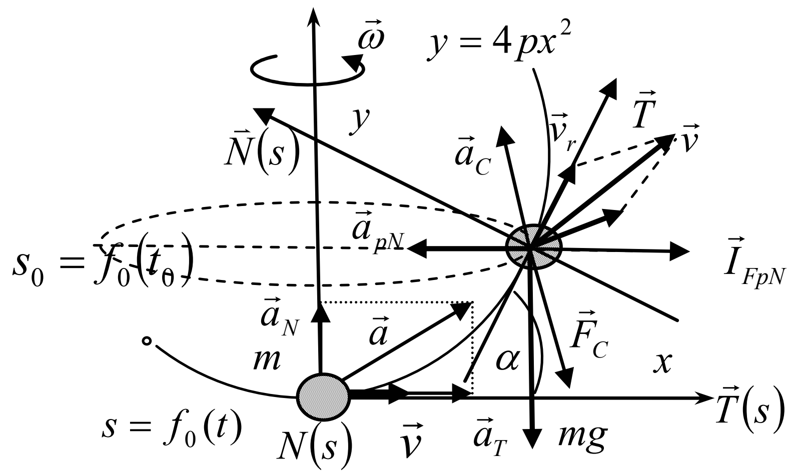
$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha = m\frac{8p\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}} + mg\frac{1}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)}} = \frac{m\left(8p\dot{x}^2 + g\right)}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)}}$$

To je identičan izraz koji smo za silu otpora idealne veze dobili i preko rešavanja zadatka u Descartes'ovom sistemu koordinata.

.

Relativno kretanje materijalne tačke po paraboli koja rotira oko vertikalne ose

Proučimo relativno kretanje materijalne tačke mase m koja se kreće pod dejstvom sile težine po glatkoj, rotiorajučoj oko svoje vertikalne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, paraboli, jednačine $y = 4px^2$, gde je $p\left[m^{-1}\right]$ parametar dimenzione saglasnosti, a puštena je iz početnog položaja $N_0(x_0, y_0)$ odnosno $N_0(s_0)$ da pada po paraboli bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže relativnog kretanja posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u rotirajućoj, ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, vertikalnoj ravni. Odtediti Lagrangev množplac veze, kao i koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?



Rešenje: Ovde je relativno kretanje materijalne tačke po paraboli, koja je ovde suport koji izvodi prenosno kretanje konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ **.** Prenosno ubrzanje je jednako normalnom obrzanju pri kružnom kretanju

$$\vec{a}_{pN} = -x\omega^2 \vec{r}_0 \qquad \vec{r}_0 = \vec{N}_r \cos\alpha + \vec{T}_r \sin\alpha$$

Te je sila inercija prenosnog kretanja

$$\vec{F}_{pN} = -m\vec{a}_{pN} = mx\omega^2 \vec{r}_0$$

Koriolisovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = 2\begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{c}_0 & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{s}\sin\alpha & 0 & \dot{s}\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\vec{c}_0 \dot{s}\omega \sin\alpha = 2\vec{c}_0 \dot{s}\omega \frac{ds}{dy} = 2\vec{c}_0 \dot{s}\omega \frac{\sqrt{1+(y'_x)^2}}{y'_x}$$

$$\sin\alpha = \frac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$$

Koriolisova sila inercije je:

$$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = -2m\vec{c}_0 \dot{s}\omega \sin\alpha = -2m\dot{s}\omega \frac{\sqrt{1+(y'_x)^2}}{y'_x} \vec{c}_0 = -m\dot{s}\omega \frac{16px}{\sqrt{1+64p^2x^2}} \vec{c}_0$$

Vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se relativno kreće po paraboli pod dejstvom sopstvene težine, pri čemu se parabola obrće konstantnom ugaonom brzinom sastavljamo u prirodnom sistemu koordinata njene relativne putanjue. Zato za vektorsku jednačinu dinamičke ravcnoteže te materijalne tačke pišemo sledeće:

$$(-m\vec{a}_{rN}) + (-m\vec{a}_{rT}) + (-m\vec{a}_{pN}) + (-m\vec{a}_C) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_{rT} = \dot{v}_r \vec{T}_r = \ddot{s}\vec{T}_r$ i $\vec{a}_N = \frac{v_r^2}{R_{kr}} \vec{N}_r$, to je i

$$(-m\ddot{s}\vec{T}_r) + \left(-m\frac{v_r^2}{R_{kr}}\vec{N}_r\right) + mx\omega^2 \vec{r}_0 + (-2m\vec{c}_0 \dot{s}\omega \sin\alpha) + mg(-\sin\alpha \vec{T}_r + \cos\alpha \vec{N}_r) + \vec{F}_{N.} = 0$$

Ili $\vec{r}_0 = \vec{N}_r \cos\alpha - \vec{T}_r \sin\alpha$

$$(-m\ddot{s}\vec{T}_r) + \left(-m\frac{v_r^2}{R_{kr}}\vec{N}_r\right) - mx\omega^2 (\vec{N}_r \cos\alpha + \vec{T}_r \sin\alpha) + (-2m\vec{c}_0 \dot{s}\omega \sin\alpha) + mg(-\sin\alpha \vec{T}_r + \cos\alpha \vec{N}_r) + \vec{F}_{N.} = 0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ parabole, ose oskulatorne ravni parabole dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s} - mg\sin\alpha - mx\omega^2\sin\alpha = 0$,   u pravcu tangente na putanbju – na parabolu ????

$-m\dfrac{v^2}{R_{kr}} + mx\omega^2\cos\alpha - mg\cos\alpha + F_{NNr} = 0$, u pravcu normale na putanju - na parabolu

$$-2m\dot{s}\omega\sin\alpha + F_{Nc} = 0$$

gde je poluprečnik krivine: $R_{kr} = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$,

$$ds_r = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2} \ .$$

Sada je jednačina relativnog kretanja:

$$\ddot{s} + g\sin\alpha + x\omega^2\sin\alpha = 0$$

te je diferencijalna jednačina relativnog kretanja nelinearna i u obliku:

$$\frac{d}{dt}\left\{\dot{x}\sqrt{1+64p^2x^2}\right\} + \left(g + x\omega^2\right)\frac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}} = 0$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteđe u pravcu normale na parabolu odredjujemo komponentu otpora veze u pravcu normale na parabolu i u ravni parabole. Kako je $y = 4px^2$ to je kvadrat brzune relativnog kretanja po paraboli:

$$v_r^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)$$

Pa imajući u vidu izraz za poluprečnik krivine izraz za otpor veze u pravcu normale na parabolu i u ravni parabole možemo da napišemo u sledećem obliku:

$F_{NNr} = m\dfrac{v^2}{R_{kr}} - mx\omega^2\cos\alpha + mg\cos\alpha$????

Odnosno,

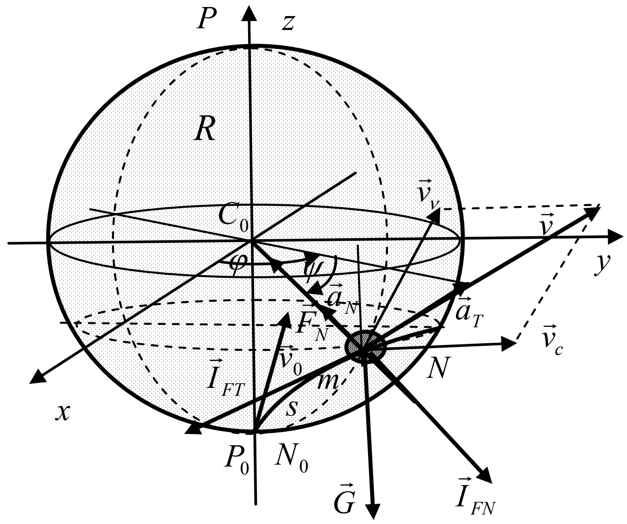
$F_{NNr} = m\dfrac{8p\dot{x}^2 + \left(g - x\omega^2\right)}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)}}$????

Iz treće jednačine odredjujemo izraz za otpor veze u pravcu normale na parabolu i upravno na ravni parabole u sledećem obliku:

$F_{Nc} = 2m\dot{s}\omega\sin\alpha = 2m\dot{x}\omega\sqrt{1+64p^2x^2}\,\dfrac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}} = 16pm\omega\dot{x}x$????

Student koji prvi donese korekciju ili potvrdi tačnost rešenja prethodnog zadatka može dobiiti 5 poena na ime poena kolokvijuma, kao rezervne poene.

Kretanje materijalne tačke po sferi pod dejstvom Zemljine teže
Matematičko klatno, sekundno klatno, konusno klatno



Posmatrajmo sada kretanje teške materijalne tačke po sfernoj nepokretnoj površi, kako je to prikazanao na slici. Na materijalnu tačku dejstvuje jedna veza. Usvojićemo dva sistema koordinata sa koordinatnom početku O. Znači usvajamo jedan Dekartov (Descartes) $Oxyz$ u kome je položaj $N(x,y,z)$ pokretne materijalne tačke odredjen koordinatama $x(t), y(t), z(t)$ i drugi ortogonalni krivolinijki sfernih koordinata $O\rho\varphi\psi$, u kome je položaj $N(\rho,\varphi,\psi)$ pokretne materijalne tačke odredjen koordinatama $\rho(t),\varphi(t),\psi(t)$. Jednačina veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku u Dekartovom sistemu koordinata $Oxyz$ je

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

dok je u sfernom sistemu koordinata $O\rho\varphi\psi$ jednačina te iste veze

$$f(\rho,\varphi,\psi) = \rho - R = 0$$

i vidimo da zavisi samo od jedne koordinate. Kako na pokretnu materijalnu tačku dejstvuje samo jedna veza to znači da ona ima dva stepena slobode kretanja, pa se njen položaj u svakom trenutku može odrediti dvema nezavisnim koordinatama i trećom koja će biti izražena pomoću izabranih generalisanih koordinata.

Ako rešimo da zadatak rešavamo u Descartes-vom sistemu koordinata onda možemo za generalisane koordinate da izaberemo koordinate x i y, a da treću koordinatu kojom se potpuno odredjuje položaj pokretne materijalne tačke izrazimo pomožu izabranih generalisanih koordinata korišđenjem jednaćine veze u obliku: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Na materijalnu tačku dejstvuje sila težine $\vec{G} = -mg\vec{k}$, i sila otpora dejstvu idealne veze

$$\vec{F}_{wN} = \lambda m \,\mathrm{grad} f(x,y,z) = 2\lambda m\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = 2\lambda m\vec{\rho}$$

gde je λm nepoznat Lagrangeov množilac veze, i sila inercije

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right)$$

Na osnovu principa dinamićke ravnoteže možemo da sastavimo vektorsku jednačinu dinamićke ravnoteže pokretne materijalne tačke:

$$\vec{I}_F + \vec{G} + \vec{F}_{wN} = 0$$

ili

$$-m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right) + 2\lambda m\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) - mg\vec{k} = 0$$

i iz te jednačine skalarnim množenjem redom ortovima koordinatnih osa, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ možemo da dobijemo tri skalarne jednačine dinamičke ravnoteže pokretne materijalne tačke u obliku:

$$\ddot{x} = 2\lambda x$$
$$\ddot{y} = 2\lambda y$$
$$\ddot{z} = 2\lambda z - g$$

kojima pridružujemo jednačinu veze

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \text{ili} \quad z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

u kojima su nepoznate tri koordinate tačke i Lagrangeov množilac veze λm. Uslov za brzinu $\vec{v}$ materijalne tačke je:

$$(\vec{v}, grad f(x,y,z)) = 0$$

ili za ubrzanje:

$$(\vec{a}, grad f(x,y,z)) + \left(\vec{v}.\frac{d}{dt} grad f(x,y,z)\right) = 0$$

što u razvijemom obliku daje:

$$\vec{F}_{wN} = \lambda m grad f(x,y,z) = 2\lambda m\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = 2\lambda m\vec{\rho}$$

$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

Te za rešavanje postavljenog zadatka imamo sledeći sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x} = 2\lambda x$$
$$\ddot{y} = 2\lambda y$$
$$\ddot{z} = 2\lambda z - g$$
$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

iz koga se prvo može odrediti nepoznati Lagrangeov množilac veze λm.

$$2\lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - z\frac{g}{2\lambda}\right) + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

ili

$$2\lambda R^2 - zg + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

ili

$$\lambda = \frac{zg - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{2R^2}$$

odnosno

$$\lambda = \frac{zg - v^2}{2R^2}$$

Otpor veze je sada:

$$\vec{F}_{wN} = \lambda m grad f(x,y,z) = m\frac{zg - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{R^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = m\frac{zg - v^2}{R^2}\vec{\rho}$$

dok su diferencijalne jednačine kretanja:

$$\ddot{x} = \frac{zg - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{R^2}x$$

$$\ddot{y} = \frac{zg - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{R^2}y$$

$$\ddot{z} = \frac{zg - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{R^2}z - g$$

I vidimo da su sve tri spregnute i nelinearne i da je problem rešiti ih. Zato se sada opredeljujemo za sferni sistem koordinata da u njemu napišemo vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže i ispitamo mogućnost lakšeg i elegantnijeg rešavanja ovog postavljenog zadatka kretanja teške materijalne tačke po sferi.

Kako smo se sada opredelili na pokušaj da postavljeni zadatak rešavamo u ortogonalnom krivolinijskom sfernom sistemu koordinata, to možemo za generalisane koordinate da izaberemo koordinate φ i ψ, a da treću koordinatu kojom se potpuno odredjuje položaj pokretne materijalne tačke izrazimo pomožu izabranih generalisanih koordinata korišćenjem jednaćine veze u obliku: $f(\rho,\varphi,\psi)=\rho-R=0$, odakle sledi da je $\rho=R$. Na materijalnu tačku dejstvuje sila težine

$$\vec{G}=-mg\vec{k}=-mg(\vec{v}_0\cos\psi+\vec{\rho}_0\sin\psi),$$

i sila otpora dejstvu idealne veze

$$\vec{F}_{wN}=-F_{wN}\vec{\rho}_0$$

i sila inercije

$$\vec{I}_F=-m\vec{a}=-m(a_\rho\vec{\rho}_0+a_c\vec{c}_0+\vec{a}_\psi\vec{v}_0)$$

Na osnovu principa dinamićke ravnoteže možemo da sastavimo vektorsku jednačinu dinamićke ravnoteže pokretne materijalne tačke po sferi je:

$$\vec{I}_F+\vec{G}+\vec{F}_{wN}=0$$

ili

$$-m(a_\rho\vec{\rho}_0+a_c\vec{c}_0+\vec{a}_\psi\vec{v}_0)-mg(\vec{v}_0\cos\psi+\vec{\rho}_0\sin\psi)-F_{wN}\vec{\rho}_0=0$$

Množenjem prethodne vektorske jednačine skalarno redom sa ortovima $(\vec{\rho}_0,\vec{c}_0,\vec{v}_0)$ sfernog sistema koordinata dobijamo:

$$a_\rho=-g\sin\psi-\frac{1}{m}F_{wN}$$

$$a_c=0$$

$$a_\psi=-g\cos\psi$$

Ako sada uzmemo u obzir da su koordinate vektora ubrzanja u sfernom sistemu koordinata:

$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi-\rho\dot{\psi}^2)\vec{\rho}_0+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi)\vec{c}_0+\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\psi})+\rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0,$$

a kako je veza koja dejstvuje na materijalnu tačku sfera, to je $\rho=R=const$, te se izrazi za ubrzanje u sfernom sistemu koordinata uprošćavaju:

$$\vec{a}=-R(\dot{\varphi}^2\cos^2\psi+\dot{\psi}^2)\vec{\rho}_0+\frac{R}{\cos\psi}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\cos^2\psi)\vec{c}_0+R[\ddot{\psi}+\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi]\vec{v}_0,$$

i sada jednačine dinamičke ravnoteže pokretne materijalne tačke možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$-R(\dot{\varphi}^2\cos^2\psi+\dot{\psi}^2)=-g\sin\psi-\frac{1}{m}F_{wN}$$

$$\frac{R}{\cos\psi}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\cos^2\psi)=0$$

$$R[\ddot{\psi}+\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi]=-g\cos\psi$$

Iz druge diferencijalne jednačine integraljenjem dobijamo da je

$$\dot{\varphi}R^2\cos^2\psi=\cos nt=2S_z=R^2C$$

$$\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0=C$$

odakle zaključujemo da je sektorska brzina materijalne tačke za osu z konstantna.

Kako je sada

$$\dot{\varphi}=\frac{C}{\cos^2\psi}=\frac{\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0}{\cos^2\psi}$$

gde su $\dot{\varphi}_0$ i ψ_0, vrednosti cirkularne ugaone brzine i meridionalni ugao u početnom trenutku, to unošenjem tog izraza u prvu u treću diferencijalnu jednačinu prethodnog sistema skalarnih jednačina dinamičke ravnoteže materijalne tačke na sferi dobijamo silu otpora veze F_{wN} i diferencijalnu jednačinu kretanja po meridionalnoj koordinati ψ, koju smo izabrali za jednu od generalisanih koordinata:

$$F_{wN} = -mg\sin\psi + mR\left(\frac{C^2}{\cos^2\psi} + \dot{\psi}^2\right)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{C^2}{\cos^3\psi}\sin\psi + \frac{g}{R}\cos\psi = 0$$

Iz dobijenih jednačina vidimo daje poslednja nelinearna diferencijalna jednačina samo po nepoznatoj meriodionalnoj koordinati - uglu $\psi(t)$ i da je nezavisna od ostalih i da se može nezavisno integraliti, a da se unošenjem njenog rešenja u prvu dobija izraz za odredjivanje normalnog pritiska idealne veze ' sfere, koja dejstvuje kao zadržavajuća veza na pokretnu materijalnu tačku, a da se unošenjem u integral koji smo dobili po cirkularnoj koordinati φ može odrediti ugaona brzina $\dot{\varphi}(t)$ čime je zadatak principijelno rešen i doveden do ''elegantnijih'' - jednostavnijih i nespregnutih jednačina i izraza nego u slićaju rešavanja postavljenog zadatka u Dekartovom sistemu koordinata. Medjutim ostaje opšti problem rešavanja nelinearne diferencijalne jednačine po meriodionalnoj koordinati uglu $\psi(t)$:

$$\ddot{\psi} + \frac{C^2}{\cos^3\psi}\sin\psi + \frac{g}{R}\cos\psi = 0$$

Ona se može jedamput integraliti u opštem obliku, jer razdvaja promenljive integracije, ali problem dovodjenja do konačnog rešenja ostaje, iako smo izborom sfernog sistema koordinata zadatak doveli do tog višeg nivoa bližeg rešenju, u odnosu na problem rešavanja tri spregunte nelinearne diferencijalne jednačine u Dekartovom sistemu koordinata. Dobijena nelinearna diferencijalna jednačina po meriodionalnoj koordinati uglu $\psi(t)$ omogućava da lako proučimo neke specijalne njene slučajeve, čemu takodje posvetiti pažnju, a koji nisu lako vidljivi kada se ovaj zadatak rešava u sistemu Descartes-ovih koordinata.

Pomnožimo prethodnu diferencijalnu jednačinu diferencijalom $d\psi = \dot{\psi}dt$ meridionalne koordinate i jednačinu prepišimo u sledećem obliku

$$\frac{d\dot{\psi}}{dt}\dot{\psi}dt + \frac{C^2}{\cos^3\psi}\sin\psi d\psi + \frac{g}{R}\cos\psi d\psi = 0$$

ili

$$2\dot{\psi}d\dot{\psi} = 2\frac{C^2}{\cos^3\psi}d(\cos\psi) - 2\frac{g}{R}\cos\psi d\psi$$

koja posle integraljenja postaje

$$\dot{\psi}^2 - \dot{\psi}_0^2 = C^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}(\sin\psi_0 - \sin\psi)$$

odnosno

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 + C^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}(\sin\psi_0 - \sin\psi)$$

ili

$$v_\psi^2 = R^2\dot{\psi}^2 = R^2\dot{\psi}_0^2 + (\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0)^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2gR(\sin\psi_0 - \sin\psi)$$

što predstavlja kvadrat komponente brzine u meridionalnom pravcu. To je i drugi integral koji smo dobili i on odgovara integralu energije, jer je sistem konzervativan. Tako smo dobili dva integrala. integral površine. koji odgovara konstantnoj sektorskoj brzini za osu kroz centar sfere i za pravac paralelan napadnoj liniji sile težine.

Koristeći sada ovaj integral možemo, da silu otpora pokretne materijalne tačke dejstvu veze, kao prinudi matarijalne tačke za kretanje po nepokretnoj sferi, napišemo u obliku:

$$F_{wN} = -mg\sin\psi + mR\left(\frac{C^2}{\cos^2\psi} + \dot{\psi}^2\right)$$

i vidimo da je izražena samo u funkciji meridionalne koordinate ψ i poćetnih uslova kretanja - $\dot{\varphi}_0$ i ψ_0, vrednosti cirkularne ugaone brzine i meridionalnog ugla u početnom trenutku:

$$F_{wN} = -mg\sin\psi + mR\left[\frac{\dot{\varphi}_0^2\cos^4\psi_0}{\cos^2\psi} + \dot{\psi}_0^2 + \dot{\varphi}_0^2\cos^4\psi_0\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right)\right].$$

I konačno izraz za silu F_{wN} otpora pokretne materijalne tačke dejstvu sferne veze dobijamo u funkciji meridionalne koordinate ψ i početnog položaja po meridionalnoj koordinati ψ_0 i poćetnih ugaonih brzina meridonalne $\dot{\psi}_0$ i cirkularne $\dot{\varphi}_0$ kretanja materijalne tačke u obliku:

$$F_{wN} = mR\left[\frac{g}{R}\left(-3\sin\psi + 2\sin\psi_0\right) + \left(\dot{\psi}_0^2 + \dot{\varphi}_0^2\cos^2\psi_0\right)\right]$$

Kao je brzina materijalne tačke u sistemu sfernih koordinata

Brzina materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u ***sistemu sfernih koordinata*** (r,φ,ψ) je :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{\rho}_0 + \rho\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\varphi}\cos\psi\vec{c}_0 + \rho\dot{\psi}\vec{v}_0,$$

a za slučaj kretanja po sferi taj izraz se uprošćava na:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{\rho}_0 + \rho\frac{d\vec{r}_0}{dt} = R\left(\dot{\varphi}\cos\psi\vec{c}_0 + \dot{\psi}\vec{v}_0\right)$$

te je kvadrat brzine kretanja materijalne tačke po sferi:

$$\vec{v}^2 = v^2 = R^2\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\psi + \dot{\psi}^2\right)$$

dok je početna brzina:

$$v_0^2 = R^2\left(\dot{\varphi}_0^2\cos^2\psi_0 + \dot{\psi}_0^2\right)$$

te sledi:

$$\vec{F}_{wN} = -mR\left[\frac{g}{R}\left(-3\sin\psi + 2\sin\psi_0\right) + \left(\dot{\psi}_0^2 + \dot{\varphi}_0^2\cos^2\psi_0\right)\right]\overline{\rho}_0$$

$$\vec{F}_{wN} = -mR\left[\frac{g}{R}\left(-3\sin\psi + 2\sin\psi_0\right) + \frac{v_0^2}{R^2}\right]\overline{\rho}_0$$

Za slučaj da meridionalnu koordinatu ψ, ne merimo od horizontalne ravni, kojoj odgovara naša usvojena ravan Oxy, već je merimo od vertikale, kojoj odgovara naša usvojena $-Oz$ osa, kada ćemo tu tako izabranu meridionalnu koordinatu obeležiti sa ϑ i koje su vezane realcijom $\vartheta = \psi + \frac{\pi}{2}$ izraz za otpor veze će biti

$$\vec{F}_{wN} = -mR\left[\frac{g}{R}\left(-3\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\vartheta_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{v_0^2}{R^2}\right]\overline{\rho}_0$$

$$\vec{F}_{wN} = -mR\left[\frac{g}{R}\left(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0\right) + \frac{v_0^2}{R^2}\right]\overline{\rho}_0$$

Sada se vraćamo na difrencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke po sferi izraženu pomoću meridionalne koordinate ψ koju treba rešiti:

$$\dot{\psi} = \sqrt{\dot{\psi}_0^2 + \left(\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0\right)^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right)}$$

U kojoj možemo razdvojiti promenljive integracije te dobijamo:

$$dt = \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\psi}_0^2 + \left(\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0\right)^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right)}}$$

odnosno

$$t - t_0 = \int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\psi}_0^2 + \left(\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0\right)^2\left(\frac{1}{\cos^2\psi_0} - \frac{1}{\cos^2\psi}\right) + 2\frac{g}{R}\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right)}}$$

čime smo formalno rešili zadatak, jer smo u implicitnom obliku dobili zakon $t = t(t_0, \psi, \psi_0)$. Međutim problem ostaje, jer je podintegralom funcija koju ne možemo direktro integraliti, već se moraju primeniti približne numeričke metode. Zato ćemo napraviti kvalitativnu analizu mogućih ređenja i proučiti neki od specijalnih slučajeva. Zato se vraćamo integralu podinegralnoj funkciji

$$\dot{\psi} = \sqrt{\dot{\psi}_0^2 + (\dot{\varphi}_0 \cos^2 \psi_0)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \psi_0} - \frac{1}{\cos^2 \psi} \right) + 2\frac{g}{R}(\sin\psi_0 - \sin\psi)}$$

Uzmimo smenu $\xi = \sin\psi$, kao i $\dot{\xi} = \dot{\psi}\cos\psi$ tako da izraz pod korenom u integralu dobijamo u sledećem obliku:

$$\dot{\xi}^2 = (1-\xi^2)\left\{ \dot{\psi}_0^2 + (\dot{\varphi}_0 \cos^2 \psi_0)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \psi_0} - \frac{1}{1-\xi^2} \right) + 2\frac{g}{R}(\sin\psi_0 - \xi) \right\}$$

odnosno u obliku

$$\dot{\xi}^2 = -2\frac{g}{R}\xi(1-\xi^2) + (1-\xi^2)\left\{ \dot{\psi}_0^2 + (\dot{\varphi}_0 \cos^2 \psi_0)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \psi_0} \right) + 2\frac{g}{R}\sin\psi_0 \right\} - (\dot{\varphi}_0 \cos^2 \psi_0)^2 = \chi(\xi)$$

i vidimo da je to funkcija $\chi(\xi)$ polinom trećeg stepena po ξ. Kako je

$$\dot{\xi} = \sqrt{\chi(\xi)}$$

to je

$$dt = \frac{d\xi}{\sqrt{\chi(\xi)}}$$

odnosno

$$t - t_0 = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\chi(\xi)}}$$

ili kako je $\psi = \arcsin\xi$ to je zadatak rešen.

Kako je, kako smo već konstantovali, funkcija $\chi(\xi)$ polinom trećeg stepena po ξ to može imati tri korena realna, dva ili jedan ili ni jedan realan koren, ali važno je i da su ti koreni u intervalu $-1 < \xi_s < 1$. Ovaj uslov je vezan sa domenom površi sfere jer je $\xi = \sin\psi$, i koreni koji ne zadovoljavaju prethodni uslov nemaju fizički smisao u sadržaju postavljenog zadatka.. Od toga će i zavisiti karakter dobijenog zakona kretanja materijalne tačke, a to zavisi od zadatih početnih uslova, odnosno od ukupne energije, koja je saopštena materijalnoj tački u početnom trenutku kretanja, jer je sistem konzervativan.

Ako taj polinom ima da realna korena, i oba zadovoljavaju postavljeni uslov, onda će se javiti oscilatorno kretanja materijalne tačke po sferi i to oscilatorno kretanje po pojasu sfere izmedju dva uporednika. Na tim uporednicima kada materijalna tačka bude na njima njena brzina će biti jednaka nuli, te će se ona dizati ili spuštati u odnosu na taj uporednik. Ti uporednici mogu biti sa raznih strana ekvatorijalne ravni $z = 0$ ili sa iste strane. .

Kako je

$$\dot{\varphi}\cos^2\psi = \dot{\varphi}_0 \cos^2\psi_0 = C = const$$

odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\cos^2\psi} = \frac{\dot{\varphi}_0 \cos^2 \psi_0}{\cos^2\psi}$$

to je ugaona brzina $\dot{\varphi}$ obrtanja u cirkulasrnom pravcu - oko vertikalne ose u odnosu na polje teže pozitivna i obrtanje je uvek u istom smeru. Ako je početna vrednost $\dot{\varphi}_0$ ugaone brzine $\dot{\varphi}$ obrtanja u cirkulasrnom pravcu jednaka nuli, onda se jednačina

$$R[\ddot{\psi} + \dot{\varphi}^2 \cos\psi \sin\psi] = -g\cos\psi$$

ili

$$\ddot{\psi}+\frac{C^2}{\cos^3\psi}\sin\psi+\frac{g}{R}\cos\psi=0$$

svodi na oblik:

$$\ddot{\psi}+\frac{g}{R}\cos\psi=0,\quad \dot{\varphi}=0$$

ili za slučaj da meridionalnu koordinatu ψ, ne merimo od horizontalne ravni, kojoj odgovara naša usvojena ravan Oxy, već je merimo od vertikale, kojoj odgovara naša usvojena $-Oz$ osa, kada je meridionalna koordinata $\vartheta=\psi+\frac{\pi}{2}$ prethodna jednačina dobija oblik:

$$\ddot{\vartheta}+\frac{g}{R}\sin\vartheta=0\,,\ \dot{\varphi}=0$$

i materijalna tačka po sferi izvodi kretanje po meridijanu i u jednoj ravni meridija sfere, odredjenoj sa $\varphi=const$, a putanja je krug. To je slučaj klatna koje osciluje u polju Zemljine teže i kreće se po krugu u jednoj ravni ili pak progresivne rotacije ugaonom brzinom $\dot{\psi}$ ili $\dot{\vartheta}$ u meridionalnom pravcu zavisno od početne ugaone brzine $\dot{\vartheta}_0$ i početne ugaone elongacije ϑ_0 u meridionalnom pravcu, odnodno od energije koja je saopštena materijalnoj tački u početnom trenutku. Ako su male početna ugaona brzina $\dot{\vartheta}_0$ i početni ugaoni pomeraj ϑ_0 u odnosu na najnižu tačku na krugu mali onda umesto nelinearne diferencijalne jednačine $\ddot{\vartheta}+\frac{g}{R}\sin\vartheta=0$ možemo koristiti linearizovanu

$$\ddot{\vartheta}+\frac{g}{R}\vartheta=0\,,\ \dot{\varphi}=0$$

koja je oblika harmonijskog oscilatora

$$\ddot{\vartheta}+\omega_0^2\vartheta=0\,,\ \dot{\varphi}=0$$

u kojoj je

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

pa imamo slučaj *matematičkog klatna,* čija kružna frekvencija ω_0 u linearizovanom modelu za male amplitude oscilovanja, ne zavisi od početnih uslova, nego je konstantna, pa je oscilovanje izohrono, kao i kod cikloidnog klatna, kod koga nismo vršili nikakvu linearizaciju. Period oscilovanja je $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.
Na slučaj kretanja materijalne tačke po krugu u vertikalnoj ravni vratićemo se ponovo.

A sada proučimo slučaj kada je ugaona brzina u meridionalnom pravcu $\dot{\psi}=0$ jednaka nuli, odnosno, meridionalni ugao konstantan i jednak vrednosti u početnom trenutku kretanja materijalne tačke $\psi(t_0)=\psi_0=const$, te materijalna tačka vrši obrtanje ugaonom brzinom u cirkularnom pravcu:

$$\dot{\varphi}^2\Big|_{\dot{\psi}=0}=\frac{\dot{\varphi}_0\cos^2\psi_0}{\cos^2\psi_0}=\dot{\varphi}_0=const\ ,\ \dot{\psi}=0$$

i ona je konstantna, te je rotacija jednolika, a materijalna taćka prinudjena da se kreće po jednom uporedniku sfere, konstantnom brzinom $v_c=R\dot{\varphi}_0\cos\psi_0=const$, a pri tome treba da je zadovoljen i uslov saglasnosti početmih uslova, te iz treće jednačine dinamičke ravnoteže sledi

$$R\left[\ddot{\psi}+\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]=-g\cos\psi$$

i dobijamo da je taj uslov saglasnosti početnih uslova oblika:

$$\dot{\varphi}^2\Big|_{\dot{\psi}=0}=-\frac{g}{R\sin\psi_0}=-\frac{g}{R\sin\left(\vartheta_0-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{g}{R\cos\vartheta_0}=\dot{\varphi}_0^2=const\,,\ \dot{\psi}=0$$

Kako vektor položaja materijalne tačke, sa polom u centru sfere, pri ovom kretanju opisuje konus čiji je basis krug meridijana poluprečina $r=R\cos\psi=R\sin\vartheta$, to je ovo kretanje materijalne tačke nazvano kretanjem ***konusnog klatna***. Materijalna tačka opiše konus - odnosno obiđe kosus za vreme

$$T_{kon} = \frac{2\pi}{\omega_{0kon}} = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\vartheta_{0kon}}{g}}$$

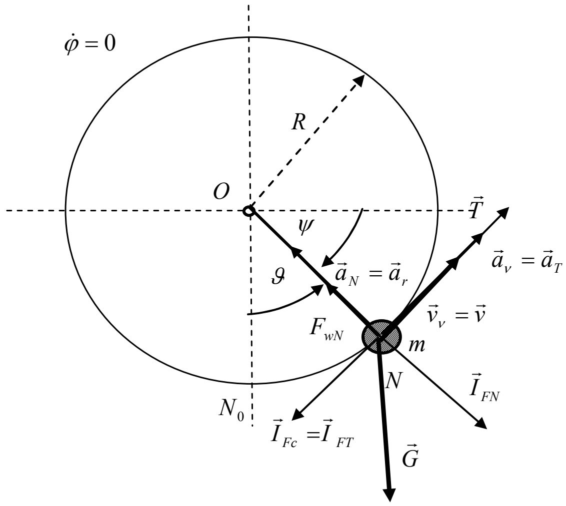
jer je ugaona brzina $\dot{\varphi}^2\big|_{\dot{\psi}=0}$ u cirkularnom pravcu istovremeno i kružna frekvencija ω_{0kon} rotacije materijalne tačke oko konusa koji opisuje:

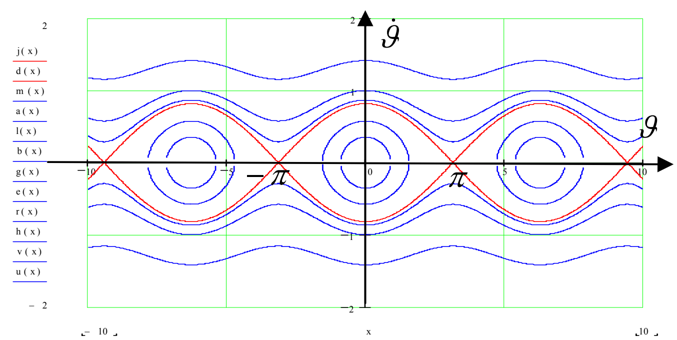
$$\dot{\varphi}^2\big|_{\dot{\psi}=0} = \frac{g}{R\cos\vartheta_{0kon}} = \omega_{0kon}^2 = const\,,\ \dot{\psi} = 0$$

Specijalan slučaj složenog konusnog klatna je sprega dva konusna klatna, a koja se u mašinstvu upotrebljavaju za regulaciju broja obrtaja i poznata su kao Watt-ov regulator.

Sada ćemo se zadržati na specijalnom slučaju kretanja materijalne tačke po krugu u vertikalnoj ravni kao specijalnom slučaju prinudnog kretanja materijalne tačke po sferi kada je:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{R}\sin\vartheta = 0\,,\ \dot{\varphi} = 0$$





$$\frac{d\dot{\vartheta}}{dt}2\dot{\vartheta}dt + 2\frac{g}{R}\sin\vartheta d\vartheta = 0$$

$$2\dot{\vartheta}d\dot{\vartheta} + 2\frac{g}{R}\sin\vartheta d\vartheta = 0$$

Jednačina faznih trajektorije u faznoj ravni je:

$$\dot{\vartheta}^2 - \dot{\vartheta}_0^2 + 2\frac{g}{R}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) = 0$$

Razdvajanjem promenljivih $d\vartheta$ i dt

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 - 2\frac{g}{R}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}$$

$$dt = \frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 - 2\frac{g}{R}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}}$$

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 - 2\frac{g}{R}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}}$$

Ako radi lakšeg razmatranja usvojimo da je materijalna račka u najnižem položaju stabilne ravnoteže dobila početnu brzinu u nultom trenutku prethodni integral se uprošćava i sledi da je:

$$t = \int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 - 2\frac{g}{R}(1-\cos\vartheta)}} = \frac{2}{\dot{\vartheta}_0}\int_0^{\vartheta}\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1 - 4\frac{g}{R\dot{\vartheta}_0^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

Za slučaj da je: $4g = R\dot{\vartheta}_0^2$ prethodni integral postaje:

$$t = \frac{2}{\dot{\vartheta}_0}\int_0^{\vartheta} \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-4\frac{g}{R\dot{\vartheta}_0^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}\Bigg|_{4g=R\dot{\vartheta}_0^2} = \frac{2}{\dot{\vartheta}_0}\int_0^{\vartheta} \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta}{2}}} = \frac{1}{\dot{\vartheta}_0}\ln tg\left[\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{4}\right]$$

i odnosi se na granični asimptotski slučaj kretanja materijalne tačke po krugu u vertikalnoj ravni.

Sila u koncu, ili otpor veze na osnovu prethodnih proučavanja kretanja materijalne tačke po sferi, za ovaj slučaj kretanja materijalne tačke po krugu u vertikalnoj ravni je:

$$\vec{F}_{wN} = -mR\left[\frac{g}{R}\left(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0\right) + \frac{v_0^2}{R^2}\right]\vec{N}_0$$

Za rešavanje integrala

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 - 2\frac{g}{R}\left(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta\right)}}$$

mora se koristiti potpuni eliptički integral druge vrste oblika:

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

Period oscilovanja se pomoću tog integrala može dobiti u vidu reda koji je oblika:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + ... + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 k^{2n} + ...\right]$$

Oscilovanje teške materijalne tačke po krugu nije izohrono već zavisi od početnih uslova $k^2 = \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}$.

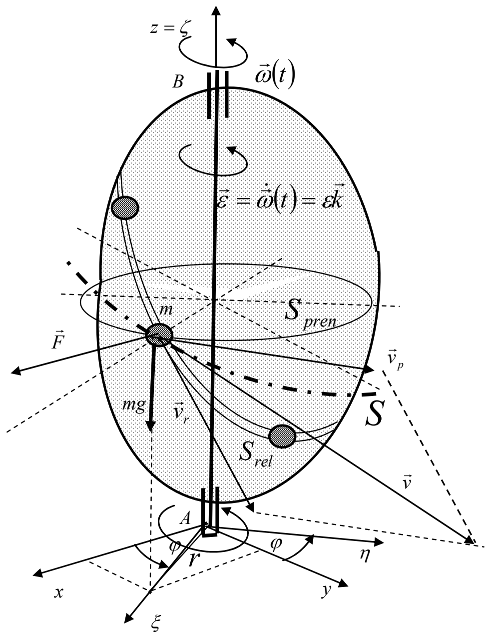
Primer: Kretanje materijalne tačke obrtnoj površi i po konusu

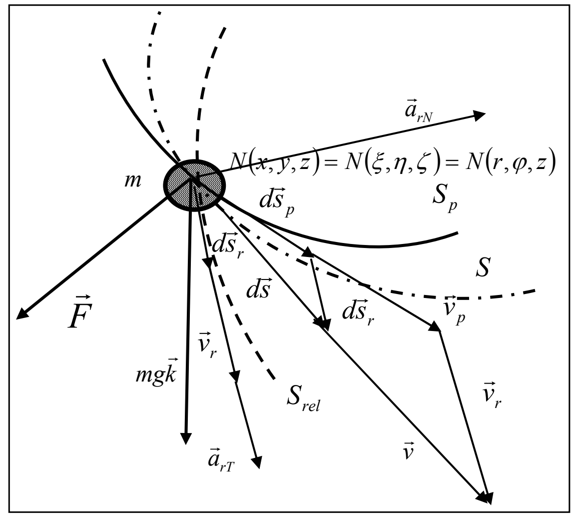
Vidi vežbe.

1* Slučaj kada je prenosno kretanje obrtanje tela oko nepokretne ose

Slučaj kada je prenosno kretanje obrtanje tela oko nepokretne ose proučićemo u slici i reči. Na sledećim slikama je prikazan model relativnog kretanja pomoću suporta koji rotira oko nepokretne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k}$ *, koja je funkcija vremena* t*, gde smo izabrali nepkretni koordinatni sistem, tako da je osa* z *u pravcu ose rotacije suporta i da se sa njom poklapa. Ose* x *i* y *neprokretnog sistema (referentnog)* $Oxyz$ *su upravne na osu rotacije suporta i leže u ravni upravnoj na tu osu rotacije. Pokretni koordinatni sistem* $A\xi\eta\zeta$ *je vezan sa suportom i koordinatni početak mu se poklapa sa tačkom* O*- koordinatnim početkom nepokretnog koordinatnog sistema* $Oxyz$ *i sa njim ima zajedničku osu koja se poklapa sa osom rotacije* $\zeta = z$, $\vec{k} = \vec{k}' = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$. *Pokretni koordinatni sistem rotira oko ose suporta istom ugaonom brzinom kao i suport* $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k}$ *. Takodje usvajamo i polarno-cilindrički sistem koordinata* $Ar\varphi z$ *koji će nam biti od koristi pri daljem računanju. Ugaono ubrzanje rotacije suporta neka je* $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$ *. Takodje pretpostavimo da se materijalna tačka kreće po suportu po potnatoj putanji relativnog kretanja koja je odredjena u polarnocilindričkom sistemu koordinata* $\vec{r}_r = r_r(t)\vec{r}_0$,

$\varphi_r = \varphi(t)$ *i* $z_r = z_r(t)$, *kao i da je vektor njegovog relativnog položaja u pokretnom sistemu koordinata* $\vec{\rho} = r_r\vec{r}_0 + z_r\vec{k}$ *. Takodje pretpostavimo da nam je poznata projekcija putanje relativnog kretanja* $r_r = r_r(\varphi_r)$*.*





Detalj - kinematičke, vektorske invarijante relativnog kretanja pri obrtnom prenosnom kretanju

Sada možemo odrediti brzinu relativnog kretanja:

$$\vec{v}_r = \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}$$

dok je ubrzanje relativnog kretanja

$$\vec{a}_r = \dot{\vec{v}}_r = \left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r - r_r\ddot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k} = \left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0 + \frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k}$$

Odnosno možemo napisati da je_ž:

$$\vec{a}_{rN} = \left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0$$

$$\vec{a}_{rT} = \left(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r - r_r\ddot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0 = \frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{rz} = \ddot{z}\vec{k}$$

Kako su radijalne koordinate materijalne tačke pri relativnom i apsolitnom kretanju jednake, zbog obrtanja suporta oko nepokretne ose, to se indeks kod radijalne koordinate može izostaviti, ali se kod cirkularne koordinate ne sme izostaviti jer se cirkularne koordinate relativnog i prenosnog kretanja sumiraju te je $\varphi_a = \varphi_r + \varphi_p$ *, te o tome moramo voditi računa.*

Kako je prenosno kretanje obrtanje oko nepokretne ose, to su prenosna brzina i ubrzanje materijalne tačke, koja vrši relativno kretanje po suportu, jednaki brzini i ubrzanju tačke suporta u kojoj se pokretna materijalna tačka nalazi pri njenom relativnom kretanju po suportu. Znači das u njene polarnocilindričke coordinate u odnosu na suport $\vec{r}_r = r_r(t)\vec{r}_0$, $\varphi_r = \varphi(t)$ i $z_r = z_r(t)$, a vektor njenog relativnog položaja u pokretnom sistemu koordinata $\vec{\rho} = r_r\vec{r}_0 + z_r\vec{k}$. Znači da putanja relativnog kretanja nije ravna kriva. Prenosna brzina i ubrzanje koje dobija pokretna materijalna tačka usled prenosnog kretanja suporta koji se obrće oko nepokretne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k} = \dot{\varphi}_p\vec{k}$ i ima ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}_p\vec{k}$, gde je $\varphi_p = \varphi_p(t)$ ugao rotacije suporta su:

$$\vec{v}_p = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = r_r\omega\vec{T}$$

$$\vec{a}_p = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_r]\right] = \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN} = r_r\dot{\omega}\vec{T} - r_r\omega^2\vec{N}$$

jer je referentna tačka A nepokretna. Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] = r_r\dot{\omega}\vec{T} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{T} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

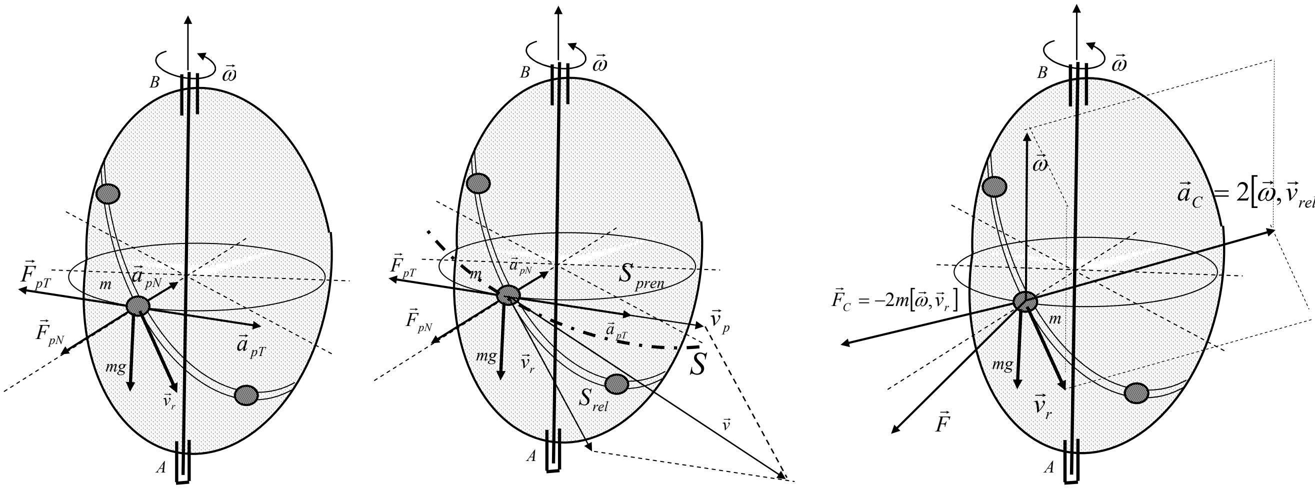
$$\vec{a}_{pN} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right] = -r_r\omega^2\vec{N} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

Koristeći izraz za brzinu relativnog kretanja, koju znamo $\vec{v}_r = \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}$, te *je* Koriolisovo ubrzanje, u obliku:

$$\vec{a}_C = 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right] = 2\left[\vec{\omega}, \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}\right] = 2\dot{r}_r\left[\vec{\omega}, \vec{r}_0\right] + 2r_r\dot{\varphi}_r\left[\vec{\omega}, \vec{c}_0\right] + 2\dot{z}\left[\vec{\omega}, \vec{k}\right]$$

Odakle sledi da je:

$$\vec{a}_C = 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right] = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 - 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = 2\dot{\varphi}_p\left(\dot{r}_r\vec{c}_0 - r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\right) = \vec{a}_{Cc} + \vec{a}_{Cr}$$



Koriolisovo ubrzanje, za razmatrani slučaj prenosnog kretanja, leži u ravni upravnoj na osu rotacije suporta (nosača) i upravno na vektor brzine relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, pri tome komponenta relativne brzine u pravcu ose rotacije ne utiče na intenzitet Koriolisovog ubrzanja, jer je njen vektorski proizvod sa ugaionom brzinom suporta jednak nuli. Komponente Koriolisovog ubrzanja pokretne materijalne tačke, koja se relativno kreće po suportu koji rotira oko nepokretne ose po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, u cirkularnom i radijalnom pravcu su:

$$\vec{a}_{Cc} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{Cr} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Iz izvedenih izraza možemo zaključiti da obe komponente Koriolisovog ubrzanja postoje, kada je prenosno kretanje rotaciono. Ali moženo da zaključimo, takodje, da cirkularna komponenta ne postoji ako je i relativno kretanje rotacija oko ose suporta, ili zavojno kretanje po cilindru oko ose rotacije suporta.

Sada za ovaj specijalan slučaj, *proizvoljnog relativnog kretanja materijalne tačke (u skladu sa definisanim pretpostavkama proizvooljnosti,* $\vec{r}_r = r_r(t)\vec{r}_0$, $\varphi_r = \varphi(t)$ i $z_r = z_r(t)$, $r_r = r_r(\varphi_r)$*) po suportu, koji rotira oko nepokretne ose* po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, možemo napisati izraze za prenosnu silu inercije (vodeću silu) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisovu silu inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$.

Izraz u vektorskom obliku za prenosnu silu inercije (vodeću silu) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ je:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_p = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] - m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right] = -m\vec{a}_{pT} - m\vec{a}_{pN} = -mr_r\dot{\omega}\vec{T} + mr_r\omega^2\vec{N} = \vec{F}_{pT} + \vec{F}_{pN}$$

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće su:

$$\vec{F}_{pT} = -m\vec{a}_{pT} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] = -mr_r\dot{\omega}\vec{T} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{T} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN} = -m\vec{a}_{pN} = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right] = -m\left(-r_r\omega^2\right)\vec{N} = mr_r\omega^2\vec{N} = -m\left(-r_r\dot{\varphi}_p^2\right)\vec{r}_0 = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$ je sada:

$$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega},\vec{v}_r] = -2m\left[\vec{\omega},\dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}\right] = -2m\dot{r}_r[\vec{\omega},\vec{r}_0] - 2mr_r\dot{\varphi}_r[\vec{\omega},\vec{c}_0] - 2m\dot{z}\left[\vec{\omega},\vec{k}\right]$$

Odakle sledi da je:

$$\vec{F}_C = -2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 + 2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = -2m\dot{\varphi}_p\left(\dot{r}_r\vec{c}_0 - r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\right) = -m\vec{a}_{Cc} - m\vec{a}_{Cr}$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega},\vec{v}_r]$, za raznatrani slučaj prenosnog kretanja, leži u ravni upravnoj na osu rotacije suporta (nosača) i upravno na vektor brzine relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, i pri tome komponenta relativne brzine u pravcu ose rotacije ne utiče na intenzitet Koriolisove sile inercije, jer je njen vektorski proizvod sa ugaionom brzinom suporta jednak nuli. Komponente Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$, koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, koja se relativno kreće po suportu koji rotira oko nepokretne ose po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, u cirkularnom i radijalnom pravcu su:

$$\vec{F}_{Cc} = -m\vec{a}_{Cc} = -2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 = -2m\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{Cr} = -m\vec{a}_{Cr} = +2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = +2m\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Iz izvedenih izraza možemo zaključiti da obe komponente Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$ postoje kada je prenosno kretanje rotaciono. Ali moženo da zaključimo, takodje, da cirkularna komponenta Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$ ne postoji ako je i relativno kretanje rotacija oko ose suporta, ili zavojno kretanje po cilindru oko ose rotacije suporta.

Ako je, naprimer, to zavojno kretanje oko neke ose, koja zaklapa neki ugao α, u odnosu na osu rotacije suporta, onda postoje obe komponente Koriolisove sile inercije, iako je relativno kretanje po cilindru, ali projekcija putanje u ravni upravnoj na osu rotacije (polarna ravan) i nije krug, nego neka kriva složenog oblika $r_r = r_r(\varphi_r, z_r)$.

U slučaju da je relativno kretanje po krugu, ili elipsi, ili ravanskoj krivoj putanji, i u nekoj ravni, koja je nagnuta pod uglom α u odnosu na osu rotacije suporta, čija projekcija u polarnoj ravni koju smo definisali sa $r_r = r_r(\varphi_r)$, onda se za zadatak analize sila inercije prenosne i Koriolisove mogu koristiti prethodni izrazi i relacije, koje smo dobili u prethodnom proučavanju postavljenog zadatka. .

Da ponovimo, prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a} = -2m[\vec{\omega},\vec{v}_r]$, su izvori suštinske razlike u dinamici apsolutnog i relativnog kretanja materijalne tačke i u ovom slučaju kada je prenosno kretanje obrtanje suporta oko nepokretene ose. U apsolutnom kretanju materijalne tačke javljaju se samo stvarne sile – aktivne sile i sile veza koje dejstvuju, dok u relativnom kretanju pored aktivnih sila i sila veze koje dejstvuju na materijalnu tačku, javljaju se fiktivne sile - prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a} = -2m[\vec{\omega},\vec{v}_r]$, koje smo u ovom specijalnom slučaju odredili.

Sada ma osnovu principa dinamičke ravnoteže i prethodne analize možemo da napišemo sledeću vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja materijalne tačke po nosaču (suportu), koji izvodi rotaciju oko nepokretne ose, u sledećem obliku:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_C$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_\Phi$$

gde je $\vec{F}_\Phi = \vec{F}_p + \vec{F}_C$ ukupna fiktivna sila, te je, u proučavanom slučaju, vektorska jednačina dinamičke ravnoteže:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_C$$

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - mr_r\dot{\omega}\vec{c}_0 + mr_r\omega^2\vec{r}_0 - 2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 + 2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m(r_r\dot{\omega} + 2\dot{r}_r\omega)\vec{c}_0 + mr_r\omega(\omega + 2\dot{\varphi}_r)\vec{r}_0$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\left(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p\right)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)\vec{r}_0$$

Imajući, sada, u vidu izraz za ubrzanje relativnog kretanja možemo prethodnu vektorsku jednačinu relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, koji se obrće oko nepokretne ose da napišemo u sledećem obliku:

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0 + m\left(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r - r_r\ddot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0 + m\ddot{z}\vec{k} = \vec{F} - m\left(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p\right)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)\vec{r}_0$$

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0 + m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0 + m\ddot{z}\vec{k} = \vec{F} - m\left(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p\right)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)\vec{r}_0$$

ili

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right) = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) = F_c - m\left(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

ili

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right) = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) = -m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$2S_0 = \left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) =_c -\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

i to predstavlja integral površine, koji u ovom slučaju, kaže da je dvostruka sektoska brzina materijalne tačke pri relativnom kretanju, kada je prenosno kretanje suporta rotacija oko nepokretne ose, jednake, ali suprotnog znaka, sktorskoj brzini tačke suporta u kojoj je pokretna materijalna tačka koja po tom suportu izvodi relativno kretanje.

Takodje možemo napisati i daje

$$\dot{\varphi}_r = -\dot{\varphi}_p$$

Odnosno

$$\dot{\varphi}_r + \dot{\varphi}_p = 0$$

Odnosno

$$\varphi_r + \varphi_p = \varphi_0 = \varphi_{r0} + \varphi_{p0} = \cos nt$$

Specijalni slučajevi proučenog specijalnog slučaja relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji izvodi rotaciju oko nepokretne ose je: a* kada se materijalna tačka kreće po uporednicima ili meridijanima centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je ili $r_r = kR = const, k < 1$, ili $\varphi_r = const$ ili b* kada je kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu; Kako su to važni slučajevi koje možemo razmatrati kao modele koji odgovaraju realnim sistemima dinamike materijalnih sistema, to ćemo koristeći prethodno izvedene matematičke relacije proanalizirati svaki od th slučajeva.

Razmotrimo prvo slučaj a*1. kada se materijalna tačka kreće po jednom od uporednika centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $z = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r-kR} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r-kR} = -\,r_r\omega^2\vec{N}\Big|_{r_r-kR} = -\,r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r-kR} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{r_r-kR} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0\Big|_{r_r-kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r-kR} = -\,2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = -2kR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisovog ubrzanja u cirkularnom pravcu jednaka nuli i da postoji samo u radijalnom pravcu.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće po jednom od uporednika centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r-kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}_r\right]_{r_r-kR} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r-kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r-kR} = -\,m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r-kR} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ je sada:

$$\vec{F}_{Cc}\Big|_{r_r-kR} = -m2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{r_r-kR} = -\,2m\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0\Big|_{r_r-kR} = 0$$

$$\vec{F}_{Cr}\Big|_{r_r-kR} = 2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = 2m\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = 2mkR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisove sile inercije, pri relativnom kretanju materijalne tačke po uporedniku sfere, u cirkularnom pravcu jednaka nuli i da postoji samo u radijalnom pravcu.

Diferencijalne jednačine relativnog kretanja su sada:

$$-\,mkR\dot{\varphi}_r^2 = F_r + mkR\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$mkR\ddot{\varphi}_r = F_c - mkR\ddot{\varphi}_p$$

$$z = const$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu, iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$\varphi_r + \varphi_p = \varphi_0 = \varphi_{r0} + \varphi_{p0} = \cos nt$$

zatim unošenjem u prvu jednačinu dobijamo uslov koji treba da zadovolji radijalna komponenta aktivne sile da bi se materijalna tačka kretala po uporedniku, a da pri tome ne postoji cirkularna komponenta aktivne sile;

$$F_r = -2mkR\dot{\varphi}_p^2 = -2mkR\omega^2$$

Razmotrimo prvo slučaj a*2. kada se materijalna tačka kreće po jednom od meridijana centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $\varphi_r = const$, kada je: $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, R poluprečnik centralne sfere po čijem se meridijanu relativno kreće materijalna tačka, a ϑ ugao koji zaklapa radijus položaja metarijalne tačke u odnosu na pravac ose rotacije suporta. Taj ugao ϑ se može usvojiti za koordinatu relativnog položaja materijalne tačke na sferi po kojoj se kreće.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{\varphi_r-const} = \left[\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}_r\right]_{\varphi_r-const} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{\varphi_r-const} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big| = R\ddot{\varphi}_p\sin\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{\varphi_r-const} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{\varphi_r-const} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = -R\dot{\varphi}_p^2\sin\vartheta\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{\varphi_r=const} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{\varphi_r=const} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0 = -2R\dot{\varphi}_p\dot{\vartheta}\cos\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{\varphi_r=const} = 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r=const} = 2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r=const} = 0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisovog ubrzanja u radijalnom pravcu jednaka nuli, i da postoji samo u cirkularnom pravcu upravnom na ravan meridijana po kome se kreće.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$, koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće, kada se materijalna tačka kreće po jednom od meridijana centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije), kada je $\varphi_r = const$, kada je: $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{\varphi_r - const} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{\varphi_r - const} = -\, m r_r \dot{\omega}\vec{T}\Big|_{\varphi_r - const} = -m r_r \ddot{\varphi}_p \vec{c}_0\Big| = -mR\ddot{\varphi}_p \sin\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{\varphi_r - const} = -m\left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{\varphi_r - const} = m r_r \dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0 = -mR\dot{\varphi}_p^2 \sin\vartheta\vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right]$ je sada:

$$\vec{F}_{Cc}\Big|_{\varphi_r = const} = -\,2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{\varphi_r = const} = -2m\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0 = 2mR\dot{\varphi}_p\dot{\vartheta}\cos\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{Cr}\Big|_{\varphi_r = const} = 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisove sile inercije pri relativnom kretanju materijalne tačke po meridijanu sfere u radijalnom pravcu jednaka nuli, i da postoji samo u cirkularnom pravcu upravnom na ravan meridijana po kome se tačka kreće.

Diferencijalne jednačine relativnog kretanja su:

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right) = F_r + m r_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

te je sada*:*

$$m\ddot{r}_r = F_r + m r_r\dot{\varphi}_p^2$$

$$0 = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

Kako je

$\varphi_r = const$, $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, to prethodni sistem jednačina relativnog kretanja postaje:

$$mR\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\vartheta\right) = F_r + mR\dot{\varphi}_p^2\sin\vartheta$$

$$0 = F_c - m\frac{R}{\sin\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}_p\sin^2\vartheta\right)$$

$$z = R\cos\vartheta$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$\dot{\varphi}_p\sin^2\vartheta = const$$

$$\vartheta = \arcsin\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

odakle sledi da je

$$r_r = R\sin\vartheta = R\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

$$z = R\cos\vartheta = R\sqrt{1 - \frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

Zatim, unošenjem prethodno dobijenog rešenja, u prvu jednačinu dobijamo uslov koji treba da zadovolji radijalna komponenta aktivne sile da bi se materijalna tačka kretala po meridijanu, a da pri tome ne postoji cirkularna komponenta aktivne sile;

$$F_r = mR\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\vartheta\right) - mR\dot{\varphi}_p^2\sin\vartheta = mR\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}} - mR\dot{\varphi}_p^2\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

Sada ćemo razmotriti slučaj b* kada je kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu $r_r = kR = const, k < 1, \varphi_r = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = -r_r\omega^2\vec{N}\Big|_{r_r - kR} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2kR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0 = 0$$

Vidimo da su obe komponente Koriolisovog ubrzanja i u cirkularnom pravcu i u radijalnom pravcu jednake nuli.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$, koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, na kome ona relativno miruje na centralnoj sferi (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const$. $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = kmR\omega^2\vec{r}$$

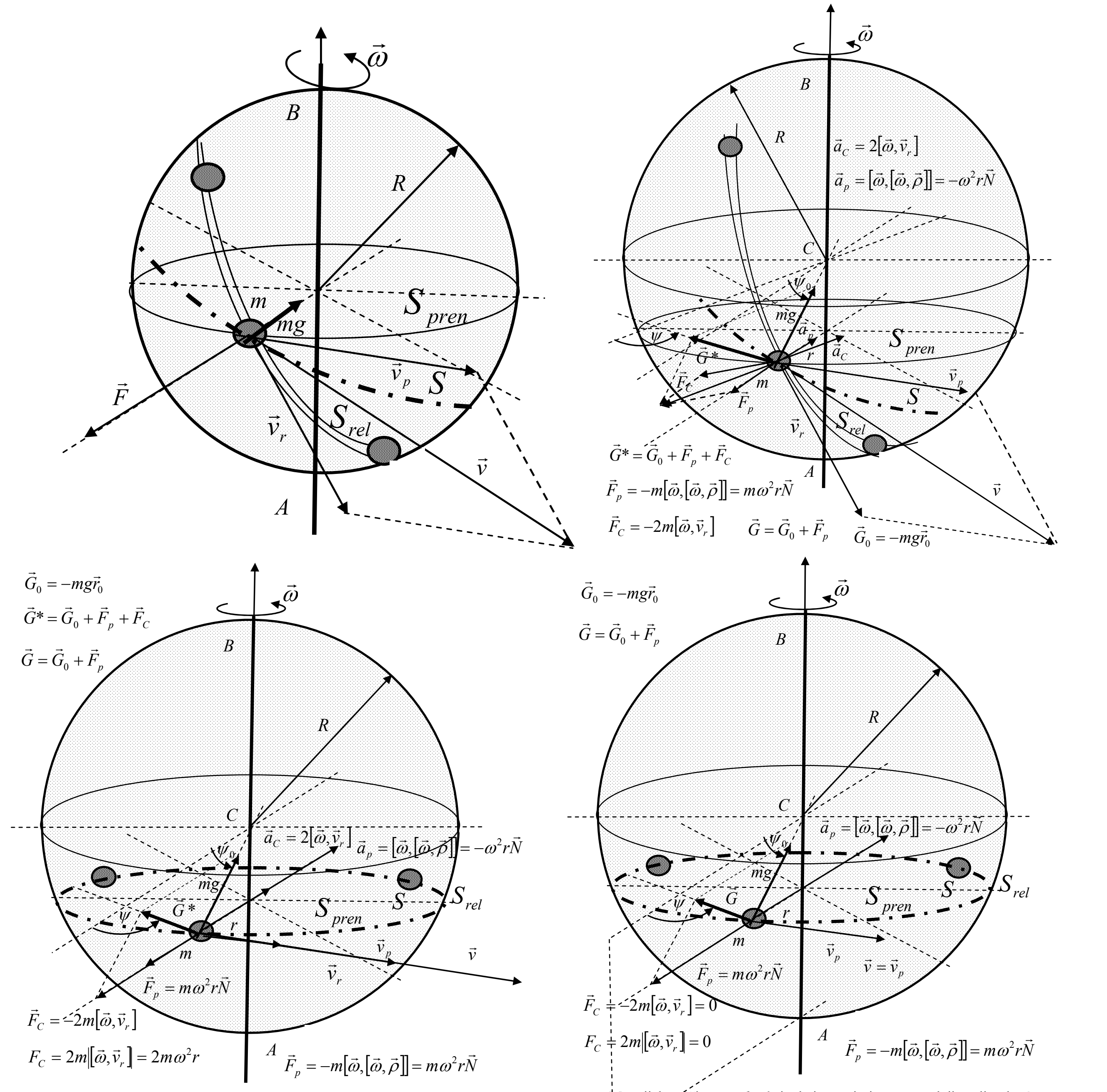
Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right]$ je sada jednaka nuli.

Aktivna sila treba da ima samo radijalnu komponetu jednaku

$$F_r = -mkR\dot{\varphi}_p^2 = -mkR\omega^2$$

da bi materijalna tačka relativno mirovala ($r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const$. $z = const$) na sferi pri prenosnom kretanju, koje je rotacija suporta konstantnom ugaonom brzinom.

Na narednim slikama su prikazani kinetički parametri relativnog kretanja materijalne tačke po sferi, koja je suport relativnog kretanja.



$\vec{v}_r = \omega r\vec{T}$ materijalna tačka se kreće po uporedniku istom ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje, brzine prenosna, relativna i apsolutna su kolinearne

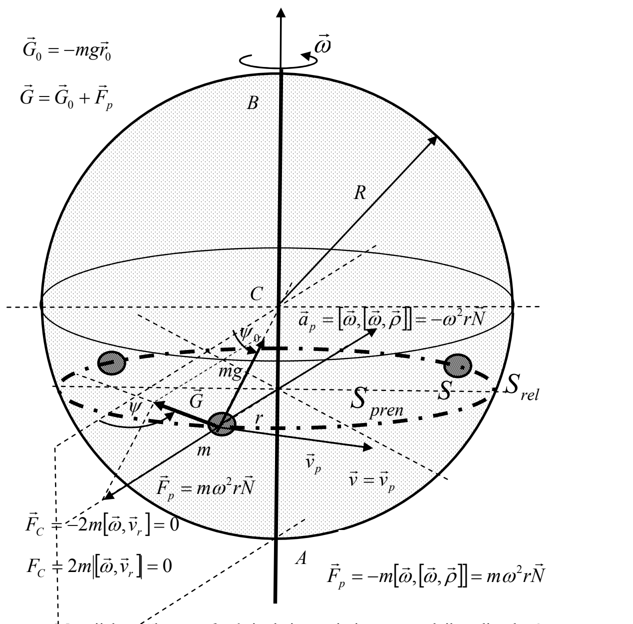
Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina

Relativno kretanje teške tačke po površi Zemlje.

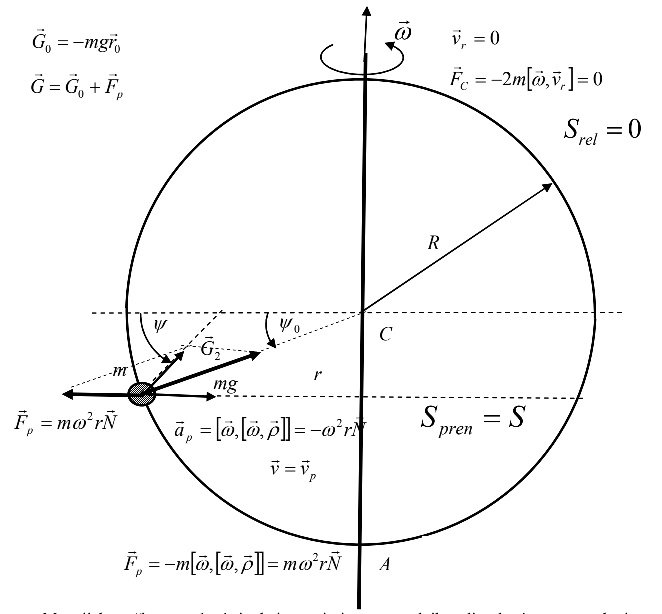
Pod *apsolutnom težinom* tela podrazumevaćemo njegovu težinu pod pretpostavkom da Zemlja miruje, I tada će na površi Zemlje, težina materijalne tačke, koja miruje, biti mg i usmerena ka centru Zemlje, gde smo sa g označili ubrzanje kojim Zemljina teža dejstvuje na materijalnu tačku. Kao što je poznato, Zemlja ostvaruje sopstvenu rotaciju, tj. obrće se oko svoje ose ugaonom brzinom $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ gde je T period vremena za koji napravi jedan obrt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} = 729 \cdot 10^{-7} \left[\sec^{-1}\right]$$

Ptretpostavimo da se osa sopstvene rotacije kreće jednoliko translatorno i pravolinijski (zanemarujemo kretanje po eliptičnoj putanji oko Sunca) već uzimamo u obzir samo uticaj sopstvene rotacije na relativnu ravnotežu i relativno kretanje materijalne tačke po površi Zemlje. Uz takve pretpostavke možemo koristiti naša prethodna pročavanja relativnog kretanja materijalne tačke po centralnoj sferi – suportu, koji se obrće oko svoje nepokretne ose konstantnom ugaonom brzinom. Analizu vektorskih kinematičkih (brzina i ubrzanja) i vektoprskih kinetičkih (sile inercije prenosnog kretanja i Koriolisove sile inercije) invarijanti, koju smo napravili, sada možemo primeniti za analizu uslova relativne ravnoteže i relativnog kretanja materijalne tačke po površi Zemlje, koja je sada taj sferni suport koji rotira konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 729 \cdot 10^{-7}\left[\sec^{-1}\right]$. Na narednim slikama je dat grafički prikaz sile apsolutne težine i odgovarajuće komponente usled dejstva sile inercije prenosnog kretanja.



Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina



Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina jednaka nuli - tačka miruje na

Vidimo da na materijalnu tačku koja relativno miruje na površi Zemlje, koja je centralna sfera suporta koji rotira konstantnom ugaonom brzinom te kompletnu analizu relativnog mirovanja materijalne tačke na suportu u slučaju b* sada možemo primeniti.

Kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu - površi zemlje pa je $r_r = kR = const, k < 1, \varphi_r = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog sopstvenog obrtnog kretanja Zemlje (sopstvena rotacija oko sopstvene ose Zemlje) su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = -r_r\omega^2\vec{N}\Big|_{r_r - kR} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2kR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0 = 0$$

Vidimo da su obe komponente Koriolisovog ubrzanja i u cirkularnom pravcu i u radijalnom pravcu jednake nuli.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku, usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, na kome ona relativno miruje na centralnoj sferi (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const$. $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

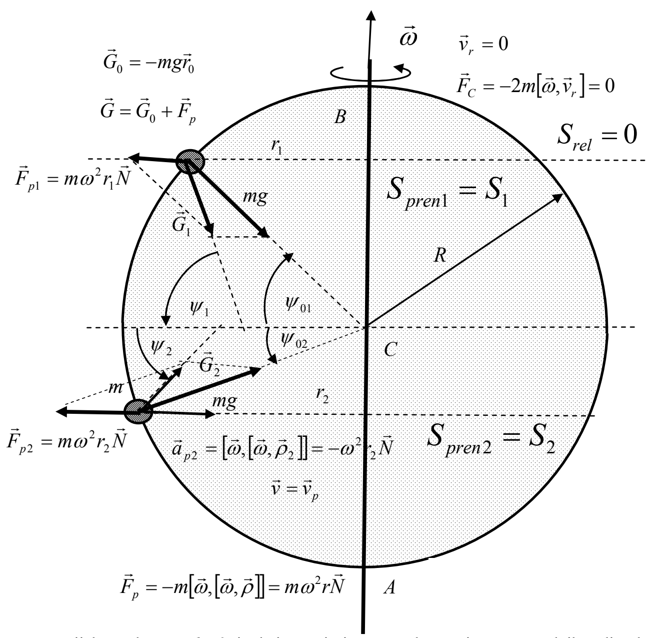
$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r-kR} = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r-kR} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r-kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = kmR\omega^2\vec{r}$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ u ovom slučaju je jednaka nuli.

Prenosna sila inercije (vodeća sila inercije) ima komponentu samo u radijalnom pravcu i to jednaku

$$F_{pN} = F_{pr} = -mkR\dot{\varphi}_p^2 = -mkR\omega^2 = -mR\omega^2\cos\psi_0$$

gde smo sa ψ_0 označili ugao koji vektor položaja materijalne tačke zaklapa sa ravni polutara (najvećeg uporednika paralelnog uporedniku na kome je materijalna tačka). Ugao ψ predstavlja geografsku širinu položaja na Zemlji u kojoj se nalazi (miruje) materijalna tačka. Pravac sile apsolutne težine mg usmeren ka centru Zemlje zahvata ugao ψ_0 sa ravni polutara Zemlje. Na prethodnoj slčici je dat grafički prikaz.



Materijalne tačke se *ne kreću* i relativno mirujo po po odgovarajućem uporedniku, ali se kreću ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući različite kružne putanje po odgovarajućim uporednicima, a odgovarajuće brzine, prenosna i apsolutna, su im kolinearne i jednake, jer su im relativnaže brzine jednake nuli - tačka miruje na suportu. Kako imaju različite brzine jer su različito udaljene o dose rotacije, pa su im i prenosna ubrzanja različita, a sa tim i vodeće sile inercije prenosnog kretanja različite, te su i njihove rezultujiće sile relativnih težina različite na različitim geografskim širinama ψ

Sada vidimo da na materijalnu tačku dejstvuje dve sile:

$$\vec{F}_{pr} = -\vec{F}_{pN} = mkR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = mkR\omega^2\vec{r}_0 = mR\omega^2\cos\psi_0\vec{r}_0$$

$$\vec{G}_a = -mg\left(\vec{r}_0\cos\psi_0 + \vec{k}\sin\psi_0\right)$$

te je rezultujuća sila pritiska materijalne tačke koja relativno mituje na provrši Zemlje jednak vektorskom zbiru ovih sila:

$$\vec{G}_\psi = \vec{G}_a + \vec{F}_{pr} = mR\omega^2\cos\psi_0\vec{r}_0 - mg\left(\vec{r}_0\cos\psi_0 + \vec{k}\sin\psi_0\right)$$

$$\vec{G}_\psi = \vec{G}_a + \vec{F}_{pr} = m\cos\psi_0\left(-R\omega^2 + g\right)\vec{r}_0 - mg\vec{k}\sin\psi_0$$

i pravac te sile pritiska zaklapa ugao ψ sa ravni polutara (najvećeg uporednika paralelnog uporedniku na kome je materijalna tačka), a taj ugao ψ predstavlja geografsku širinu položaja na Zemlji u kojoj se nalazi (miruje) materijalna tačka.

Intenzitet ove sile je:

$$G_\psi = m\sqrt{\cos^2\psi_0\left(-R\omega^2 + g\right)^2 + g^2\sin^2\psi_0} = m\sqrt{g^2 + R^2\omega^4\cos^2\psi_0 - 2Rg\omega^2\cos^2\psi_0}$$

$$G_\psi = m\sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0} = mg_\psi$$

gde smo sa g_ψ označili sledeći izraz za ubrzanje Zemljine teže na odgovarajućoj geografskoj širini:

$$g_{\psi} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0}$$

Na prethodnoj slici grafički su prikazani pritisci materijalne tačke na dvema raznim geografskim širinama na kojima su ubrzanja različita i iznose:

$$g_{\psi_1} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{01}}$$

$$g_{\psi_2} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{02}}$$

uporedjivanjem njihoviih veličina:

$$g_{\psi_2} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{02}} > g_{\psi 1} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{01}}$$

Zaključijemo da je tada

$$\cos^2\psi_{02} > \cos^2\psi_{01}$$

odnosno $\psi_{02} < \psi_{01}$, odnosno da su na većim geografskim širuinama veća ubrzanja, odnosno kada je ugao ψ_0 veći, to je ubrzanje materijalne tačke veće i kada je $\psi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, tada je tačka na polu, pa je njeno ubrzanje $g_{\psi=\frac{\pi}{2}} = g \approx 9{,}832\left[m\sec^{-2}\right]$, a kada je $\psi_0 = 0$ tada je tačka na ekvatoru (polutaru), pa je njeno ubrzanje jednako:

$$g_{\psi=0} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)} \approx 9{,}798\left[m\sec^{-2}\right],$$

Pri čemu su uzeti sledeći podaci: $R\omega^2 \approx 0{,}034\left[m\sec^{-2}\right]$ i poluppreČnik Zemlje $R = 64\cdot 10^5\left[m\right]$. Sa ovim podacima uočavamo da je težina istog tela na polu oko 5 ‰ veća od njegove težine na ekvatoru.

Klero je izveo aproksimativni obrazac

$$g_{\psi} = \sqrt{g^2 + \left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0} = g\sqrt{1 + \frac{1}{g^2}\left(R^2\omega^4 - 2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0}$$

$$g_{\psi} \approx g\sqrt{1 - 2\frac{0{,}034}{g}\cos^2\psi_0} \approx g\left(1 - 0{,}034\cos^2\psi_0\right)$$

Prema podatku iz udžbenika *D. Rašković*, u primeni, umesto prethodnog *Kleroovog približnog obrasca*, je *eksperimentalno* dobuijen obrazac:

$$g_{\psi} = 9{,}779888 + 0{,}052210\sin^2\psi_0 - 0{,}000003h$$

u kome je prikazana i zavisnost i od geografske širine ψ i od nadmorske visine h.

Pravac relativne teže ne prolazi kroz centar Zemlje, već seče Zemljinu osu sa suprotne strane od Zemljine hemisfere na kojoj je položaj materijalne tačke na Zemlji. Taj pravac predstavlja pravac vertikale posmatranog mesta u kome miruje posmatrana materijalna tačka, a ravan upravna na taj pravac je *ravan horizonta* tog mesta. Ugao ψ koji čini taj pravac sa ravni ekvatora je, kao štp smo već rekli *geografska širina* dotičnog mesta (ψ).

Da bi smo proučili kretanje teške tačke na Zemlji, usvojimo da je u centru Sunca koordinatni početak referentnog, apsolutnog, nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, a na površini zemlje u tački, u kojoj je materijalna tačka, uzmimo koordinatni početak pokretnog sistema koordinata $A\xi\eta\zeta$, koji je vezan sa Zemljom. Ovaj koordinatni sistem usvojimo tako da njegova osa $A\zeta$ pada u pravac vertikale posmatranog mesta na Zemlji, a druge dve ose $A\xi$ i $A\eta$ usvojimo da padaju u pravce tangenti na meridijan $A\xi$, odnosno uporednik $A\eta$, redom. Tako usvojeni koordinatni sistem ima ravan $A\xi\eta$ za horizontalnu ravan.

Diferencijalna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right] - 2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$$

odnosni

$$\vec{a}_r = \frac{1}{m}\vec{F} - \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right] - 2\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$$

Za slučaj kretanja materijalne tačke u odnosu na Zemlju za aktivnu silu uzimamo silu $\vec{G}_\psi = mg_\psi \vec{k}'$, a dvostruki vektorski proizvod ćemo zanemariti imajući u vidu da je ugaona brzina sopstvenog brtanja Zemlje veoma mala $\omega = 729 \cdot 10^{-7}\left[\sec^{-1}\right]$, te će prethodna jednačina dobiti oblik:

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$$

Ovo je diferencijalna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke pod dejstvom sile teže na odgovarajućoj geografskoj širini i s obzirom da je pretpostavljeno da je ugaona brzina sopstvenog obrtanja Zemlje konstantna, to prethodnu jednačinu možemo integraliti te se dobija:

$$\vec{v}_r \approx \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega}, \vec{\rho}] + \vec{C}_1$$

gde je $\vec{C}_1$ integraciona konstanta. Ako pretpostavimo da je u početnom trenutku materijalna tačka imala sledeće početne uslove i brzinu:

$$t = 0\,,\ \vec{\rho}(0) = 0\,,\ \vec{v}_r(0) = \vec{v}_{r0}$$

onda sledi da je

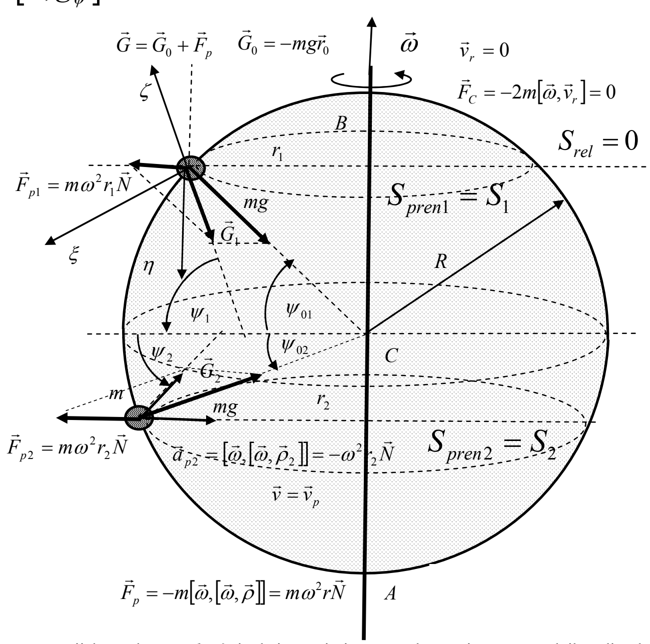
$$\vec{v}_r \approx \vec{v}_{r0} + \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega}, \vec{\rho}]$$

Ako sada ovu vrednost za brzinu relativnog kretanja unesemo u diferencijalnu jednačinu

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0} + \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - 2t[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi] + 4[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$$

ili posle sredjivanja

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - 2t[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi]$$



Materijalne tačke se *ne kreću* i relativno mirujo po po odgovarajućem uporedniku, ali se kreću ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući različite kružne putanje po odgovarajućim uporednicima, a odgovarajuće brzine, prenosna i apsolutna, su im kolinearne i jednake, jer su im relativnaže brzine jednake nuli - tačka miruje na suportu. Kako imaju različite brzine jer su različito udaljene o dose rotacije, pa su im i prenosna ubrzanja različita, a sa tim i vodeće sile inercije prenosnog kretanja različite, te su i njihove rezultujiće sile relativnih težina različite na različitim geografskim širinama ψ

Dalje dvostrukim integraljenjem ove diferencijalne jednačine dobijamo:

$$\vec{v}_r \approx \vec{g}_\psi t - 2t[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - t^2[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi] + \vec{v}_{r0}$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{g}_\psi \frac{t^2}{2} - t^2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi] + \vec{v}_{r0} t$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{v}_{r0} t + \frac{t^2}{2}\left(\vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}]\right) - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi]$$

Ova vektorska jednačiina predstavlja vektorsku, konačnu, jednačinu kretanja materijalne tačke pod uticajem Zemljine teže i prenosnog kretanja usled sopstvene rotacije Zemlje. Iz ove jednačine nije teško dobiti odgovarajuće skalarne.

Ugaona brzina sopstvenog obrtanja Zemlje u pokretnom sistemu koordinata je:

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\psi\, \vec{i}\,' + \omega\sin\psi\, \vec{k}\,'$$

dok je ubrzanje

$$\vec{g}_{\psi} = -g_{\psi}\vec{k}\,'$$

i brzina relativnog kretanja

$$\vec{v}_{r0} = \dot{\xi}_0\vec{i}\,' + \dot{\eta}_0\vec{j}\,' + \dot{\zeta}_0\vec{k}\,'$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{v}_{r0}t + \frac{t^2}{2}\left(\vec{g}_{\psi} - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}]\right) - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_{\psi}]$$

$$\vec{\rho} = \xi\vec{i}\,' + \eta\vec{j}\,' + \zeta\vec{k}\,'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0\vec{i}\,' + \dot{\eta}_0\vec{j}\,' + \dot{\zeta}_0\vec{k}\,'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{g_{\psi}\vec{k}\,' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix}\right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_{\psi} \end{vmatrix}$$

Iz ove jednačine vidimo da komponenta relativnog ubrzanja u ζ pravcu ne zavisi od vremena, te da je konstanta:

$$\zeta = \dot{\zeta}_0 t - \frac{t^2}{2}\left(g_{\psi} - 2\omega\dot{\eta}_0\sin\psi\right)$$

$$a_{r\zeta} = \ddot{\zeta} = -\left(g_{\psi} - 2\omega\dot{\eta}_0\sin\psi\right) \approx const$$

Iz prerthodnih jednačina možemo proučiti slobodan pad, kao hitac naviše ili naniže sa početnom brzinom usmerenom naviše ili naniže ili pak pod nekim uglom u odnosu na horizont (površ Zemlje), u bezvazdušnom prostoru za sledeće početne uslove: :

$$\vec{\rho} = \xi\vec{i}\,' + \eta\vec{j}\,' + \zeta\vec{k}\,'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0\vec{i}\,' + \dot{\eta}_0\vec{j}\,' + \dot{\zeta}_0\vec{k}\,'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{g_{\psi}\vec{k}\,' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix}\right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_{\psi} \end{vmatrix} + \vec{\rho}_0$$

$$\vec{\rho} = -\frac{t^2}{2}\left\{g_{\psi}\vec{k}\,' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix}\right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_{\psi} \end{vmatrix} + \zeta_0\vec{k}\,'$$

$$\xi = 0$$

$$\eta = t^2\omega\dot{\zeta}_0\cos\psi - \frac{t^3}{3}g_{\psi}\omega\cos\psi$$

$$\zeta = -\frac{t^2}{2}g_{\psi} + \zeta_0 = h - \frac{t^2}{2}g_{\psi}$$

ili za hitac naviše ili naniže sa početnom brzinom usmerenom naviše ili naniže, u bezvazdušnom protoru

$$\xi = 0$$

$$\eta = \pm v_{r0}t^2\omega\cos\psi - \frac{t^3}{3}g_{\psi}\omega\cos\psi$$

$$\zeta = -\frac{t^2}{2}g_{\psi} + \zeta_0 = h - \frac{t^2}{2}g_{\psi}$$

ili za slobodan pad:

$$\xi = 0$$

$$\eta = -\frac{t^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\zeta = h - \frac{t^2}{2} g_\psi$$

a kada eliminišemo vreme dobijamo:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g_\psi}(h-\zeta)}$$

$$\eta = -\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{g_\psi}(h-\zeta)}\right)^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\eta = -\frac{\left(\sqrt{\frac{8}{(g_\psi)^3}(h-\zeta)^3}\right)}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$9 g_\psi \eta^2 - 8\omega^2 \cos^2\psi (h-\zeta)^3 = 0$$

jednačinu putanje kod slobodnog pada u bezvazdušnom prostoru, ali uzimajući u obzir uticaj prenosnog kretanja sopstvene rotacije Zemlje:

$$\frac{9 g_\psi}{8\omega^2 \cos^2\psi}\eta^2 + (\zeta - h)^3 = 0$$

Ta putanja predstavlja parabolu razlomljenog eksponenta $3/2$ u ravni $\xi = 0$ ili $A\eta\zeta$.

Sa ovom izvedenom vektorskom jednačinom

$$\vec{\rho} = \xi\vec{i}\,' + \eta\vec{j}\,' + \zeta\vec{k}\,'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0\vec{i}\,' + \dot{\eta}_0\vec{j}\,' + \dot{\zeta}_0\vec{k}\,'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{ g_\psi \vec{k}\,' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} \right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_\psi \end{vmatrix} + \vec{\rho}_0$$

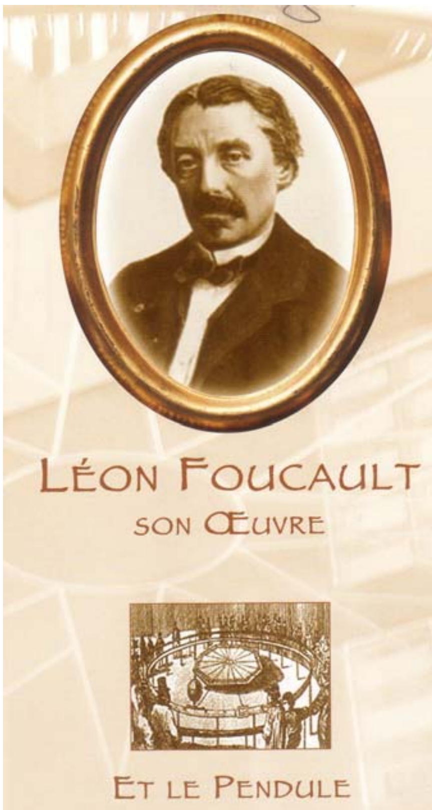
,ože se analizirati i slučaj kretanja materijalne tačke poznat pod imenom *kosi hitac* što zavisi od zadatih početnih uslova.

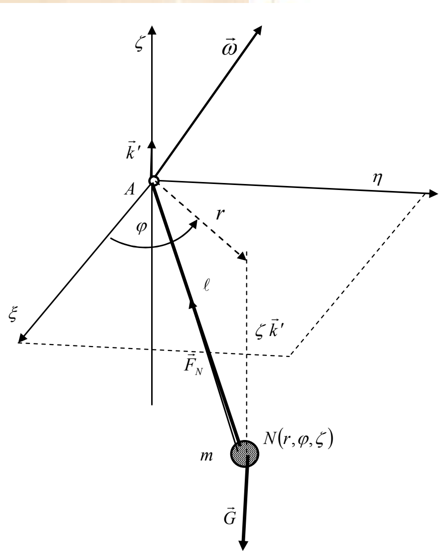
Fukovo klatno

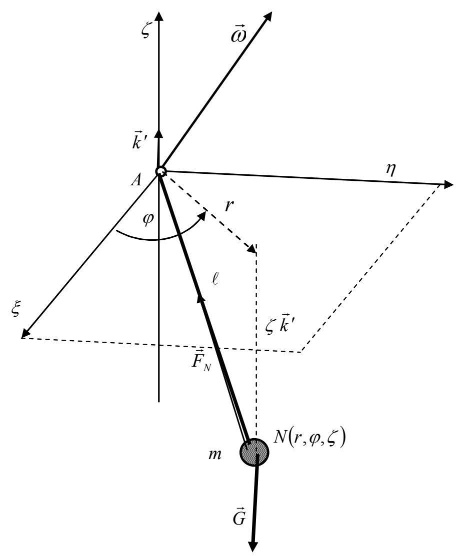
Leon Fuko (***Léon Foucault*** 1819-1868) je 1851. godine razmotrio slučaj kretanja teške materijalne tačke vezane, na koncu velike dužine ℓ za Zemlju. Takav sistem poznat je pod imenom Fukovo klatno.

Da bi smo rešili ovaj zadatak usvojimo u središtu sfere nepokretni sistem koordinata $Cxyz$,a pokretni sistem koordinata, vezan za Zemlju, neka je koordinatni sistem koordinata $A\xi\eta\zeta$ pri čemu se tačka A nalazi na Zemlji i učvršćena za nju. Usvojimo i odgovarajući polarno-cilindrički sistem koordinata $Ar\varphi\zeta$, S obzirom da je za tu tačku učvršćen konac klatna dužine ℓ, to će materijalna tačka na koncu izvoditi relativno kretanje po sferi poluprečnika ℓ, pa je to prinudno relativno kretanje materijalne tačke po sferi, čija je jednačina u pokretnom sistemu koordinata

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\ell^2=0 \quad \text{ili} \qquad f(r,\zeta)=r^2+\zeta^2-\ell^2=0$$







Na materijalnu tačku klatna dejstvuju, kao aktivna sila - sila težine $\vec{G}=-mg_{\psi}\vec{k}'$, sila inercije vodeća sila inercije prenosnog kretanja usled sopstvenog obrtanja Zemlje ugaonom brzinom sopstvenog obrtanja:

$$\vec{\omega}=-\omega\cos\psi\;\vec{i}'+\omega\sin\psi\;\vec{k}'$$

Koriolisova sila i sila dejstva veze konca (na relativno kretanje dejstvuje veza – kretanje po površi)- otpor veze $\vec{F}_N$ koji pada u pravac AN sa smerom ka koordinatnom početku. Za sastavljanje jednačina relativnog kretanja koristićemo teoremu o promeni momenta količine kretanja ili zamahu za osu $A\zeta$

$$\dot{L}_{\zeta} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = M_{\zeta} = \left(\left[\vec{\rho},\left[-2m\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right)$$

Ovde smo koristili to da je na osnovu teoreme o promeni momenta količine relativnog kretanja materijalne tačke ili zamahu za osu ζ izvod momenta količine relativnog kretanj materijalne tačke jednak momentu sila koje dejstvuju na materijalnu tačku, uzimajući u obziri aktivne i fiktivne sile inercije i ortora veza. Kako otpor veze $\vec{F}_N$ seče osu ζ to je moment te sile jednak nuli, a moment sile težine za tu osu, je takodje jednak nuli, jer je sila težine paralelna sa tom osom, tako da samo Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ daje moment za tu osu $A\zeta$. Zato prvo odredimo njen poment za pol u koordinatnom početku:

$$\vec{M}_A = \left[\vec{\rho},\vec{F}_C\right] = -2m\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right]$$

Dok je projekcija M_{ζ} tog momenta na pravac ose $A\zeta$

$$M_{\zeta} = \left(\vec{M}_A,\vec{k}'\right) = \left(\left[\vec{\rho},\vec{F}_C\right],\vec{k}'\right) = -2m\left(\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = -2m\left(\vec{\omega}\left(\vec{\rho},\vec{v}_r\right) - \vec{v}_r\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right),\vec{k}'\right) = 2m\left(\vec{v}_r,\vec{k}'\right)\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right) = 2m\dot{\zeta}\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right)$$

$$M_{\zeta} = \left(\vec{M}_A,\vec{k}'\right) = -2m\left(\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = 2m\dot{\zeta}\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right) = 2m\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

jer su vektori $\vec{\rho}$ i $\vec{v}_r$ ortogonalni, a njihov skalarni proizvod je jednak nuli $\left(\vec{\rho},\vec{v}_r\right) = 0$. Takodje je i $\left(\vec{v}_r,\vec{k}'\right) = \dot{\zeta}$.

Sada sledi da je:

$$\dot{L}_{\zeta} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = M_{\zeta} = \left(\left[\vec{\rho},\left[-2m\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = 2m\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

Odnosno jednačina dobija oblik

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 2\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

Iz jednačine veze odredjujemo koordinatu brzine relativnog kretanja na sledeći način:

$$f\left(r,\zeta\right) = r^2 + \zeta^2 - \ell^2 = 0$$

$$\zeta = \ell\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2} \approx \ell\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]$$

$$\dot{\zeta} \approx -\frac{r}{\ell}\dot{r}$$

Unoseći ovu aproksimaciju u prethodnu jednačinu dobijamo :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) \approx -2\frac{r}{\ell}\dot{r}\omega\ell\sin\psi \approx -2r\dot{r}\omega\sin\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + 2r\dot{r}\omega\sin\psi \approx 0$$

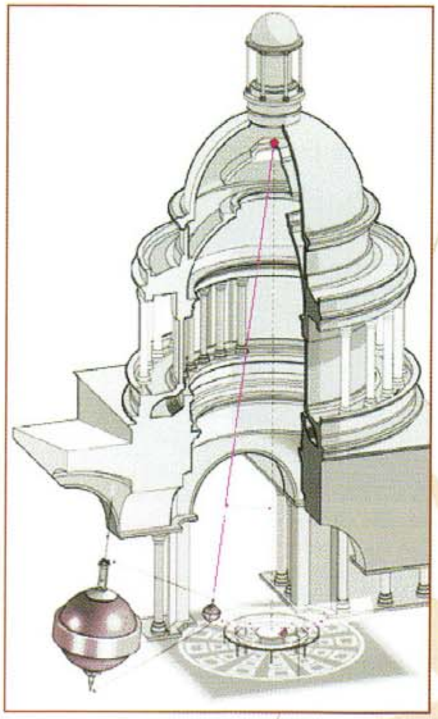
Ova jednačina se može integraliti, jer razdvaja promenljive

$$\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r^2\omega\sin\psi \approx C$$

gde je C integraciona konstanta koja se odredjuje iz početnih uslova.

$$r^2\left(\dot{\varphi} + \omega\sin\psi\right) \approx C \approx r_0^2\left(\dot{\varphi}_0 + \omega\sin\psi\right)$$

Le pendule au Panthéon

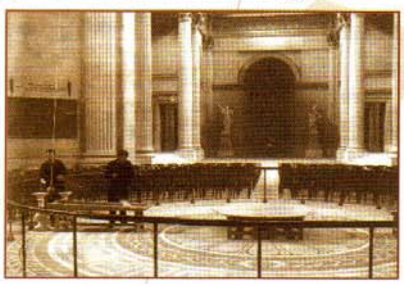


L'Expérience du Panthéon en 1851

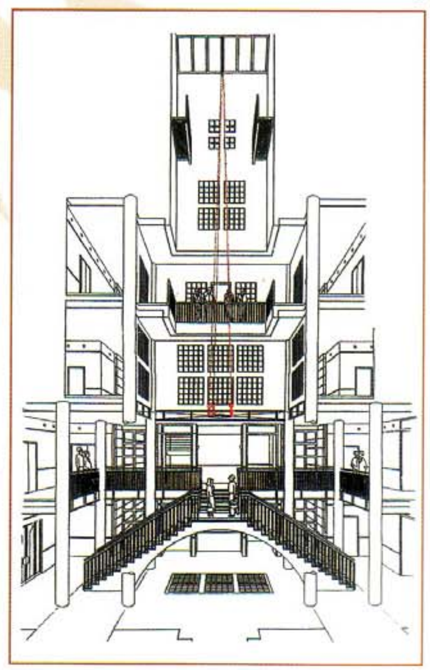
Sous les voûtes élevées de certains édifices, le phénomène devrait prendre une splendeur magnifique. Nous avons trouvé dans le Panthéon un emplacement merveilleusement approprié à l'installation d'un pendule gigantesque; nous avons trouvé pareillement dans l'administration les dispositions les plus favorables à l'exécution du projet que suggérait cette immense coupole. Sur une simple description du projet de l'expérience, sur l'énoncé des résultats probables qu'elle fournirait à la science et qu'elle mettrait sous les yeux de tout le monde, le président de la république résolut que la chose serait faite, et avec la rapidité de l'éclair, sa haute protection réagissant jusqu'au dernier degré de l'échelle administrative, on vit, en moins de quinze jours se dresser les appareils. (Journal des Débats, 31 mars 1851)

L'invention du pendule se répand rapidement dans le monde: simplicité de son principe, mystère de ce mouvement à grands battements créé sans intervention extérieure apparente.

L'expérience du pendule renouvelée au Panthéon en 1902 par Camille Flammarion et Berget



Le pendule à l'Université du Luxembourg



Le pendule contemporain au Panthéon

Kada su početni uslovi takvi da je u početnom trenutku klatno bilo u koordinatnom početku $r_0 = 0$ i imalo neku početnu brzinu $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ onda iz prethodne jednačine sledi da je:

$$\left(\dot{\varphi} + \omega \sin\psi\right) \approx 0$$

Što daje

$$\dot{\varphi} \approx -\omega \sin\psi$$

$$\varphi \approx -\omega t \sin\psi + c_1$$

Iz poslednje relacije zaključjemo da se *ravan klatna obrče* u suprotnom smeru od smera sopstvenog obrtanja Zemlje, a da *brzina obrtanja klatna* zavisi od geografske širine ψ tačke vezivanja klatna. Najveća *brzina obrtanja ravni klatna je na polu*, gde je geografska širina $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, pa je brzina obrtanja ravni klatna $\dot{\varphi} \approx -\omega$ po apsolutnoj vrednosti jednaka ugaonoj brzini sopstvene rotacije Zemlje, pa *ravan klatna za 24 časa napravi jedan pun obrtaj*, dok je na *ekvatoru* ta brzina jednaka nuli $\dot{\varphi} \approx 0$ jer je geografska širina jednaka nuli, $\psi = 0$. Na primer u Beogradu gde je geografska širina $\psi = 44^0 48'13''$ ravan klatna se obrne za $10^0 24'$ u proteku od jednog časa.

Znači da se ravan klatna obrće sa istoka na zapad. Prvi eksperiment sa klatnom dužine $67[m]$ i kuglom mase $30[kg]$ izveo je Leon Fuko (***Léon Foucault*** 1819-1868) je u Pariskom Panteonu 1851. godine i uočio pojavu obrtanja ravni klatna i time dokazao obrtanje Zemlje. Za geografsku širinu od $\psi = 45^0$ ugao za koji se obrne ravan klatna biće $\varphi \approx 10^0 38'$ za jedan srednje sunčan dan.

Kako sila težine ima funkciju sile $U = mg\zeta$

APPENDIX

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.

Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевъ. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922

Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - *Воронков* - *Минаков* - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - *Lowry H.* - *Hayden H.* - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - *Л. Люстерник* - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - *Webers* - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - *Newton* - *Gross* - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - *Scheffers* - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - *Pöschl* - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - *Cranz* - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.

G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche.
Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.

I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.

L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.

J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.

J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.

P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.

L. Poinsot (1777-1859) - Éléments de statique. Paris 1804.

C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.

W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.

H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.

H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.

И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.

Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.

T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.

R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.

J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.

P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.

С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.

К. Стојановић - Механика. Београд 1912.

Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.

Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.

E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.