DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VI. *ŠESTA NEDELJA*
Dinamika materijalne *tačke*

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke i njihovi integrali, početni uslovi.

Pravolinijsko kretanje materijalne tačke. Vertikalni hitac naviše i naniže. Sila zavisi samo rastojanja: Harmonijsko kretanje. Slobodan pad sa velike visine. Sila zavisi od rastojanja i brzine: Amortizovano kretanje. Sila zavisi od vremena, rastojanja i brzine: Prinudne oscilacije.

Krivolinijsko kretanje materijalne tačke u ravni: Horizontalni i kosi hitac.

VII.1. SEDMA NEDELJA

Konzervativno kretanje. Konzervativne sile. Funkcija sile. Cauchy-Reiman-ovi uslovi. Rad konzervativne sile. Potencijalna energija. Teorema o održanju mehaničke energije. Integral energije. Odredjivanje funkcije sile.

Centralna kretanja. Funkcija sile kod centralnih kretanja. Bineov obrazac.

Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanom sistemu koordinata. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VII.2. OSMA NEDELJA

Prinudno kretanje materijalne tačke. Veze. Podela veza. Uslovi za brzinu i ubrzanje. Lagrange-ovi množioci veza. Kretanje materijalne tačke po idealnoj površi. Lagrange-ove jednačine I vrste. Diferencijalne jednačine kretanja u prirodnom sistemu koordinata. Integral energije. Kretanje materijalne tačke po obrtnoj površi. Prinudno kretanje materijalne tačke po liniji. Integral energije. kretanje materijalne tačke po krugu u polju zemljine teže. Dinamika relativnog kretanja materijalne

VII.3. DEVETA NEDELJA
Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

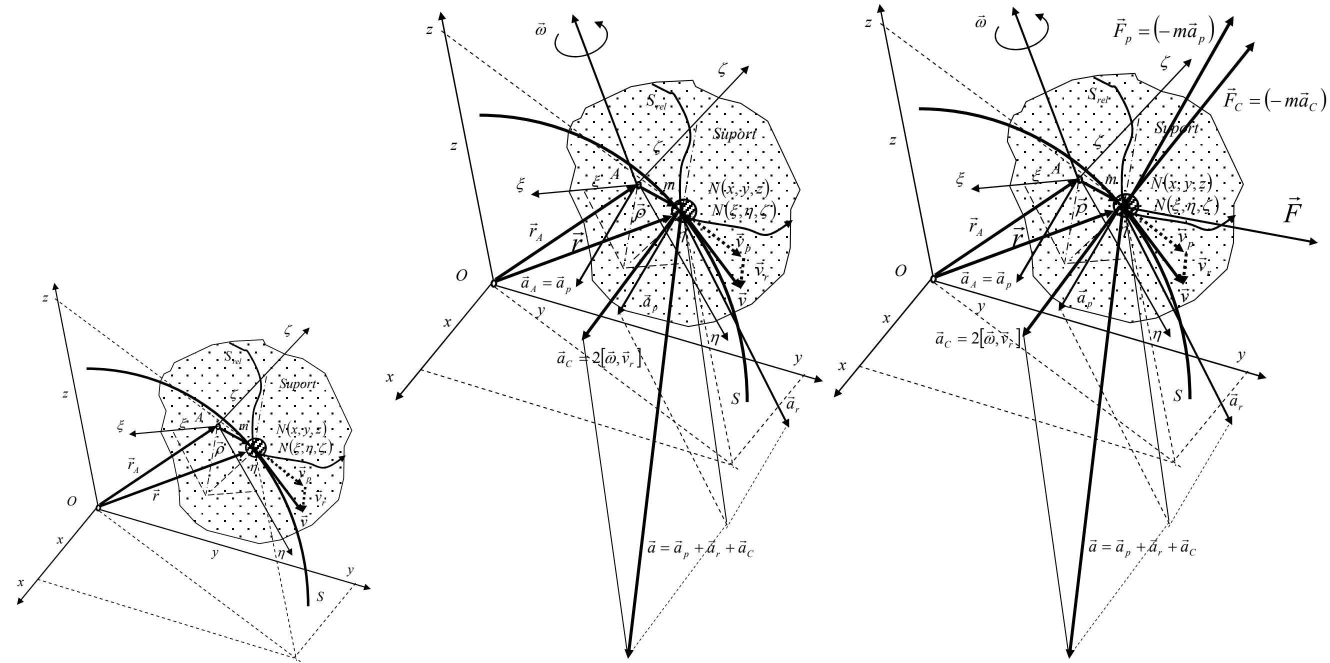
Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke

Vektorske invarijante kinematike realtivnog kretanja: vektor brzine $\vec{v}$ i vektor ubrzanja $\vec{a}$ pokretne kinematičke (geometrijske) tačke.

Kada smo u kinematici odredjivali vektorske invarijante kinematike, a i dinamike (dela kinetike) – vektor brzine $\vec{v}$ i vektor ubrzanja $\vec{a}$ pokretne kinematičke (geometrijske) tačke u odnosu na dva koordinatna sistema, jedan nepokretan (apsolutni, referentni) $Oxyz$ i jedan pokretni (relativni) $A\xi\eta\zeta$ pretpostavili smo da je on vezan za neki pokretni nosač (suport). Na prvoj, u seriji od tri slike, prikazan je taj nosač, kao i dva naznačena koordinatna sistema, nepokretni (apsolutni, referentni) $Oxyz$ i pokretni (relativni) $A\xi\eta\zeta$ vezan za nosač (suport). Nosač /suport) je prikazan u vidu tela, koje izvodi opšti slučaj kretanja translatornom brzinom $\vec{v}_A$ referentne tačke tela u kojoj je koordinatni početak A pokretnog, sa njim, ali relativno nepokretnog u odnosu na njega, koordinatnog sistema. Položaj materijalne tačke u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ koordinata x, y i z odredjen je vektorom položaja $\vec{r}$, dok je vektor položaja koordinatnog početka A pokretnog sistema koordinata $A\xi\eta\zeta$ u nepokretnom sistemu koordinata $\vec{r}_A$. Sa $\vec{\rho}$ označili smo vektor relativnog položaja materijalne tačke u odnosu na referentnu tačku suporta A, odnosno njen vektor položaja u pokretnom sistemu koordinata $A\xi\eta\zeta$ i u odnosu na koordinatni početak A tog sistema koordinata. Na osnovu toga pišemo

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

Kako je vektor položaja vektorska invarijanta, geometrijskog svojstva, to ova relacija važi i ako umesto Descartes-ovih koordinatnih sistema nepokretnog (apsolutnog, referentnog) $Oxyz$ i pokretnog (relativnog) $A\xi\eta\zeta$ .uzmemo opšte sisteme krivolinijskih koordinata q_1, q_2 i q_3, donosno $Oq_1q_2q_3$ i $A\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3$, odnosno naprimer ortogonalne krivolinijeske sisteme $Or\varphi z$ i $A\tilde{r}\tilde{\varphi}\tilde{z}$ za tj. koordinatne sisteme polano cilindričkih koordinata ili pak koordinatne sisteme sfernih koordinata, $O\rho\varphi\psi$ i $A\tilde{\rho}\tilde{\varphi}\tilde{\psi}$.



Slika. *Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke*

Brzinu materijalne tačke, kao vektorsku invarijantu, dobijamo diferenciranjem po vremenu njenog vektora položaja, te je:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \overset{*}{\vec{\rho}} + [\vec{\omega},\vec{\rho}] = \vec{v}_A + [\vec{\omega},\vec{\rho}] + \vec{v}_r = \vec{v}_p + \vec{v}_r$$

gde su $\vec{v}_p = \vec{v}_A + [\vec{\omega},\vec{\rho}]$ i $\vec{v}_r = \overset{*}{\vec{\rho}}$ komponente brzine materijalne tačke, prenosnog i relativnog kretanja i opisuju se sledećim relacijama:

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{r}}_A + [\vec{\omega},\vec{\rho}] = \vec{v}_{p,transl} + \vec{v}_{p,rot} = \vec{v}_A + \vec{v}_N^{(A)}$$

$$\vec{v}_r = \overset{*}{\vec{\rho}} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + [\vec{\omega}_{rel},\vec{\rho}]$$

Ubrzanje materijalne tačke, kao vektorsku invarijantu, dobijamo diferenciranjem po vremenu njegog vektora brzine, te je:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_A + \overset{**}{\vec{\rho}} + \left[\vec{\omega},\overset{*}{\vec{\rho}}\right] + [\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}] + \left[\vec{\omega},\overset{*}{\vec{\rho}}\right] + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] = \vec{a}_A + \vec{a}_r + 2[\vec{\omega},\vec{v}_r] + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]]$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_A + [\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}] + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] + \vec{a}_r + 2[\vec{\omega},\vec{v}_r] = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

gde su $\vec{a}_p$, $\vec{a}_r$ i $\vec{a}_C$ komponente vektora ubrzanja materijalne tačke, prenosnog i relativnog kretanja i Koriolisovog ubrzanja (***G. Coriolis*** – 1792-1849, *Mémoire sur les équations du mouvement relatif*, publikovano 1832. godine, ali je prvi relaciju za ovo $\vec{a}_C$, sada nazvano Koriolisovo, ubrzanje formulisao ***Clairaut*** 1742. godine) usled sprege prenosnog i relativnog kretanja i opisuje se sledećim relacijama:

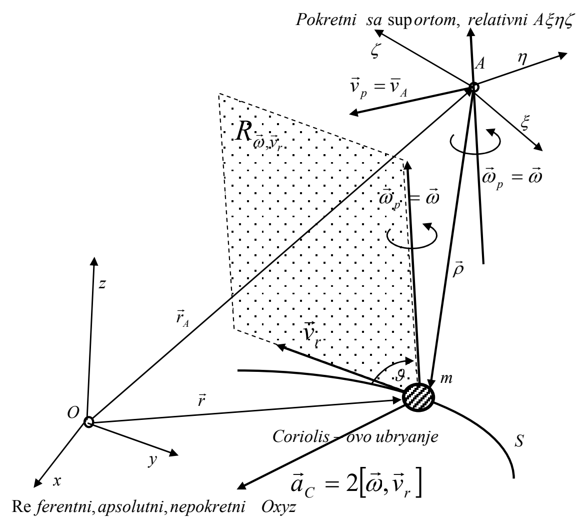
$$\vec{a}_r = \overset{**}{\vec{\rho}} = \ddot{\rho}\vec{\rho}_0 + \left[\vec{\omega}_{rel},\overset{*}{\vec{\rho}}\right] + [\dot{\vec{\omega}}_{rel},\vec{\rho}] + [\vec{\omega}_{rel},[\vec{\omega}_{rel},\vec{\rho}]] = \vec{a}_{re} + \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] \qquad \vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$$

Komponenta $\vec{a}_{re}$ se javlja samo u slučaju reonomne veze materijalne tačke sa suportom. Naprimer, ako se materijalna tačka kreće po reonomnoj vezi, koja je zadata u pokretnom sistemu koordinata. U slučaju skleronomne veze ta komponenta je jednaka nuli.

Sada možemo da rezimiramo: Pri relativnom kretanju materijalne tačke pored relativnog i prenosnog ubrzanja se javlja i ***Koriolisovo ubrzanje*** $\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, koje je dvostruki vektorski proizvod izmedju ugaone brzine $\vec{\omega}$ prenosnog kretanja i brzine $\vec{v}_r$ relativnog kretanja. Kako je ovo ubrzanje vektorski proizvod dva vektora ono će biti jednako nuli u sledećim slučajevima: 1* kada su ta dva vektora kolinearna; 2* kada je ugaona brzina $\vec{\omega}$ prenosnog kretanja jednaka nuli, odnosno kada se suport kreće translatorno; 3* kada je brzina $\vec{v}_r$ relativnog kretanja jednaka nuli, odnosno kada nema relativnog kretanja.

Imajući u vidu da je Koriolisovo ubrzanje vektorski proizvod $\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$ dva vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ prenosnog kretanja i brzine $\vec{v}_r$ relativnog kretanja, to ono sa tim vektorima obrazuje desni trijedar tih vektora $\vec{\omega}$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_C$. Koriolisovo ubrzanje je najvećeg intenziteta, kada je ugao ϑ izmedju ugaone brzine $\vec{\omega}$ prenosnog kretanja i brzine $\vec{v}_r$ relativnog kretanja jednak $\frac{\pi}{2}$. , odnosno, kada su ta dva vektora ortogonalna.



Slika. Koriolisovo ubrzanje materijalne tačke pri relativnom kretanju

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže sastavljamo sledeću vektorsku jednačinu:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT} = 0$$

Ne gubeći opštost polazimo od vektorske relacije iskaza principa dinamičke ravnoteže u jednostavnijem obliku za slobornu materijalnu tačku

$$(-m\vec{a}(t)) + \vec{F} = 0$$

u prethodnoj jednačini za slučaj relativnog kretanja $\vec{a}$ je apsolutno ubrzanje, a $\vec{F}$ aktivna sila, koja dejstvuje na na materijalnu tačku. U slučaju prinudnog kretanja materijalne tačke na koju dejstvuju veze, ta sila je rezultujuća sila aktivnih sila i sila veze.

Problem dinamike relativnog kretanja materijalne tačke sastoji se u tome da se pomoću poznatih početnih uslova – poznatog početnog položaja materijalne tačke i njene početne relativne brzine u početnom trenutku proučavanja kretanja, kao i poznatog zakona kretanja nosača (suporta) i poznatih sila koje dejstvuju na tu materijalnu tačku, odredi zakon njenog relativnog kretanja. Sada na osnovu principa dinamičke ravnoteže sastavljamo sledeću vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja materijalne tačke:

$$m\vec{a}_r = m\vec{a} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_C$$

ili

$$m\vec{a}_r = m\vec{a} - m\left\{\vec{a}_A + \left[\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}\right] + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right]\right\} - 2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$$

U prethodnim obrascima su $\vec{\omega}$ ugaona brzina i $\dot{\vec{\omega}}$ ugaono ubrzanje prenosnog kretanja, i pretpostavljeno je da su usmereni u direktnom smeru obrtanja (suprotno od smera kazaljke na časovniku).

Aktivne sile $\vec{F}$ i sile veze su stvarne sile jer za njih možemo pokazati izvore iz kojih dejstvuju. Medjutim, kako u svom udžbeniku dinamika piše Rašković, za sile $-m\vec{a}_p = \vec{F}_p$ i $-m\vec{a}_C = \vec{F}_C$, ne možemo pokazati izvore i zato ih nazivamo fiktivnim i tipa su sila inercije i to: $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ prenosna sila inercije (vodeća sila) i $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ Koriolisova sila inercije. Obe ove sile su suprotno usmerene od odgovarajućih ubrzanja, $\vec{a}_p$ prenosnog i $\vec{a}_C = 2\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ Koriolosovog.

Prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a} = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ su izvori suštinske razlike u dinamici apsolutnog i relativnog kretanja materijalne tačke. U apsolutnom kretanju materijalne tačke javljaju se samo stvarne sile – aktivne sile i sile veza koje dejstvuju, dok u relativnom kretanju pored aktivnih sila i sila veze koje dejstvuju na materijalnu tačku, javljaju se fiktivne sile - prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$. Na osnovu principa dinamičke ravnoteže i prethodne analize možemo da napišemo sledeću vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja materijalne tačke po nosaču (suportu) u sledećem obliku:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_C$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_\Phi$$

gde je $\vec{F}_\Phi = \vec{F}_p + \vec{F}_C$ ukupna fiktivna sila. Na osnovu poslednje vektorske jednačine možemo da iskažemo princip dinamičke ravnoteže relativnog kretanja materijalne tačke na nosaču:

Proizvod mase slobodne pokretne materijalne tačke i ubrzanja njenog relativnog kretanja po nosaču jednak je zbiru aktivnih sila i fiktivnih sila.

Proizvod mase pokretne materijalne tačke podvrgnute dejstvu veza i ubrzanja njenog relativnog kretanja po nosaču jednak je zbiru aktivnih sila, sila otpora veza i fiktivnih sila.

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT} + \vec{F}_{wv} + \vec{F}_\Phi$$

Specijalan slučaj je kada se suport (nosać) kreće jednoliko translatorno, tj. konstantnom brzinom, i tada su prenosno ubrzanje i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli, pa su i fiktivne sile jednake nuli, $\vec{F}_\Phi = 0$, pa važi da je:

* za slobodnu materijalnu tačku

$$m\vec{a}_r = \vec{F}$$

* za materijalnu tačku na koju dejstvuju neidealne veze posredstvom otpora veza $\vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT}$ i otpor sredine $\vec{F}_{wv}$:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT} + \vec{F}_{wv}$$

i jednačine su iste kao i u slučaju apsolutnog kretanja. Pokretni koordinatni sistemi koji se kreću jednoliko translatorno, tj. u kojima važe prethodne vektorske jednačine relativnog kretanja su inercijski sitemi.

Kada se suport (nosać) kreće jednoliko translatorno, tj. konstantnom brzinom, i tada su prenosno ubrzanje i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli, pa su i fiktivne sile jednake nuli, $\vec{F}_{\Phi} = 0$ i istovremeno pri prinudnom kretanju materijalne tačke na koju dejstvuje jedna neidealna hrapava skleronomna geometrijska veza $f(\xi,\eta,\zeta) = 0$ vektorska jednačina relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \lambda grad\, f - \mu|\lambda grad\, f|\frac{\vec{v}}{v} - b\vec{v}$$

Kada se suport (nosać) kreće jednoliko translatorno, tj. konstantnom brzinom, i tada su prenosno ubrzanje i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli, pa su i fiktivne sile jednake nuli, $\vec{F}_{\Phi} = 0$ i istovremeno pri prinudnom kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve neidealne hrapave skleronomne geometrijske veze $f_i(\xi,\eta,\zeta) = 0,\ i = 1,2$ vektorska jednačina relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \lambda_1 grad\, f_1 - \mu_1|\lambda_1 grad\, f_1|\frac{\vec{v}}{v} + \lambda_2 grad\, f_2 - \mu_2|\lambda_2 grad\, f_2|\frac{\vec{v}}{v} - b\vec{v}$$

Kada se suport (nosać) kreće jednoliko translatorno, tj. konstantnom brzinom, i tada su prenosno ubrzanje i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli, pa su i fiktivne sile jednake nuli, $\vec{F}_{\Phi} = 0$ i istovremeno pri prinudnom kretanju materijalne tačke na koju dejstvuje jedna neidealna hrapava reonomna nestacuinarna geometrijska veza $f(\xi,\eta,\zeta,t) = 0$ vektorska jednačina relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p^* + \lambda grad\, f - \mu|\lambda grad\, f|\frac{\vec{v}}{v} - b\vec{v}$$

Kada se suport (nosać) kreće jednoliko translatorno, tj. konstantnom brzinom, i tada su prenosno ubrzanje i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli, pa su i fiktivne sile jednake nuli, $\vec{F}_{\Phi} = 0$ i istovremeno pri prinudnom kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve neidealne hrapave reonomne nestarionarbne geometrijske veze $f_i(\xi,\eta,\zeta,t) = 0,\ i = 1,2$ vektorska jednačina relativnog kretanja je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{\Phi}^* + \lambda_1 grad\, f_1 - \mu_1|\lambda_1 grad\, f_1|\frac{\vec{v}}{v} + \lambda_2 grad\, f_2 - \mu_2|\lambda_2 grad\, f_2|\frac{\vec{v}}{v} - b\vec{v}$$

gde su $\vec{F}_p^*$ i $\vec{F}_{\Phi}^*$ fiktivne sile inercije koje potiču od reonomnih nestacionarnih veza.

Kada se pokretna materijalna tačka nalazi u relativnom mirovanju (dinamičkoj ravnoteži) na pokretnom nosaču (suportu) tada su $\vec{v}_r = 0$, $\vec{a}_r = 0$, pa sledi i da je Koriolisovo ubrzanje jednako nuli.

Prema tome *uslov relativne ravnoteže materijalne tačke*, odnosno relativnog mirovanja na pokretnom suportu je izražen sledećom vektorskom jednačinom:

$$\vec{F} + \vec{F}_p = 0$$

ili

$$\vec{F} + (-m\vec{a}_p) = 0$$

Teorema o promeni kinetičke energije relativnog kretanja. Integral energije relativnog kretanja

Razmotrimo prvo slučaj kada je *prenosno kretanje suporta (nosača za koji je vezan koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$) stacionarno*. Kada je prenosno kretanje stacionarno, onda se pokretni trijedar $A\xi\eta\zeta$ kreće translatorno i jednoliko konstantnom brzinom $\vec{v}_A = \vec{c} = const$ koordinatnog početka A i njeno ubrzanje je tada jednako nuli $\vec{a}_A = 0$, i jednoliko obrće oko koordinatnog početka A konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \vec{c}_{\omega} = const$, kada je $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Tada, materijalna tačka. koja se kreće relativno po tom suportu (u odnosu na tu referentnu tačku – koordinatni početak A, odnosno relativni sistem koordinata $A\xi\eta\zeta$), dobija ubrzanje usled dejstva suporta, koji se kreće i njegovog prenosnog kretanja

$$\vec{a}_p = \{\vec{a}_A + [\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}]\}_{stac} + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] = [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]]$$

jer je $\left\{\vec{a}_A + \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}\right]\right\}_{stac} = 0$. Možemo zaključiti da je tada ubrzanje stacionarnog prenosnog kretanja koje dejstvuje na materijalnu tačku jednako *normalnom (centripetalnom) ubrzanju*. Iz ovoga sledi da je *vodeća sila inercije prenosnog kretanja* $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ ili *prenosna sila inercije (vodeća sila)* pokretne materijalne tačke, koja se kreće po suportu jednaka:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_p = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right]$$

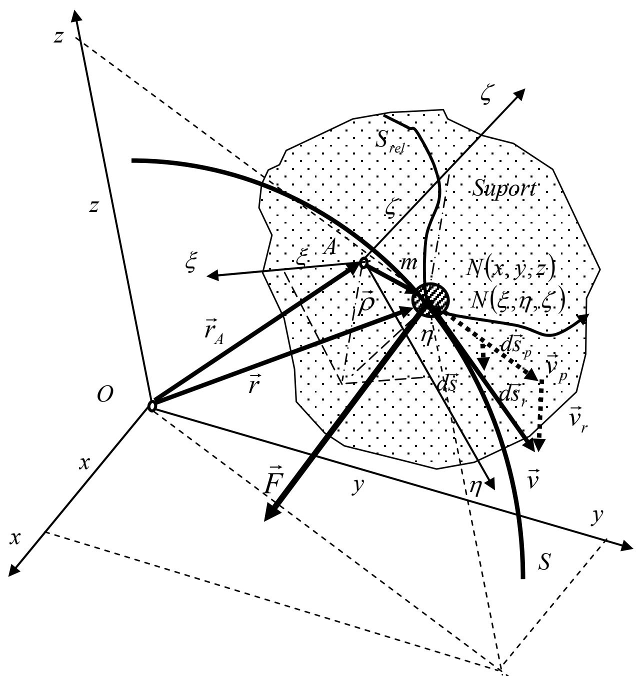
Ova vodeća sila inercije za slučaj stacionarnog prenosnog kretanja ima suprotan smer od centripetalnog ubrzanja i nazivamo je *centrifugalna ili aksifugalna sila*. Pored ove vodeće prenosne sile, inercije i za slučaj stacionarnog prenosnog kretanja, javlja se i *Koriolisova sila inercije*

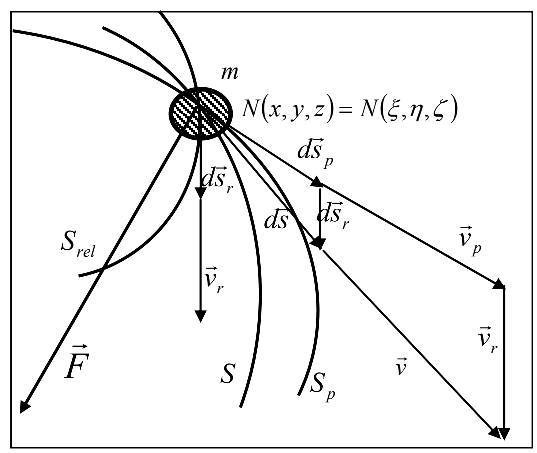
$$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$$

Na osnovu prethodne analize za slučaj stacionarnog prenosnog kretanja, koje smo definisali, iz *principa dinamičke ravnoteže* za materijalnu tačku koja se relativno kreće po tom suportu stacionarnog kretanja, moženo da napišemo sledeću vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right] - 2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$$

To je *osnovna vektorska jednačina dinamike relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji izvodi stacionarno prenosno kretanje.*





Detalj - kinematičke, vektorske invarijante relativnog kretanja

Označimo sa $d\vec{s} = \vec{v}dt$ element luka duž putanje apsolutnog kretanja materijalne taćke, sa $d\vec{s}_p = \vec{v}_p dt$ prenosnog kretanja, a sa $d\vec{s}_r = \vec{v}_r dt$ njenog relativnog kretanja. Očugledno je da za element luka putanje pokretne materijalne tačke pri njenom prenosnom i relativnom kretanju je: $d\vec{s} = d\vec{s}_p + d\vec{s}_r$.

Sada pomnožimo prethodnu vektorsku jednačinu *dinamike relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji izvodi stacionarno prenosno kretanje.* skalarno sa elementom luka $d\vec{s}_r = \vec{v}_r dt$ duž putanje relativnog kretanja te dobijamo:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right] - 2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right] / \cdot\, d\vec{s}_r = \vec{v}_r dt$$

$$\left(m\vec{a}_r, \vec{v}_r dt\right) = \left(\vec{F}, d\vec{s}_r\right) - m\left(\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right], d\vec{s}_r\right) - 2m\left(\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right], \vec{v}_r dt\right)$$

Kako je mešoviti proizvod $\left(\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right],\vec{v}_r\right) = 0$ tri vektora od kojih su dva kolinearna jednak nuli, zatim imajući u obzir da skalarni proizvod $\left(m\vec{a}_r, \vec{v}_r dt\right)$ možemo napisati u obliku

$$\left(m\vec{a}_r,\vec{v}_r dt\right)=\left(m\frac{d\vec{v}_r}{dt},\vec{v}_r dt\right)=\left(md\vec{v}_r,\vec{v}_r\right)=d\left(m\frac{v_r^2}{2}\right),$$

kao i da možemo transformaisati član $-m\left(\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right],d\vec{s}_r\right)$ na sledeći oblik

$$-m\left(\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right],d\vec{s}_r\right)=-m\left(\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right],d\vec{\rho}_r\right)=-m\left(\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right],\left[d\vec{\rho},\vec{\omega}\right]\right)=-m\left(\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right],d\left[\vec{\rho},\vec{\omega}\right]\right)=$$

$$=m\left(\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right],d\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right)=d\left\{\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right\}$$

to se prethodna jednačina svodi na sledeći oblik:

$$d\left(m\frac{v_r^2}{2}\right)-d\left\{\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right\}=\left(\vec{F},d\vec{s}_r\right)$$

I na kraju možemo da napišemo sledeću relaciju

$$d\left\{\left(m\frac{v_r^2}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right)\right\}=\left(\vec{F},d\vec{s}_r\right)$$

Koja je *matematički iskaz teoreme o promeni kinetičke energije relativnog kretanja ili teoreme o promeni ''žive sile'' relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji izvodi stacionarno složeno kretanje*.

U slučaju da aktivna sila ima funkciju sile $U(\xi,\eta,\zeta)$ ili $U(\rho)$ tada se aktivna sila može izraziti kao $\vec{F}=gradU(\xi,\eta,\zeta)$ ili $\vec{F}=gradU(\rho)$, te je elementarni rad te sile na elementarnom pomeranju duž putanje relativnog kretanja:

$$\left(\vec{F},d\vec{s}_r\right)=\left(grad\,U,\vec{v}_r dt\right)=\left(grad\,U,d\vec{\rho}\right)=dU$$

te *matematički iskaz teoreme o promeni kinetičke energije relativnog kretanja ili teoreme o promeni ''žive sile'' relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, koji izvodi stacionarno složeno kretanje u slučaju* da su aktivne sile konzervativne i imaju fukciju sile dobija oblik:

$$d\left\{\left(m\frac{v_r^2}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right)\right\}=dU$$

što posle integraljenja u konačnom obliku daje relaciju:

$$\left\{\left(m\frac{v_r^2}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right)\right\}-\left\{\left(m\frac{v_{r0}^2}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_0\right]^2\right)\right\}=U-U_0$$

ili

$$\frac{m}{2}\left(v_r^2-\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]^2\right)=U+h$$

Ovo je *integral energije relativnog kretanja materijalne tačke pri stacionarnom prenosnom kretanju i dejstvu konzervativnih sila. Može se iskazati i kao teorema o promeni kinetičke energije - ''žive sile'' energije relativnog kretanja materijalne tačke pri stacionarnom prenosnom kretanju i dejstvu konzervativnih sila.*

Za slučaj relativnog kretanja u ravni ovaj prethodni integral se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{m}{2}v_r^2=U+\frac{m}{2}\omega^2\rho^2+h$$

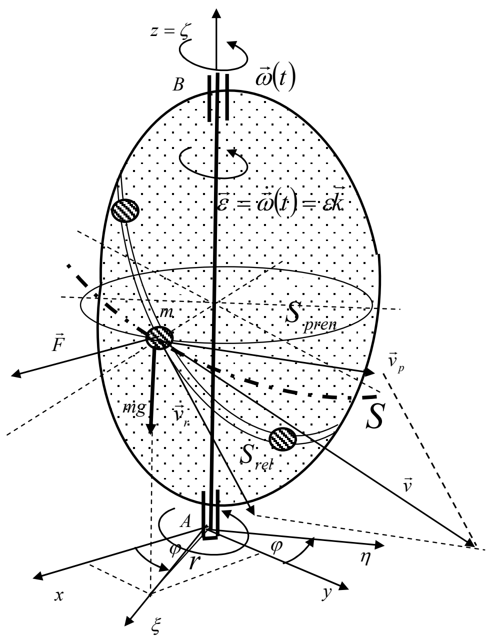
pri čemu je kvadrat potega $\rho^2=\xi^2+\eta^2$, relativnog rastojanja materijalne tačke od referentnog koordinatnog početka jer, je $\zeta=0$, dok je ugaona brzina prenosnog kretanja sa sledećim komponentama: $\omega_\xi=\omega_\eta=0$, $\omega=\omega_\zeta$. Poslednji integral za slučaj ravanskog relativnog kretanja u literaturi je poznat kao Jakobijev integra (***Ch. G. Jacobi*** 1894-1651).

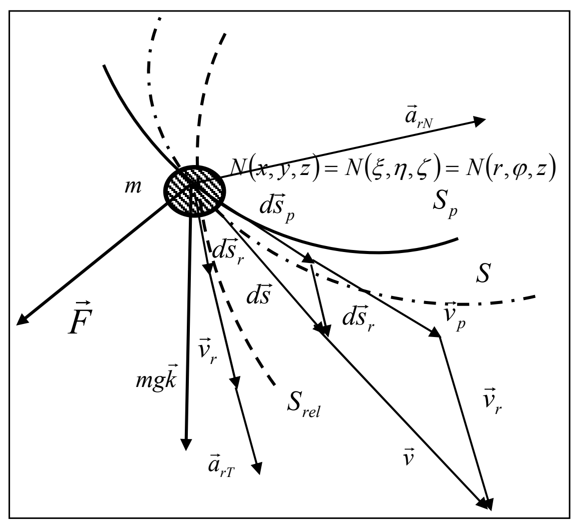
Specijalni slučajevi relativnog kretanja materijalne tačke.

1 Slučaj kada je prenosno kretanje obrtanje tela oko nepokretne ose*

Slučaj kada je prenosno kretanje obrtanje tela oko nepokretne ose proučićemo u slici i reči. Na sledećim slikama je prikazan model relativnog kretanja pomoću suporta koji rotira oko nepokretne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t)=\omega(t)\vec{k}$ *, koja je funkcija vremena* t*, gde smo izabrali nepkretni koordinatni sistem, tako da je osa* z *u pravcu ose rotacije suporta i da se sa njom poklapa. Ose* x *i* y *neprokretnog sistema (referentnog)* $Oxyz$ *su upravne na osu rotacije suporta i leže u ravni upravnoj na tu osu rotacije. Pokretni koordinatni sistem* $A\xi\eta\zeta$ *je vezan sa suportom i koordinatni početak mu se poklapa sa tačkom* O*- koordinatnim početkom nepokretnog koordinatnog sistema* $Oxyz$ *i sa njim ima zajednićku osu koja se poklapa sa osom rotacije* $\zeta=z$*,* $\vec{k}=\vec{k}'=\dfrac{\vec{\omega}}{\omega}$*.*

Pokretni koordinatni sistem rotira oko ose suporta istom ugaonom brzinom kao i suport $\vec{\omega}(t)=\omega(t)\vec{k}$*. Takodje usvajamo i polarno-cilindrički sistem koordinata* $Ar\varphi z$ *koji će nam biti od koristi pri daljem računanju.Ugaono ubrzanje rotacije suporta neka je* $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\vec{k}$*. Takodje pretpostavimo da se materijalna tačka kreće po suportu po potnatoj putanji relativnog kretanja koja je odredjena u polarnocilindričkom sistemu koordinata* $\vec{r}_r=r_r(t)\vec{r}_0$*,* $\varphi_r=\varphi(t)$ *i* $z_r=z_r(t)$*, kao i da je vektor njegovog relativnog položaja u pokretnom sistemu koordinata* $\vec{\rho}=r_r\vec{r}_0+z_r\vec{k}$*. Takodje pretpostavimo da nam je poznata projekcija putanje relativnog kretanja* $r_r=r_r(\varphi_r)$*.*





Detalj - kinematičke, vektorske invarijante relativnog kretanja pri obrtnom prenosnom kretanju

Sada možemo odrediti brzinu relativnog kretanja:

$$\vec{v}_r=\dot{r}_r\vec{r}_0+r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0+\dot{z}\vec{k}$$

dok je ubrzanje relativnog kretanja

$$\vec{a}_r=\dot{\vec{v}}_r=\left(\ddot{r}_r-r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0+\left(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r-r_r\ddot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0+\ddot{z}\vec{k}=\left(\ddot{r}_r-r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0+\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0+\ddot{z}\vec{k}$$

Odnosno možemo napisati da je_ž:

$$\vec{a}_{rN}=\left(\ddot{r}_r-r_r\dot{\varphi}_r^2\right)\vec{r}_0$$

$$\vec{a}_{rT}=\left(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r-r_r\ddot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0=\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right)\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{rz}=\ddot{z}\vec{k}$$

Kako su radijalne koordinate materijalne tačke pri relativnom i apsolitnom kretanju jednake, zbog obrtanja suporta oko nepokretne ose, to se indeks kod radijalne koordinate može izostaviti, ali se kod cirkularne *koordinate ne sme izostaviti jer se cirkularne koordinate relativnog i prenosnog kretanja sumiraju te je* $\varphi_a = \varphi_r + \varphi_p$ *, te o tome moramo voditi računa.*

Kako je prenosno kretanje obrtanje oko nepokretne ose, to su prenosna brzina i ubrzanje materijalne tačke, koja vrši relativno kretanje po suportu, jednaki brzini i ubrzanju tačke suporta u kojoj se pokretna materijalna tačka nalazi pri njenom relativnom kretanju po suportu. Znači das u njene polarnocilindričke coordinate u odnosu na suport $\vec{r}_r = r_r(t)\vec{r}_0$, $\varphi_r = \varphi(t)$ i $z_r = z_r(t)$, a vektor njenog relativnog položaja u pokretnom sistemu koordinata $\vec{\rho} = r_r\vec{r}_0 + z_r\vec{k}$. Znači da putanja relativnog kretanja nije ravna kriva. Prenosna brzina i ubrzanje koje dobija pokretna materijalna tačka usled prenosnog kretanja suporta koji se obrće oko nepokretne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k} = \dot{\varphi}_p\vec{k}$ i ima ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}_p\vec{k}$, gde je $\varphi_p = \varphi_p(t)$ ugao rotacije suporta su:

$$\vec{v}_p = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = r_r\omega\vec{T}$$

$$\vec{a}_p = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_r]] = \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN} = r_r\dot{\omega}\vec{T} - r_r\omega^2\vec{N}$$

jer je referentna tačka A nepokretna. Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT} = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r] = r_r\dot{\omega}\vec{T} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{T} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

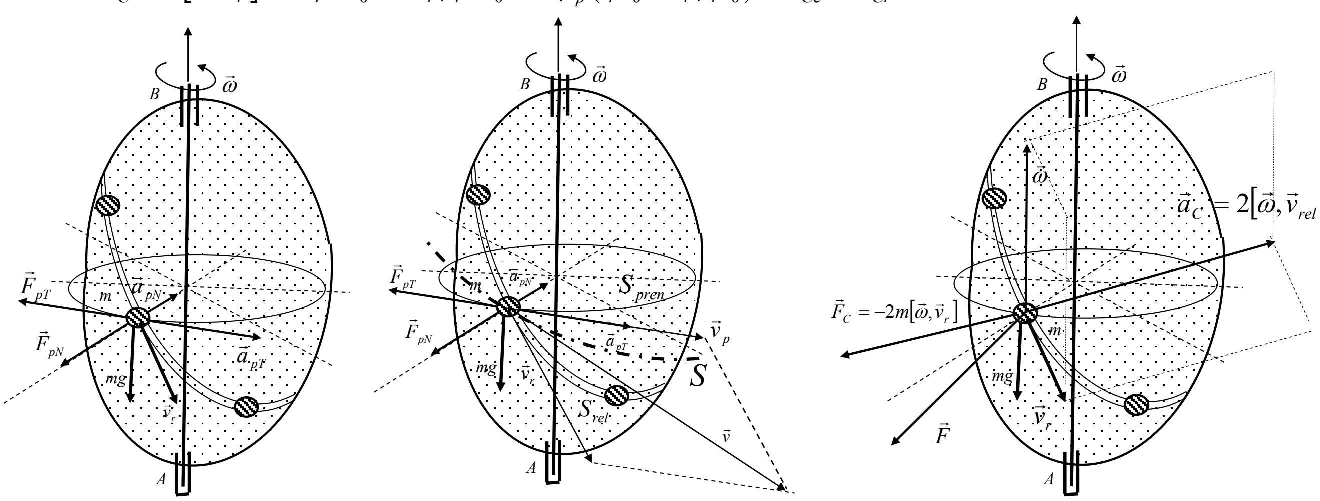
$$\vec{a}_{pN} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_r]] = -r_r\omega^2\vec{N} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

Koristeći izraz za brzinu relativnog kretanja, koju znamo $\vec{v}_r = \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}$, te *je* Koriolisovo ubrzanje, u obliku:

$$\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = 2[\vec{\omega}, \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}] = 2\dot{r}_r[\vec{\omega}, \vec{r}_0] + 2r_r\dot{\varphi}_r[\vec{\omega}, \vec{c}_0] + 2\dot{z}[\vec{\omega}, \vec{k}]$$

Odakle sledi da je:

$$\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 - 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = 2\dot{\varphi}_p(\dot{r}_r\vec{c}_0 - r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0) = \vec{a}_{Cc} + \vec{a}_{Cr}$$



Koriolisovo ubrzanje, za razmatrani slučaj prenosnog kretanja, leži u ravni upravnoj na osu rotacije suporta (nosača) i upravno na vektor brzine relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, pri tome komponenta relativne brzine u pravcu ose rotacije ne utiče na intenzitet Koriolisovog ubrzanja, jer je njen vektorski proizvod sa ugaionom brzinom suporta jednak nuli. Komponente Koriolisovog ubrzanja pokretne materijalne tačke, koja se relativno kreće po suportu koji rotira oko nepokretne ose po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, u cirkularnom i radijalnom pravcu su:

$$\vec{a}_{Cc} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{Cr} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Iz izvedenih izraza možemo zaključiti da obe komponente Koriolisovog ubrzanja postoje, kada je prenosno kretanje rotaciono. Ali moženo da zaključimo, takodje, da cirkularna komponenta ne postoji ako je i relativno kretanje rotacija oko ose suporta, ili zavojno kretanje po cilindru oko ose rotacije suporta.

Sada za ovaj specijalan slučaj, *proizvoljnog relativnog kretanja materijalne tačke (u skladu sa definisanim pretpostavkama proizvooljnosti,* $\vec{r}_r = r_r(t)\vec{r}_0$, $\varphi_r = \varphi(t)$ i $z_r = z_r(t)$, $r_r = r_r(\varphi_r)$*) po suportu, koji rotira oko nepokretne ose* po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, možemo napisati izraze za prenosnu silu inercije (vodeću silu) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisovu silu inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$.

Izraz u vektorskom obliku za prenosnu silu inercije (vodeću silu) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ je:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_p = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_r]] = -m\vec{a}_{pT} - m\vec{a}_{pN} = -mr_r\dot{\omega}\vec{T} + mr_r\omega^2\vec{N} = \vec{F}_{pT} + \vec{F}_{pN}$$

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće su:

$$\vec{F}_{pT} = -m\vec{a}_{pT} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right] = -mr_r\dot{\omega}\vec{T} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{T} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN} = -m\vec{a}_{pN} = -m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_r]] = -m\left(-r_r\omega^2\right)\vec{N} = mr_r\omega^2\vec{N} = -m\left(-r_r\dot{\varphi}_p^2\right)\vec{r}_0 = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$ je sada:

$$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = -2m\left[\vec{\omega}, \dot{r}_r\vec{r}_0 + r_r\dot{\varphi}_r\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}\right] = -2m\dot{r}_r[\vec{\omega}, \vec{r}_0] - 2mr_r\dot{\varphi}_r[\vec{\omega}, \vec{c}_0] - 2m\dot{z}\left[\vec{\omega}, \vec{k}\right]$$

Odakle sledi da je:

$$\vec{F}_C = -2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 + 2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = -2m\dot{\varphi}_p\left(\dot{r}_r\vec{c}_0 - r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\right) = -m\vec{a}_{Cc} - m\vec{a}_{Cr}$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, za raznatrani slučaj prenosnog kretanja, leži u ravni upravnoj na osu rotacije suporta (nosača) i upravno na vektor brzine relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, i pri tome komponenta relativne brzine u pravcu ose rotacije ne utiče na intenzitet Koriolisove sile inercije, jer je njen vektorski proizvod sa ugaionom brzinom suporta jednak nuli. Komponente Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$, koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, koja se relativno kreće po suportu koji rotira oko nepokretne ose po zakonu promene ugla rotacije $\varphi_p = \varphi_p(t)$, u cirkularnom i radijalnom pravcu su:

$$\vec{F}_{Cc} = -m\vec{a}_{Cc} = -2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 = -2m\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{Cr} = -m\vec{a}_{Cr} = +2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0 = +2m\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0$$

Iz izvedenih izraza možemo zaključiti da obe komponente Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$ postoje kada je prenosno kretanje rotaciono. Ali moženo da zaključimo, takodje, da cirkularna komponenta Koriolisove sile inercije $\vec{F}_C$ ne postoji ako je i relativno kretanje rotacija oko ose suporta, ili zavojno kretanje po cilindru oko ose rotacije suporta.

Ako je, naprimer, to zavojno kretanje oko neke ose, koja zaklapa neki ugao α, u odnosu na osu rotacije suporta, onda postoje obe komponente Koriolisove sile inercije, iako je relativno kretanje po cilindru, ali projekcija putanje u ravni upravnoj na osu rotacije (polarna ravan) i nije krug, nego neka kriva složenog oblika $r_r = r_r(\varphi_r, z_r)$.

U slučaju da je relativno kretanje po krugu, ili elipsi, ili ravanskoj krivoj putanji, i u nekoj ravni, koja je nagnuta pod uglom α u odnosu na osu rotacije suporta, čija projekcija u polarnoj ravni koju smo definisali sa $r_r = r_r(\varphi_r)$, onda se za zadatak analize sila inercije prenosne i Koriolisove mogu koristiti prethodni izrazi i relacije, koje smo dobili u prethodnom proučavanju postavljenog zadatka. .

Da ponovimo, prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, su izvori suštinske razlike u dinamici apsolutnog i relativnog kretanja materijalne tačke i u ovom slučaju kada je prenosno kretanje obrtanje suporta oko nepokretene ose. U apsolutnom kretanju materijalne tačke javljaju se samo stvarne sile – aktivne sile i sile veza koje dejstvuju, dok u relativnom kretanju pored aktivnih sila i sila veze koje dejstvuju na materijalnu tačku, javljaju se fiktivne sile - prenosna sila inercije (vodeća sila) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ i Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, koje smo u ovom specijalnom slučaju odredili.

Sada ma osnovu principa dinamičke ravnoteže i prethodne analize možemo da napišemo sledeću vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja materijalne tačke po nosaču (suportu), koji izvodi rotaciju oko nepokretne ose, u sledećem obliku:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_C$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_\Phi$$

gde je $\vec{F}_\Phi = \vec{F}_p + \vec{F}_C$ ukupna fiktivna sila, te je, u proučavanom slučaju, vektorska jednačina dinamičke ravnoteže:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_C$$

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - mr_r\dot{\omega}\vec{c}_0 + mr_r\omega^2\vec{r}_0 - 2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0 + 2mr_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m(r_r\dot{\omega} + 2\dot{r}_r\omega)\vec{c}_0 + mr_r\omega(\omega + 2\dot{\varphi}_r)\vec{r}_0$$

ili

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r)\vec{r}_0$$

Imajući, sada, u vidu izraz za ubrzanje relativnog kretanja možemo prethodnu vektorsku jednačinu relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, koji se obrće oko nepokretne ose da napišemo u sledećem obliku:

$$m(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2)\vec{r}_0 + m(2\dot{r}_r\dot{\varphi}_r - r_r\ddot{\varphi}_r)\vec{c}_0 + m\ddot{z}\vec{k} = \vec{F} - m(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r)\vec{r}_0$$

$$m(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2)\vec{r}_0 + m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_r)\vec{c}_0 + m\ddot{z}\vec{k} = \vec{F} - m(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p)\vec{c}_0 + mr_r\dot{\varphi}_p(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r)\vec{r}_0$$

ili

$$m(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2) = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_r) = F_c - m(r_r\ddot{\varphi}_p + 2\dot{r}_r\dot{\varphi}_p)$$

$$m\ddot{z} = Z(t, r_r, \varphi_r)$$

ili

$$m(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2) = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_r) = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_p)$$

$$m\ddot{z} = Z(t, r_r, \varphi_r)$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_r) = -m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}(r_r^2\dot{\varphi}_p)$$

$$2S_0 = (r_r^2\dot{\varphi}_r) =_c -(r_r^2\dot{\varphi}_p)$$

i to predstavlja integral površine, koji u ovom slučaju, kaže da je dvostruka sektoska brzina materijalne tačke pri relativnom kretanju, kada je prenosno kretanje suporta rotacija oko nepokretne ose, jednake, ali suprotnog znaka, sktorskoj brzini tačke suporta u kojoj je pokretna materijalna tačka koja po tom suportu izvodi relativno kretanje.

Takodje možemo napisati i daje

$$\dot{\varphi}_r = -\dot{\varphi}_p$$

Odnosno

$$\dot{\varphi}_r + \dot{\varphi}_p = 0$$

Odnosno

$$\varphi_r + \varphi_p = \varphi_0 = \varphi_{r0} + \varphi_{p0} = \cos nt$$

Specijalni slučajevi proučenog specijalnog slučaja relativnog kretanja materijalne tačke po suportu koji izvodi rotaciju oko nepokretne ose je: a* kada se materijalna tačka kreće po uporednicima ili meridijanima centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je ili $r_r = kR = const, k < 1$, ili $\varphi_r = const$ ili b* kada je kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu; Kako su to važni slučajevi koje možemo razmatrati kao modele koji odgovaraju realnim sistemima dinamike materijalnih sistema, to ćemo koristeći prethodno izvedene matematičke relacije proanalizirati svaki od th slučajeva.

Razmotrimo prvo slučaj a*1. kada se materijalna tačka kreće po jednom od uporednika centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $z = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r \dot{\omega} \vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r \ddot{\varphi}_p \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p \vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = -r_r \omega^2 \vec{N}\Big|_{r_r - kR} = -r_r \dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{r}_r \omega \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{\varphi}_p \dot{r}_r \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = -2r_r \dot{\varphi}_r \omega \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r \dot{\varphi}_r \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2kR\dot{\varphi}_p \dot{\varphi}_r \vec{r}_0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisovog ubrzanja u cirkularnom pravcu jednaka nuli i da postoji samo u radijalnom pravcu.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće po jednom od uporednika centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = -mr_r \ddot{\varphi}_p \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p \vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = mr_r \dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right]$ je sada:

$$\vec{F}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = -m2\dot{r}_r \omega \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -2m\dot{\varphi}_p \dot{r}_r \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{F}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = 2mr_r \dot{\varphi}_r \omega \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = 2m\dot{\varphi}_p r_r \dot{\varphi}_r \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = 2mkR\dot{\varphi}_p \dot{\varphi}_r \vec{r}_0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisove sile inercije, pri relativnom kretanju materijalne tačke po uporedniku sfere, u cirkularnom pravcu jednaka nuli i da postoji samo u radijalnom pravcu.

Diferencijalne jednačine relativnog kretanja su sada:

$$-mkR\dot{\varphi}_r^2 = F_r + mkR\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$mkR\ddot{\varphi}_r = F_c - mkR\ddot{\varphi}_p$$

$$z = const$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu, iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$\varphi_r + \varphi_p = \varphi_0 = \varphi_{r0} + \varphi_{p0} = \cos nt$$

zatim unošenjem u prvu jednačinu dobijamo uslov koji treba da zadovolji radijalna komponenta aktivne sile da bi se materijalna tačka kretala po uporedniku, a da pri tome ne postoji cirkularna komponenta aktivne sile;

$$F_r = -2mkR\dot{\varphi}_p^2 = -2mkR\omega^2$$

Razmotrimo prvo slučaj a*2. kada se materijalna tačka kreće po jednom od meridijana centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije, kada je $\varphi_r = const$, kada je: $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, R poluprečnik centralne sfere po čijem se meridijanu relativno kreće materijalna tačka, a ϑ ugao koji zaklapa radijus položaja metarijalne tačke u odnosu na pravac ose rotacije suporta. Taj ugao ϑ se može usvojiti za koordinatu relativnog položaja materijalne tačke na sferi po kojoj se kreće.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{\varphi_r - const} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{\varphi_r - const} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{\varphi_r - const} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big| = R\ddot{\varphi}_p \sin\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{\varphi_r - const} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{\varphi_r - const} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = -R\dot{\varphi}_p^2 \sin\vartheta\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{\varphi_r = const} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0 = -2R\dot{\varphi}_p\dot{\vartheta}\cos\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{\varphi_r = const} = 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisovog ubrzanja u radijalnom pravcu jednaka nuli, i da postoji samo u cirkularnom pravcu upravnom na ravan meridijana po kome se kreće.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$, koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, po kome se ona relativno kreće, kada se materijalna tačka kreće po jednom od meridijana centralne sfere (čiji je centar na osi rotacije), kada je $\varphi_r = const$, kada je: $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{\varphi_r - const} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{\varphi_r - const} = -\, mr_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{\varphi_r - const} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big| = -mR\ddot{\varphi}_p \sin\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{\varphi_r - const} = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{\varphi_r - const} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = -mR\dot{\varphi}_p^2 \sin\vartheta\vec{r}_0$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right]$ je sada:

$$\vec{F}_{Cc}\Big|_{\varphi_r = const} = -\,2m\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{\varphi_r = const} = -2m\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0 = 2mR\dot{\varphi}_p\dot{\vartheta}\cos\vartheta\vec{c}_0$$

$$\vec{F}_{Cr}\Big|_{\varphi_r = const} = 2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{\varphi_r = const} = 0$$

Vidimo da je komponenta Koriolisove sile inercije pri relativnom kretanju materijalne tačke po meridijanu sfere u radijalnom pravcu jednaka nuli, i da postoji samo u cirkularnom pravcu upravnom na ravan meridijana po kome se tačka kreće.

Diferencijalne jednačine relativnog kretanja su:

$$m\left(\ddot{r}_r - r_r\dot{\varphi}_r^2\right) = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p\left(\dot{\varphi}_p + 2\dot{\varphi}_r\right)$$

$$m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_r\right) = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

te je sada*:*

$$m\ddot{r}_r = F_r + mr_r\dot{\varphi}_p^2$$

$$0 = F_c - m\frac{1}{r_r}\frac{d}{dt}\left(r_r^2\dot{\varphi}_p\right)$$

$$m\ddot{z} = Z\left(t, r_r, \varphi_r\right)$$

Kako je

$\varphi_r = const$, $r_r = R\sin\vartheta$ i $z = R\cos\vartheta$, to prethodni sistem jednačina relativnog kretanja postaje:

$$mR\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\vartheta\right) = F_r + mR\dot{\varphi}_p^2 \sin\vartheta$$

$$0 = F_c - m\frac{R}{\sin\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}_p \sin^2\vartheta\right)$$

$$z = R\cos\vartheta$$

U slučaju kada na pokretnu materijalnu tačku ne dejstvuje aktivna sila $\vec{F}_c$ u cirkularnom pravcu ili aktivna sila nema tu komponentu u cirkularnom pravcu iz druge diferencijalne jednačine možemo da dobijemo sledeći integral relativnog kretanja:

$$\dot{\varphi}_p \sin^2\vartheta = const$$

$$\vartheta = \arcsin\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

odakle sledi da je

$$r_r = R\sin\vartheta = R\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

$$z = R\cos\vartheta = R\sqrt{1-\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

Zatim, unošenjem prethodno dobijenog rešenja, u prvu jednačinu dobijamo uslov koji treba da zadovolji radijalna komponenta aktivne sile da bi se materijalna tačka kretala po meridijanu, a da pri tome ne postoji cirkularna komponenta aktivne sile;

$$F_r = mR\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\vartheta\right) - mR\dot{\varphi}_p^2\sin\vartheta = mR\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}} - mR\dot{\varphi}_p^2\sqrt{\frac{Const}{\dot{\varphi}_p}}$$

Sada ćemo razmotriti slučaj b* kada je kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu $r_r = kR = const, k < 1, \varphi_r = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog obrtnog kretanja suporta su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r\dot{\omega}\vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = -r_r\omega^2\vec{N}\Big|_{r_r - kR} = -r_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{r}_r\omega\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{\varphi}_p\dot{r}_r\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r\dot{\varphi}_r\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2kR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0 = 0$$

Vidimo da su obe komponente Koriolisovog ubrzanja i u cirkularnom pravcu i u radijalnom pravcu jednake nuli.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$, koja dejstvuje na materijalnu tačku usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, na kome ona relativno miruje na centralnoj sferi (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const$. $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}},\vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = kmR\omega^2\vec{r}$$

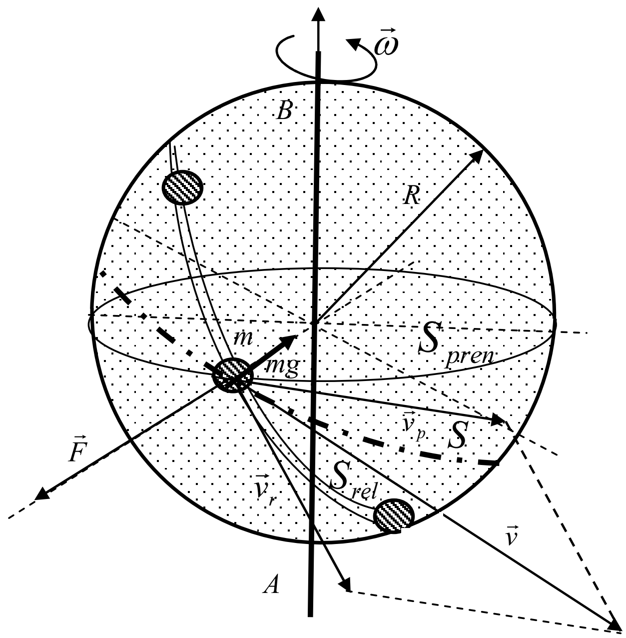
Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ je sada jednaka nuli.

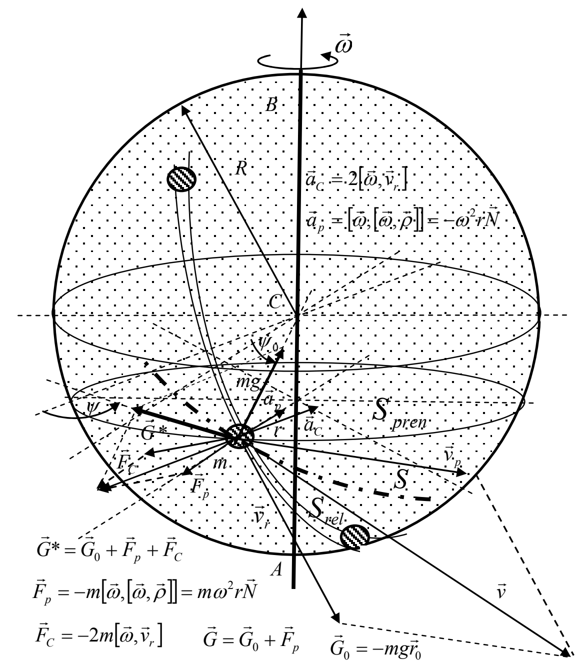
Aktivna sila treba da ima samo radijalnu komponetu jednaku

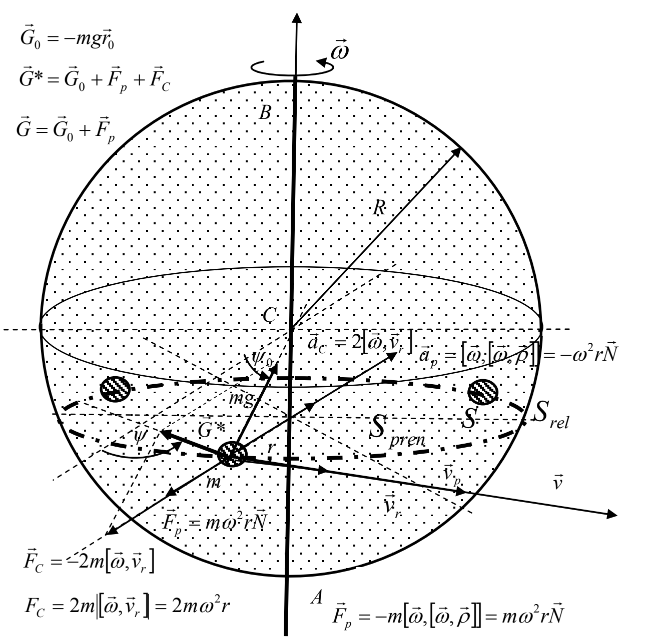
$$F_r = -mkR\dot{\varphi}_p^2 = -mkR\omega^2$$

da bi materijalna tačka relativno mirovala ($r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const.$ $z = const$) na sferi pri prenosnom kretanju, koje je rotacija suporta konstantnom ugaonom brzinom.

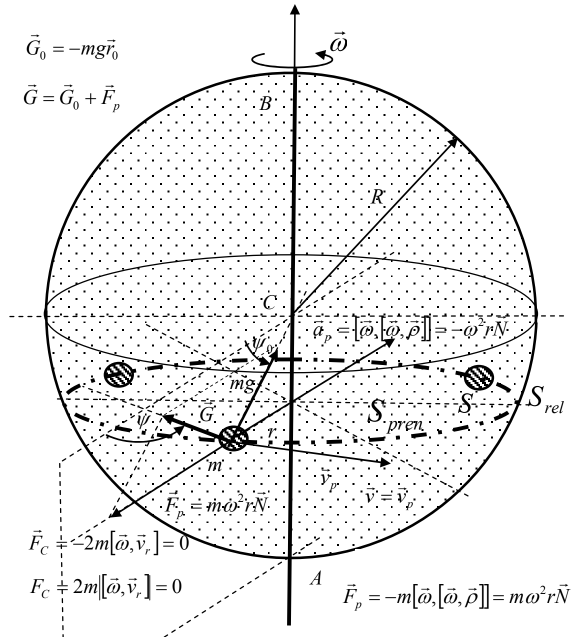
Na narednim slikama su prikazani kinetički parametri relativnog kretanja materijalne tačke po sferi, koja je suport relativnog kretanja.







$\vec{v}_r = \omega r\vec{T}$ materijalna tačka se kreće po uporedniku istom ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje, brzine prenosna, relativna i apsolutna su kolinearne



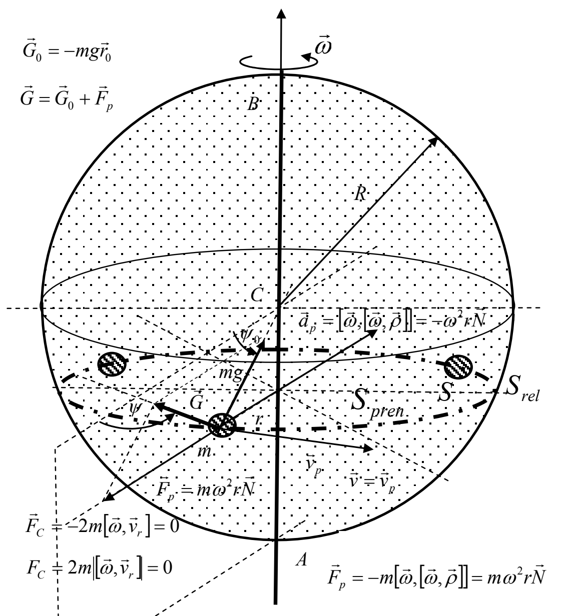
Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina

Relativno kretanje teške tačke po površi Zemlje.

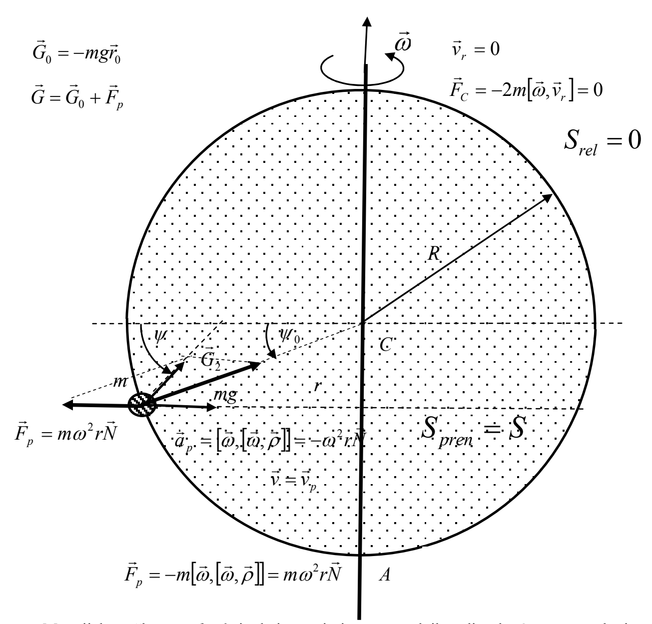
Pod *apsolutnom težinom* tela podrazumevaćemo njegovu težinu pod pretpostavkom da Zemlja miruje, I tada će na površi Zemlje, težina materijalne tačke, koja miruje, biti mg i usmerena ka centru Zemlje, gde smo sa g označili ubrzanje kojim Zemljina teža dejstvuje na materijalnu tačku. Kao što je poznato, Zemlja ostvaruje sopstvenu rotaciju, tj. obrće se oko svoje ose ugaonom brzinom $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ gde je T period vremena za koji napravi jedan obrt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} = 729 \cdot 10^{-7} \left[\sec^{-1}\right]$$

Ptretpostavimo da se osa sopstvene rotacije kreće jednoliko translatorno i pravolinijski (zanemarujemo kretanje po eliptičnoj putanji oko Sunca) već uzimamo u obzir samo uticaj sopstvene rotacije na relativnu ravnotežu i relativno kretanje materijalne tačke po površi Zemlje. Uz takve pretpostavke možemo koristiti naša prethodna pročavanja relativnog kretanja materijalne tačke po centralnoj sferi – suportu, koji se obrće oko svoje nepokretne ose konstantnom ugaonom brzinom. Analizu vektorskih kinematičkih (brzina i ubrzanja) i vektoprskih kinetičkih (sile inercije prenosnog kretanja i Koriolisove sile inercije) invarijanti, koju smo napravili, sada možemo primeniti za analizu uslova relativne ravnoteže i relativnog kretanja materijalne tačke po površi Zemlje, koja je sada taj sferni suport koji rotira konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 729 \cdot 10^{-7}\left[\sec^{-1}\right]$. Na narednim slikama je dat grafički prikaz sile apsolutne težine i odgovarajuće komponente usled dejstva sile inercije prenosnog kretanja.



Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina



Materijalna tačka se *ne kreće* i relativno miruje po uporedniku, ali se kreće ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući kružne putanje po uporedniku, a brzine, prenosna i apsolutna, su kolinearne i jednake, jer je relativna brzina jednaka nuli - tačka miruje na

Vidimo da na materijalnu tačku koja relativno miruje na površi Zemlje, koja je centralna sfera suporta koji rotira konstantnom ugaonom brzinom te kompletnu analizu relativnog mirovanja materijalne tačke na suportu u slučaju b* sada možemo primeniti.

Kretanje suporta konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}_p = \omega = \omega_0 = const$, a materijalna tačka miruje na suportu - površi zemlje pa je $r_r = kR = const, k < 1, \varphi_r = const$.

Komponente ubzanja materijalne tačke usled prenosnog sopstvenog obrtnog kretanja Zemlje (sopstvena rotacija oko sopstvene ose Zemlje) su:

$$\vec{a}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = r_r \dot{\omega}\vec{T}\Big|_{r_r - kR} = r_r \ddot{\varphi}_p \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = kR\ddot{\varphi}_p \vec{c}_0 = 0$$

$$\vec{a}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = -r_r \omega^2 \vec{N}\Big|_{r_r - kR} = -r_r \dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -kR\dot{\varphi}_p^2 \vec{r}_0$$

dok su komponente Koriolisovog ubrzanja:

$$\vec{a}_{Cc}\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{r}_r \omega \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 2\dot{\varphi}_p \dot{r}_r \vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = 0$$

$$\vec{a}_{Cr}\Big|_{r_r - kR} = -2r_r\dot{\varphi}_r\omega\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2\dot{\varphi}_p r_r \dot{\varphi}_r \vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = -2kR\dot{\varphi}_p\dot{\varphi}_r\vec{r}_0 = 0$$

Vidimo da su obe komponente Koriolisovog ubrzanja i u cirkularnom pravcu i u radijalnom pravcu jednake nuli.

Komponente prenosne sile inercije (vodeće sile) $\vec{F}_p = -m\vec{a}_p$ koja dejstvuje na materijalnu tačku, usled prenosnog obrtnog kretanja suporta, na kome ona relativno miruje na centralnoj sferi (čiji je centar na osi rotacije, kada je $r_r = kR = const, k < 1$, $\varphi_r = const$. $z = const$, su:

$$\vec{F}_{pT}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}_r\right]_{r_r - kR} = -mr_r\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0\Big|_{r_r - kR} = -kmR\ddot{\varphi}_p\vec{c}_0 = 0$$

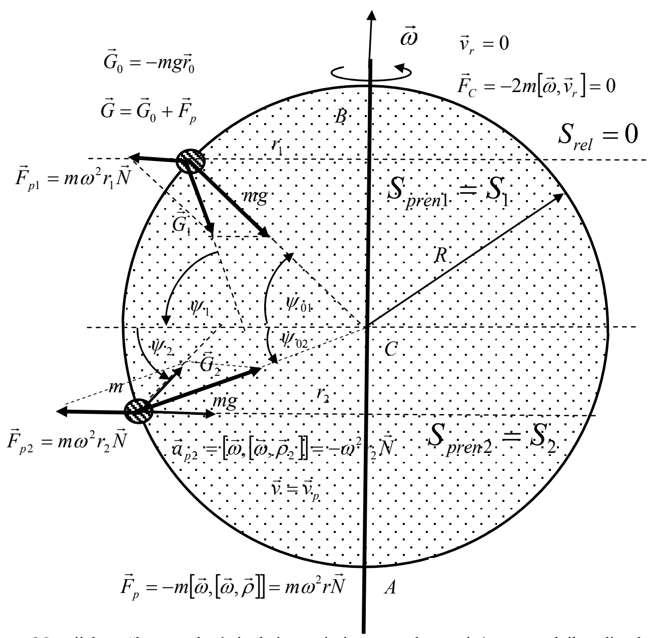
$$\vec{F}_{pN}\Big|_{r_r - kR} = -m\left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_r\right]\right]_{r_r - kR} = mr_r\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0\Big|_{r_r - kR} = kmR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = kmR\omega^2\vec{r}$$

Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right]$ u ovom slučaju je jednaka nuli.

Prenosna sila inercije (vodeća sila inercije) ima komponentu samo u radijalnom pravcu i to jednaku

$$F_{pN} = F_{pr} = -mkR\dot{\varphi}_p^2 = -mkR\omega^2 = -mR\omega^2\cos\psi_0$$

gde smo sa ψ_0 označili ugao koji vektor položaja materijalne tačke zaklapa sa ravni polutara (najvećeg uporednika paralelnog uporedniku na kome je materijalna tačka). Ugao ψ predstavlja geografsku širinu položaja na Zemlji u kojoj se nalazi (miruje) materijalna tačka. Pravac sile apsolutne težine mg usmeren ka centru Zemlje zahvata ugao ψ_0 sa ravni polutara Zemlje. Na prethodnoj slčici je dat grafički prikaz.



Materijalne tačke se *ne kreću* i relativno mirujo po po odgovarajućem uporedniku, ali se kreću ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući različite kružne putanje po odgovarajućim uporednicima, a odgovarajuće brzine, prenosna i apsolutna, su im kolinearne i jednake, jer su im relativnaže brzine jednake nuli - tačka miruje na suportu. Kako imaju različite brzine jer su različito udaljene o dose rotacije, pa su im i prenosna ubrzanja različita, a sa tim i vodeće sile inercije prenosnog kretanja različite, te su i njihove rezultujiće sile relativnih težina različite na različitim geografskim širinama ψ

Sada vidimo da na materijalnu tačku dejstvuje dve sile:

$$\vec{F}_{pr} = -\vec{F}_{pN} = mkR\dot{\varphi}_p^2\vec{r}_0 = mkR\omega^2\vec{r}_0 = mR\omega^2\cos\psi_0\vec{r}_0$$

$$\vec{G}_a = -mg\left(\vec{r}_0\cos\psi_0 + \vec{k}\sin\psi_0\right)$$

te je rezultujuća sila pritiska materijalne tačke koja relativno mituje na provrši Zemlje jednak vektorskom zbiru ovih sila:

$$\vec{G}_\psi = \vec{G}_a + \vec{F}_{pr} = mR\omega^2\cos\psi_0\vec{r}_0 - mg\left(\vec{r}_0\cos\psi_0 + \vec{k}\sin\psi_0\right)$$

$$\vec{G}_\psi = \vec{G}_a + \vec{F}_{pr} = m\cos\psi_0\left(-R\omega^2 + g\right)\vec{r}_0 - mg\vec{k}\sin\psi_0$$

i pravac te sile pritiska zaklapa ugao ψ sa ravni polutara (najvećeg uporednika paralelnog uporedniku na kome je materijalna tačka), a taj ugao ψ predstavlja geografsku širinu položaja na Zemlji u kojoj se nalazi (miruje) materijalna tačka.

Intenzitet ove sile je:

$$G_\psi = m\sqrt{\cos^2\psi_0\left(-R\omega^2+g\right)^2+g^2\sin^2\psi_0} = m\sqrt{g^2+R^2\omega^4\cos^2\psi_0-2Rg\omega^2\cos^2\psi_0}$$

$$G_\psi = m\sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0} = mg_\psi$$

gde smo sa g_ψ označili sledeći izraz za ubrzanje Zemljine teže na odgovarajućoj geografskoj širini:

$$g_\psi = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0}$$

Na prethodnoj slici grafički su prikazani pritisci materijalne tačke na dvema raznim geografskim širinama na kojima su ubrzanja različita i iznose:

$$g_{\psi_1} = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{01}}$$

$$g_{\psi_2} = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{02}}$$

uporedjivanjem njihoviih veličina:

$$g_{\psi_2} = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{02}} > g_{\psi 1} = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_{01}}$$

Zaključijemo da je tada

$$\cos^2\psi_{02} > \cos^2\psi_{01}$$

odnosno $\psi_{02} < \psi_{01}$, odnosno da su na većim geografskim širuinama veća ubrzanja, odnosno kada je ugao ψ_0 veći, to je ubrzanje materijalne tačke veće i kada je $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, tada je tačka na polu, pa je njeno ubrzanje $g_{\psi=\frac{\pi}{2}} = g \approx 9{,}832\left[m\sec^{-2}\right]$, a kada je $\psi_0 = 0$ tada je tačka na ekvatoru (polutaru), pa je njeno ubrzanje jednako:

$$g_{\psi=0} = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)} \approx 9{,}798\left[m\sec^{-2}\right],$$

Pri čemu su uzeti sledeći podaci: $R\omega^2 \approx 0{,}034\left[m\sec^{-2}\right]$ i polupprečnik Zemlje $R = 64\cdot 10^5\,[m]$. Sa ovim podacima uočavamo da je težina istog tela na polu oko 5 ‰ veća od njegove težine na ekvatoru.

Klero je izveo aproksimativni obrazac

$$g_\psi = \sqrt{g^2+\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0} = g\sqrt{1+\frac{1}{g^2}\left(R^2\omega^4-2Rg\omega^2\right)\cos^2\psi_0}$$

$$g_\psi \approx g\sqrt{1-2\frac{0{,}034}{g}\cos^2\psi_0} \approx g\left(1-0{,}034\cos^2\psi_0\right)$$

Prema podatku iz udžbenika *D. Rašković*, u primeni, umesto prethodnog *Kleroovog približnog obrasca*, je *eksperimentalno* dobuijen obrazac:

$$g_\psi = 9{,}779888+0{,}052210\sin^2\psi_0-0{,}000003h$$

u kome je prikazana i zavisnost i od geografske širine ψ i od nadmorske visine h.

Pravac relativne teže ne prolazi kroz centar Zemlje, već seče Zemljinu osu sa suprotne strane od Zemljine hemisfere na kojoj je položaj materijalne tačke na Zemlji. Taj pravac predstavlja pravac vertikale posmatranog mesta u kome miruje posmatrana materijalna tačka, a ravan upravna na taj pravac je *ravan horizonta* tog mesta. Ugao ψ koji čini taj pravac sa ravni ekvatora je, kao štp smo već rekli *geografska širina* dotičnog mesta (ψ).

Da bi smo proučili kretanje teške tačke na Zemlji, usvojimo da je u centru Sunca koordinatni početak referentnog, apsolutnog, nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, a na površini zemlje u tački, u kojoj je materijalna tačka, uzmimo koordinatni početak pokretnog sistema koordinata $A\xi\eta\zeta$, koji je vezan sa Zemljom. Ovaj koordinatni sistem usvojimo tako da njegova osa $A\zeta$ pada u pravac vertikale posmatranog mesta na Zemlji, a druge dve ose $A\xi$ i $A\eta$ usvojimo da padaju u pravce tangenti na meridijan $A\xi$, odnosno uporednik $A\eta$, redom. Tako usvojeni koordinatni sistem ima ravan $A\xi\eta$ za horizontalnu ravan.

Diferencijalna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke je:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] - 2m[\vec{\omega},\vec{v}_r]$$

odnosni

$$\vec{a}_r = \frac{1}{m}\vec{F} - [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]] - 2[\vec{\omega},\vec{v}_r]$$

Za slučaj kretanja materijalne tačke u odnosu na Zemlju za aktivnu silu uzimamo silu $\vec{G}_\psi = mg_\psi\vec{k}'$, a dvostruki vektorski proizvod ćemo zanemariti imajući u vidu da je ugaona brzina sopstvenog brtanja Zemlje veoma mala $\omega = 729\cdot 10^{-7}\left[\sec^{-1}\right]$, te će prethodna jednačina dobiti oblik:

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega},\vec{v}_r]$$

Ovo je diferencijalna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke pod dejstvom sile teže na odgovarajućoj geografskoj širini i s obzirom da je pretpostavljeno da je ugaona brzina sopstvenog obrtanja Zemlje konstantna, to prethodnu jednačinu možemo integraliti te se dobija:

$$\vec{v}_r \approx \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega},\vec{\rho}] + \vec{C}_1$$

gde je $\vec{C}_1$ integraciona konstanta. Ako pretpostavimo da je u početnom trenutku materijalna tačka imala sledeće početne uslove i brzinu:

$$t = 0\,,\ \vec{\rho}(0) = 0\,,\ \vec{v}_r(0) = \vec{v}_{r0}$$

onda sledi da je

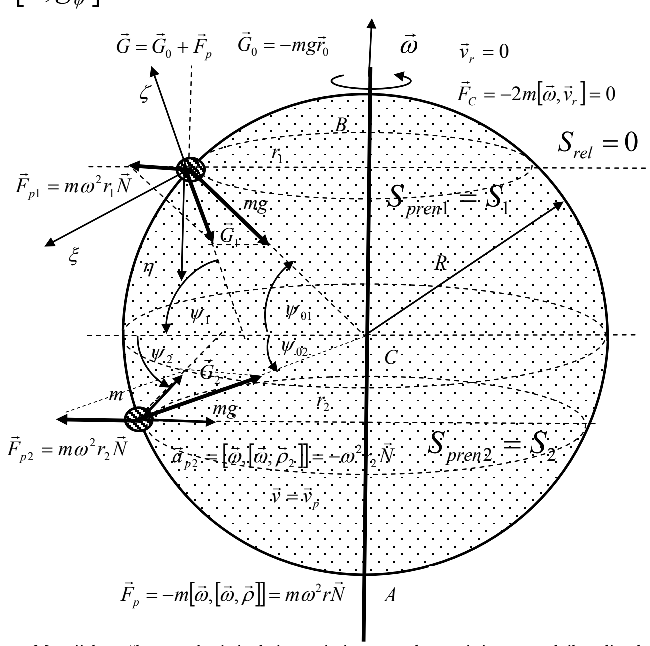
$$\vec{v}_r \approx \vec{v}_{r0} + \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega},\vec{\rho}]$$

Ako sada ovu vrednost za brzinu relativnog kretanja unesemo u diferencijalnu jednačinu

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega},\vec{v}_{r0} + \vec{g}_\psi t - 2[\vec{\omega},\vec{\rho}]] = \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega},\vec{v}_{r0}] - 2t[\vec{\omega},\vec{g}_\psi] + 4[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{\rho}]]$$

ili posle sredjivanja

$$\vec{a}_r \approx \vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega},\vec{v}_{r0}] - 2t[\vec{\omega},\vec{g}_\psi]$$



Materijalne tačke se *ne kreću* i relativno mirujo po po odgovarajućem uporedniku, ali se kreću ugaonom brzinom okretanja suporta –sfernog nosača – Zemlje opisujući različite kružne putanje po odgovarajućim uporednicima, a odgovarajuće brzine, prenosna i apsolutna, su im kolinearne i jednake, jer su im relativnaže brzine jednake nuli - tačka miruje na suportu. Kako imaju različite brzine jer su različito udaljene o dose rotacije, pa su im i prenosna ubrzanja različita, a sa tim i vodeće sile inercije prenosnog kretanja različite, te su i njihove rezultujiće sile relativnih težina različite na različitim geografskim širinama ψ

Dalje dvostrukim integraljenjem ove diferencijalne jednačine dobijamo:

$$\vec{v}_r \approx \vec{g}_\psi t - 2t[\vec{\omega},\vec{v}_{r0}] - t^2[\vec{\omega},\vec{g}_\psi] + \vec{v}_{r0}$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{g}_\psi \frac{t^2}{2} - t^2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}] - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi] + \vec{v}_{r0} t$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{v}_{r0} t + \frac{t^2}{2}\left(\vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}]\right) - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi]$$

Ova vektorska jednačiina predstavlja vektorsku, konačnu, jednačinu kretanja materijalne tačke pod uticajem Zemljine teže i prenosnog kretanja usled sopstvene rotacije Zemlje. Iz ove jednačine nije teško dobiti odgovarajuće skalarne.

Ugaona brzina sopstvenog obrtanja Zemlje u pokretnom sistemu koordinata je:

$$\vec{\omega} = -\omega \cos\psi \; \vec{i}' + \omega \sin\psi \; \vec{k}'$$

dok je ubrzanje

$$\vec{g}_\psi = -g_\psi \vec{k}'$$

i brzina relativnog kretanja

$$\vec{v}_{r0} = \dot{\xi}_0 \vec{i}' + \dot{\eta}_0 \vec{j}' + \dot{\zeta}_0 \vec{k}'$$

$$\vec{\rho} \approx \vec{v}_{r0} t + \frac{t^2}{2}\left(\vec{g}_\psi - 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{r0}]\right) - \frac{t^3}{3}[\vec{\omega}, \vec{g}_\psi]$$

$$\vec{\rho} = \xi \vec{i}' + \eta \vec{j}' + \zeta \vec{k}'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0 \vec{i}' + \dot{\eta}_0 \vec{j}' + \dot{\zeta}_0 \vec{k}'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{ g_\psi \vec{k}' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} \right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_\psi \end{vmatrix}$$

Iz ove jednačine vidimo da komponenta relativnog ubrzanja u ζ pravcu ne zavisi od vremena, te da je konstanta:

$$\zeta = \dot{\zeta}_0 t - \frac{t^2}{2}\left(g_\psi - 2\omega\dot{\eta}_0 \sin\psi\right)$$

$$a_{r\zeta} = \ddot{\zeta} = -\left(g_\psi - 2\omega\dot{\eta}_0 \sin\psi\right) \approx const$$

Iz prerthodnih jednačina možemo proučiti slobodan pad, kao hitac naviše ili naniže sa početnom brzinom usmerenom naviše ili naniže ili pak pod nekim uglom u odnosu na horizont (površ Zemlje), u bezvazdušnom prostoru za sledeće početne uslove: :

$$\vec{\rho} = \xi \vec{i}' + \eta \vec{j}' + \zeta \vec{k}'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0 \vec{i}' + \dot{\eta}_0 \vec{j}' + \dot{\zeta}_0 \vec{k}'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{ g_\psi \vec{k}' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} \right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_\psi \end{vmatrix} + \vec{\rho}_0$$

$$\vec{\rho} = -\frac{t^2}{2}\left\{ g_\psi \vec{k}' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} \right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_\psi \end{vmatrix} + \zeta_0 \vec{k}'$$

$$\xi = 0$$

$$\eta = t^2 \omega \dot{\zeta}_0 \cos\psi - \frac{t^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\zeta = -\frac{t^2}{2} g_\psi + \zeta_0 = h - \frac{t^2}{2} g_\psi$$

ili za hitac naviše ili naniže sa početnom brzinom usmerenom naviše ili naniže, u bezvazdušnom protoru

$$\xi = 0$$

$$\eta = \pm v_{r0} t^2 \omega \cos\psi - \frac{t^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\zeta = -\frac{t^2}{2} g_\psi + \zeta_0 = h - \frac{t^2}{2} g_\psi$$

ili za slobodan pad:

$$\xi = 0$$

$$\eta = -\frac{t^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\zeta = h - \frac{t^2}{2} g_\psi$$

a kada eliminišemo vreme dobijamo:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g_\psi}(h - \zeta)}$$

$$\eta = -\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{g_\psi}(h-\zeta)}\right)^3}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$\eta = -\frac{\left(\sqrt{\frac{8}{(g_\psi)^3}(h-\zeta)^3}\right)}{3} g_\psi \omega \cos\psi$$

$$9 g_\psi \eta^2 - 8\omega^2 \cos^2\psi (h-\zeta)^3 = 0$$

jednačinu putanje kod slobodnog pada u bezvazdušnom prostoru, ali uzimajući u obzir uticaj prenosnog kretanja sopstvene rotacije Zemlje:

$$\frac{9 g_\psi}{8\omega^2 \cos^2\psi} \eta^2 + (\zeta - h)^3 = 0$$

Ta putanja predstavlja parabolu razlomljenog eksponenta $3/2$ u ravni $\xi = 0$ ili $A\eta\zeta$.

Sa ovom izvedenom vektorskom jednačinom

$$\vec{\rho} = \xi \vec{i}\,' + \eta \vec{j}\,' + \zeta \vec{k}\,'$$

$$\vec{\rho} = \left(\dot{\xi}_0 \vec{i}\,' + \dot{\eta}_0 \vec{j}\,' + \dot{\zeta}_0 \vec{k}\,'\right)t - \frac{t^2}{2}\left\{ g_\psi \vec{k}\,' + 2\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ \dot{\xi}_0 & \dot{\eta}_0 & \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} \right\} - \frac{t^3}{3}\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \\ 0 & 0 & g_\psi \end{vmatrix} + \vec{\rho}_0$$

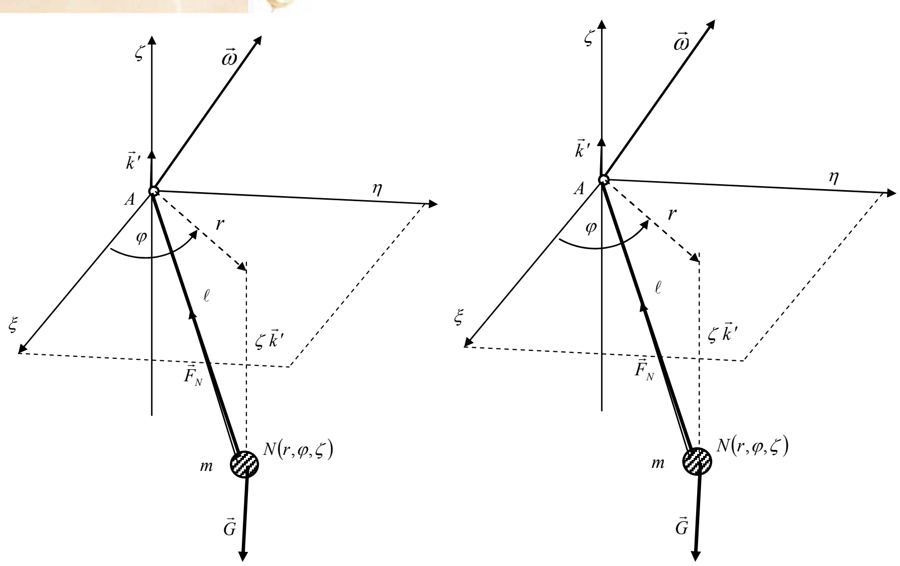
,ože se analizirati i slučaj kretanja materijalne tačke poznat pod imenom *kosi hitac* što zavisi od zadatih početnih uslova.

Fukovo klatno

Leon Fuko (***Léon Foucault*** 1819-1868) je 1851. godine razmotrio slučaj kretanja teške materijalne tačke vezane, na koncu velike dužine ℓ za Zemlju. Takav sistem poznat je pod imenom Fukovo klatno.

Da bi smo rešili ovaj zadatak usvojimo u središtu sfere nepokretni sistem koordinata $Cxyz$,a pokretni sistem koordinata, vezan za Zemlju, neka je koordinatni sistem koordinata $A\xi\eta\zeta$ pri čemu se tačka A nalazi na Zemlji i učvršćena za nju. Usvojimo i odgovarajući polarno-cilindrički sistem koordinata $Ar\varphi\zeta$, S obzirom da je za tu tačku učvršćen konac klatna dužine ℓ, to će materijalna tačka na koncu izvoditi relativno kretanje po sferi poluprečnika ℓ, pa je to prinudno relativno kretanje materijalne tačke po sferi, čija je jednačina u pokretnom sistemu koordinata

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\ell^2=0 \quad \text{ili} \qquad f(r,\zeta)=r^2+\zeta^2-\ell^2=0$$



Na materijalnu tačku klatna dejstvuju, kao aktivna sila - sila težine $\vec{G} = -mg_{\psi}\vec{k}'$, sila inercije vodeća sila inercije prenosnog kretanja usled sopstvenog obrtanja Zemlje ugaonom brzinom sopstvenog obrtanja:

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\psi\,\vec{i}' + \omega\sin\psi\,\vec{k}'$$

Koriolisova sila i sila dejstva veze konca (na relativno kretanje dejstvuje veza – kretanje po površi)- otpor veze $\vec{F}_N$ koji pada u pravac AN sa smerom ka koordinatnom početku. Za sastavljanje jednačina relativnog kretanja koristićemo teoremu o promeni momenta količine kretanja ili zamahu za osu $A\zeta$

$$\dot{L}_{\zeta} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = M_{\zeta} = \left(\left[\vec{\rho},\left[-2m\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right)$$

Ovde smo koristili to da je na osnovu teoreme o promeni momenta količine relativnog kretanja materijalne tačke ili zamahu za osu ζ izvod momenta količine relativnog kretanj materijalne tačke jednak momentu sila koje dejstvuju na materijalnu tačku, uzimajući u obziri aktivne i fiktivne sile inercije i ortora veza. Kako otpor veze $\vec{F}_N$ seče osu ζ to je moment te sile jednak nuli, a moment sile težine za tu osu, je takodje jednak nuli, jer je sila težine paralelna sa tom osom, tako da samo Koriolisova sila inercije $\vec{F}_C = -2m\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]$ daje moment za tu osu $A\zeta$. Zato prvo odredimo njen poment za pol u koordinatnom početku:

$$\vec{M}_A = \left[\vec{\rho},\vec{F}_C\right] = -2m\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right]$$

Dok je projekcija M_{ζ} tog momenta na pravac ose $A\zeta$

$$M_{\zeta} = \left(\vec{M}_A,\vec{k}'\right) = \left(\left[\vec{\rho},\vec{F}_C\right],\vec{k}'\right) = -2m\left(\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = -2m\left(\vec{\omega}\left(\vec{\rho},\vec{v}_r\right) - \vec{v}_r\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right),\vec{k}'\right) = 2m\left(\vec{v}_r,\vec{k}'\right)\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right) = 2m\dot{\zeta}\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right)$$

$$M_{\zeta} = \left(\vec{M}_A,\vec{k}'\right) = -2m\left(\left[\vec{\rho},\left[\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = 2m\dot{\zeta}\left(\vec{\rho},\vec{\omega}\right) = 2m\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

jer su vektori $\vec{\rho}$ i $\vec{v}_r$ ortogonalni, a njihov skalarni proizvod je jednak nuli $\left(\vec{\rho},\vec{v}_r\right) = 0$. Takodje je i $\left(\vec{v}_r,\vec{k}'\right) = \dot{\zeta}$.

Sada sledi da je:

$$\dot{L}_{\zeta} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = M_{\zeta} = \left(\left[\vec{\rho},\left[-2m\vec{\omega},\vec{v}_r\right]\right],\vec{k}'\right) = 2m\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

Odnosno jednačina dobija oblik

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 2\dot{\zeta}\omega\ell\sin\psi$$

Iz jednačine veze odredjujemo koordinatu brzine relativnog kretanja na sledeći način:

$$f(r,\zeta) = r^2 + \zeta^2 - \ell^2 = 0$$

$$\zeta = \ell\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2} \approx \ell\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]$$

$$\dot{\zeta} \approx -\frac{r}{\ell}\dot{r}$$

Unoseći ovu aproksimaciju u prethodnu jednačinu dobijamo :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) \approx -2\frac{r}{\ell}\dot{r}\omega\ell\sin\psi \approx -2r\dot{r}\omega\sin\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + 2r\dot{r}\omega\sin\psi \approx 0$$

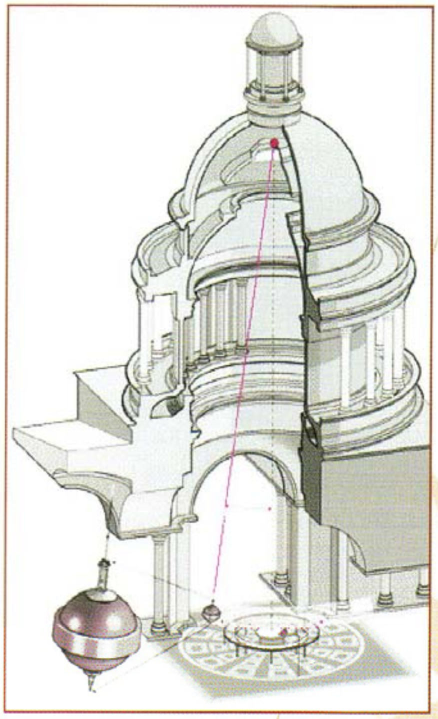
Ova jednačina se može integraliti, jer razdvaja promenljive

$$\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r^2\omega\sin\psi \approx C$$

gde je C integraciona konstanta koja se odredjuje iz početnih uslova.

$$r^2\left(\dot{\varphi} + \omega\sin\psi\right) \approx C \approx r_0^2\left(\dot{\varphi}_0 + \omega\sin\psi\right)$$

Le pendule au Panthéon

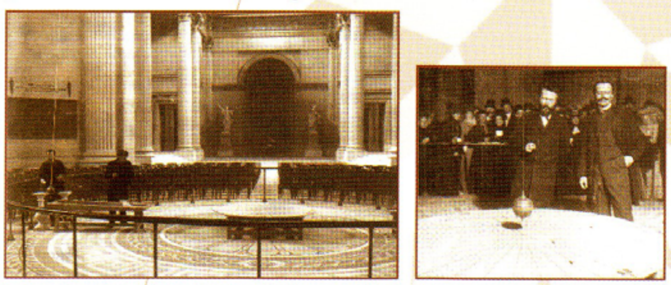


L'Expérience du Panthéon en 1851

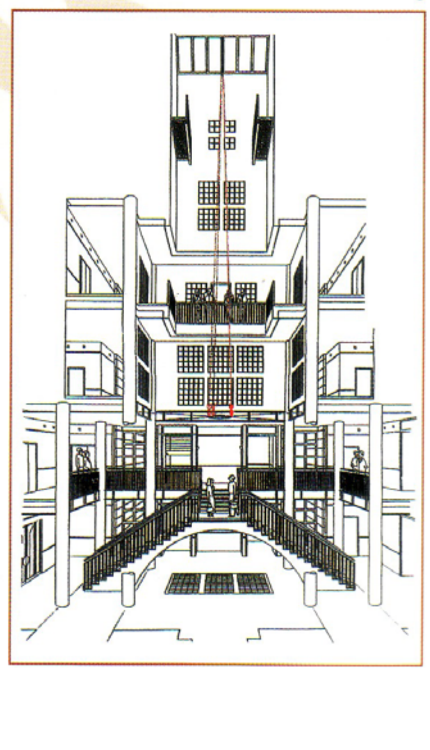
Sous les voûtes élevées de certains édifices, le phénomène devrait prendre une splendeur magnifique. Nous avons trouvé dans le Panthéon un emplacement merveilleusement approprié à l'installation d'un pendule gigantesque; nous avons trouvé pareillement dans l'administration les dispositions les plus favorables à l'exécution du projet que suggérait cette immense coupole. Sur une simple description du projet de l'expérience, sur l'énoncé des résultats probables qu'elle fournirait à la science et qu'elle mettrait sous les yeux de tout le monde, le président de la république résolut que la chose serait faite, et avec la rapidité de l'éclair, sa haute protection réagissant jusqu'au dernier degré de l'échelle administrative, on vit, en moins de quinze jours se dresser les appareils. (Journal des Débats, 31 mars 1851)

L'invention du pendule se répand rapidement dans le monde: simplicité de son principe, mystère de ce mouvement à grands battements créé sans intervention extérieure apparente.

L'expérience du pendule renouvelée au Panthéon en 1902 par Camille Flammarion et Berget



Le pendule à l'Université du Luxembourg



Le pendule contemporain au Panthéon

10

Kada su početni uslovi takvi da je u početnom trenutku klatno bilo u koordinatnom početku $r_0 = 0$ i imalo neku početnu brzinu $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ onda iz prethodne jednačine sledi da je:

$$\left(\dot{\varphi} + \omega \sin\psi\right) \approx 0$$

Što daje

$$\dot{\varphi} \approx -\omega \sin\psi$$

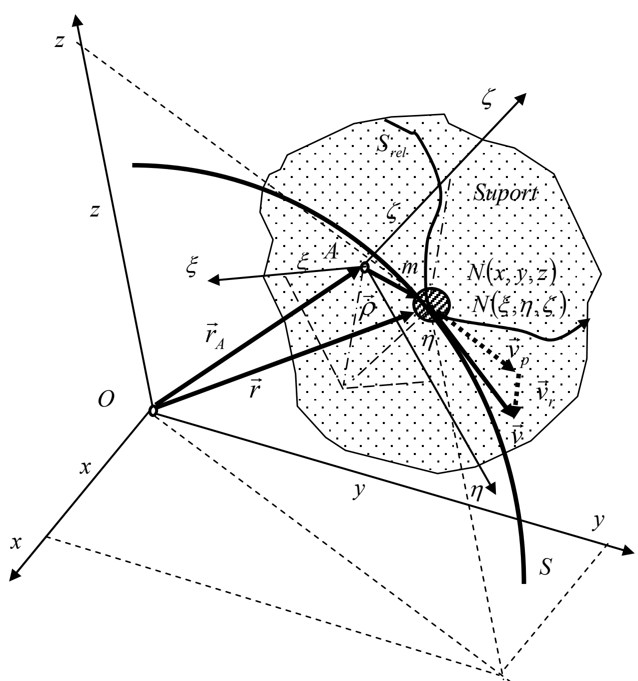
$$\varphi \approx -\omega t \sin\psi + c_1$$

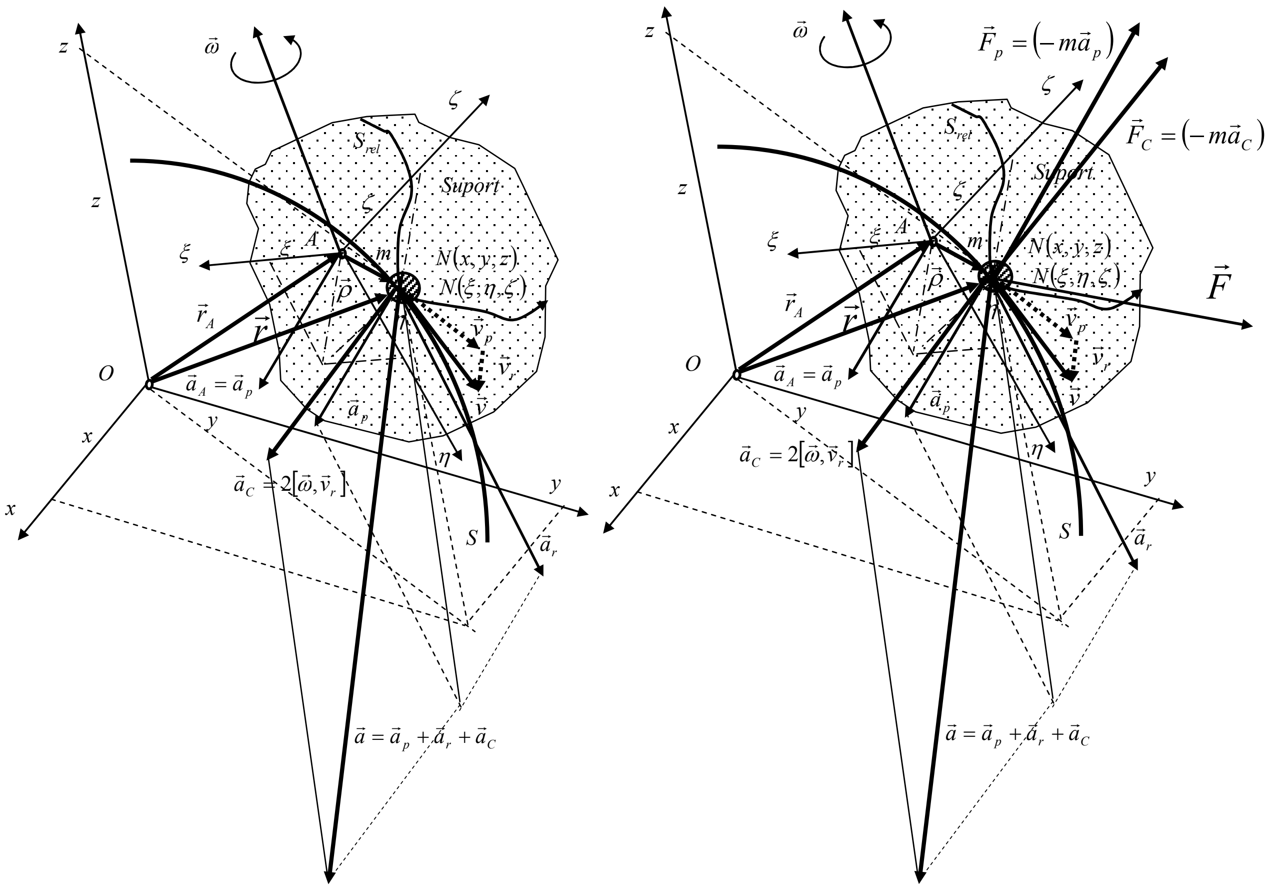
Iz poslednje relacije zaključjemo da se *ravan klatna obrče* u suprotnom smeru od smera sopstvenog obrtanja Zemlje, a da *brzina obrtanja klatna* zavisi od geografske širine ψ tačke vezivanja klatna. Najveća *brzina obrtanja ravni klatna je na polu*, gde je geografska širina $\psi = \frac{\pi}{2}$, pa je brzina obrtanja ravni klatna $\dot{\varphi} \approx -\omega$ po apsolutnoj vrednosti jednaka ugaonoj brzini sopstvene rotacije Zemlje, pa *ravan klatna za 24 časa napravi jedan pun obrtaj*, dok je na *ekvatoru* ta brzina jednaka nuli $\dot{\varphi} \approx 0$ jer je geografska širina jednaka nuli, $\psi = 0$. Na primer u Beogradu gde je geografska širina $\psi = 44^0 48'13''$ ravan klatna se obrne za $10^0 24'$ u proteku od jednog časa.

Znači da se ravan klatna obrće sa istoka na zapad. Prvi eksperiment sa klatnom dužine $67[m]$ i kuglom mase $30[kg]$ izveo je Leon Fuko (***Léon Foucault*** 1819-1868) je u Pariskom Panteonu 1851. godine i uočio pojavu obrtanja ravni klatna i time dokazao obrtanje Zemlje. Za geografsku širinu od $\psi = 45^0$ ugao za koji se obrne ravan klatna biće $\varphi \approx 10^0 38'$ za jedan srednje sunčan dan.

Kako sila težine ima funkciju sile $U = mg\zeta$

APPENDIX





LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.

Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теориjске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теориjске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922

Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - *Воронков* - *Минаков* - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - *Lowry H.* - *Hayden H.* - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - *Л. Люстерник* - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - *Webers* - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - *Newton* - *Gross* - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - *Scheffers* - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - *Pöschl* - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - *Cranz* - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί έπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.

G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche.
Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.

I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.

L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.

J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.

J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.

P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.

L. Poinsot (1777-1859) - Ȇléments de statique. Paris 1804.

C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.

W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.

H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.

H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.

И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.

Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.

T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.

R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.

J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.

P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.

С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.

К. Стојановић - Механика. Београд 1912.

Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кiевъ 1911.

Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.

E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.