DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

V. PETA NEDELJA
Stabilnost kretanja i mirovanja.
Kriterijumi stabilnosti.

VI. *ŠESTA NEDELJA*
Dinamika materijalne *tačke*

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke i njihovi integrali, početni uslovi.
Pravolinijsko kretanje materijalne tačke. Vertikalni hitac naviše i naniže. Sila zavisi samo rastojanja: Harmonijsko kretanje. Slobodan pad sa velike visine. Sila zavisi od rastojanja i brzine: Amortizovano kretanje. Sila zavisi od vremena, rastojanja i brzine: Prinudne oscilacije.
Krivolinijsko kretanje materijalne tačke u ravni: Horizontalni i kosi hitac.

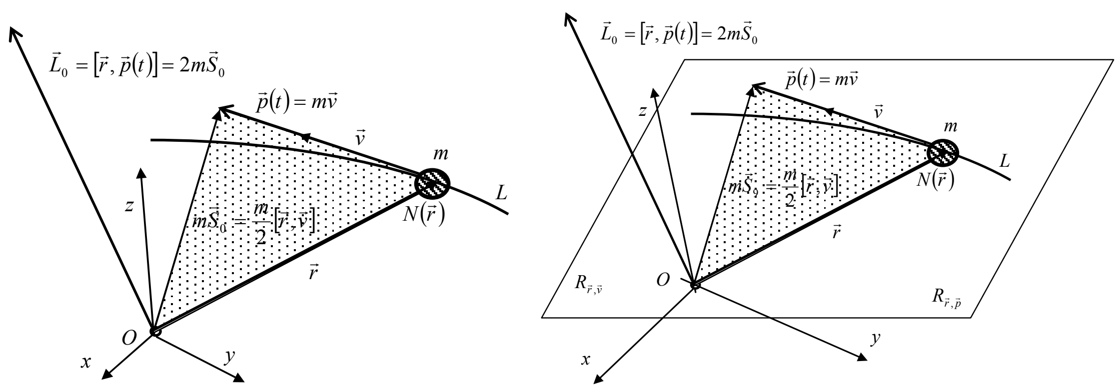
VII.1. SEDMA NEDELJA
Konzervativno kretanje. Konzervativne sile. Funkcija sile. Cauchy-Reiman-ovi uslovi. Rad konzervativne sile. Potencijalna energija. Teorema o održanju mehaničke energije. Integral energije. Odredjivanje funkcije sile.
Centralna kretanja. Funkcija sile kod centralnih kretanja. Bineov obrazac. Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanom sistemu koordinata. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VII.2. OSMA NEDELJA
Prinudno kretanje materijalne tačke. Veze. Podela veza. Uslovi za brzinu i ubrzanje. Lagrange-ovi množioci veza. Kretanje materijalne tačke po idealnoj površi. Lagrange-ove jednačine I vrste. Diferencijalne jednačine kretanja u prirodnom sistemu koordinata. Integral energije. Kretanje materijalne tačke po obrtnoj površi. Prinudno kretanje materijalne tačke po liniji. Integral energije. kretanje materijalne tačke po krugu u polju zemljine teže. Dinamika relativnog kretanja materijalne

Centralna kretanja
(Kretanje materijalne tačke u polju centralnih sila).

Uvod

U jednom od prethodnih predavanja definisali smo pojam ***momenta impulsa kretanja materijalne*** *tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$ *za pol u stalnoj tački, a napomenuli smo i da se koriste i nazivi* ***kinetički moment****, kao i* ***zamah****.* Na narednim slikama je dat grafički, geometrijski prikaz *vektora momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u stalnoj tački* O, *koji je upravan na ravan, koju čine vektor položaja materijalne tačke* $\vec{r}(t)$ *u odnosu na momentnu tačku - pol* O *i vektor impulsa kretanja te materijalne tačke* $\vec{p}(t)$, *a tu ravan smo obeležili sa* $R_{\vec{r},\vec{p}}$ *ili* $R_{\vec{r},\vec{v}}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $\vec{L}_O$ *materijalne tačke, za pol* O *i odgovarajućih kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti..*

Pokazali smo i vezu sektorske brzine $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]$ *i vektora momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u stalnoj tački* O. *Ta veza je u obliku dvostrukog proizvoda mase pokretne materijalne tačke i vektora sektorske brzine te materijalne tačke i pomoću iste se može napisati u obliku:*

$$\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}] = m[\vec{r},\vec{v}] = 2m\vec{S}_O$$

Znači da je, *sektorska brzina* $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]$ *za pol u stalnoj tački* O, *pomnožena dvostukom masom pokretne materijalne tačke jednaka vektoru momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u toj stalnoj tački* O.

Izveli smo i relaciju $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = [\vec{r},\vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}$ koja je matematički iskaz ***leme o promeni momenta impulsa (količine) kretanja***, koju rečima možemo formulisati u sledećem obliku:

Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja: *Prvi izvod po vremenu vektora momenta impulsa (količine) kretanja slobodne pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u stalnoj tački* O *jednak je momentu aktivne sile* $\vec{F}$ *koja dejstvuje na slobodnu materijalnu tačku za isti pol* O, *kao momentnu tačku.*

Sada na osnovu relacije $\vec{L}_O = 2m\vec{S}_O$, *tj. veze vektora momenta impulsa (količine) kretanja tj. zamaha pokretne materijalne tačke nepromenljive mase,* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u stalnoj tački* O, *i* kinematičke odrednice sektorske brzine $\vec{S}_O = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]$ *možemo da napišemo:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O + 2\dot{m}\vec{S}_O$$

odnosno kada je masa slobodne pokretne materijalne tačke nepromenljiva i ona nije pod dejstvom veza, već samo aktivnih sila $\vec{F}$ možemo da napišemo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = [\vec{r},\vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

odakle sledi da je:

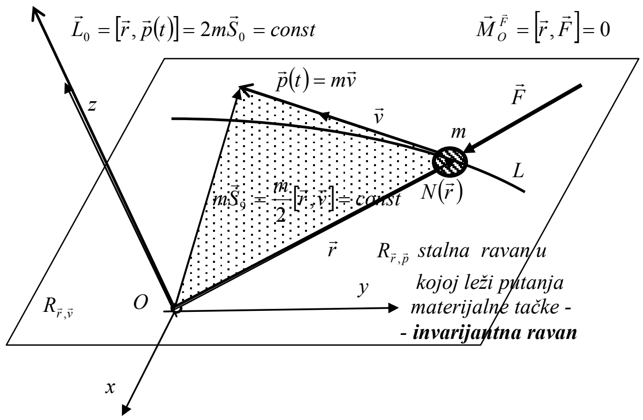
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

Znači da je, *sektorsko ubrzanje* $\dot{\vec{S}}_O = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{a}]$ *za pol u stalnoj tački* O, *pomnoženo dvostukom masom pokretne materijalne tačke jednako izvodu vektora momenta impulsa kretanja materijalne tačke* $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$, *za pol u toj stalnoj tački* O, *odnosno, momentu sile koja dejstvuje na slobodnu materijalnu tačku za isti pol za koji se uzima to sektorsko ubrzanje.*

Ovaj iskaz predstavlja *lemu o površini*, jer *sektorska brzina* predstavlja *površinu,* koju opisuje *u jedinici vremena, vektor položaja pokretne materijalne tačke u odnosu na neki pol* O, *pri njenom kretanju.*

Ako je moment sila, koje dejstvuju na materijalnu tačku, jednak nuli za neku nepokretnu tačku – pol, onda je moment impulsa kretanja $\vec{L}_O \overset{def}{=} [\vec{r},\vec{p}]$ *za taj pol konstantan (nepromenljiv) u toku kretanja te tačke.*

$$\forall \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}_O^{\vec{F}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = m\left[\vec{r}, \vec{v}\right] = 2m\vec{S}_O = \vec{C} = const$$



Znači možemo da formulišemo ***sledeći zaključak****: Kada je moment sile koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku, za neku stalnu tačku jednak nuli, tada je i zamah za tu tačku konstantan.*

To je ***lema*** *o održanju* ***momenta impulsa (količine) kretanja*** *pokretne materijalne tačke****.*** *Grafička ilustracija prethodnog zaključka* – leme prikazana je na prethodnoj slici.

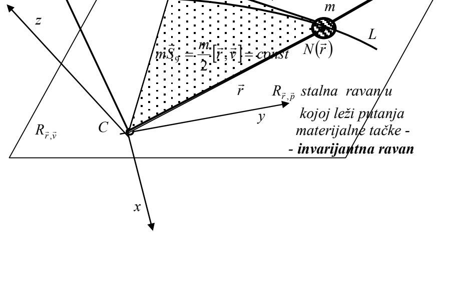
Centralne sile

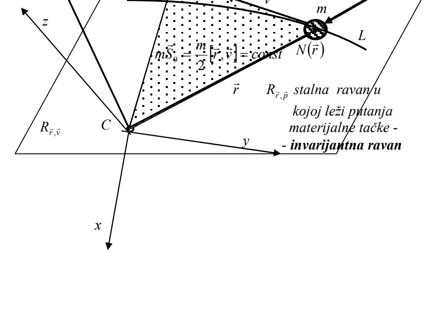
Centralna sila *je sila čija napadna linija, pri dejstvu sile na pokretnu materijalnu tačku, uvek prolazi kroz jednu stalnu tačku –* ***centar sila****.*

Ovde treba razlikovati pojam ***centralne sile*** i ***centripetalne sile,*** *kao i njihova svojstva****.***

Centripetalna sila ima svojstvo da njen pravac uvek prolazi kroz odgovarajući centar krivine putanje, a tih centara u opštem slučaju krive linije sa različitim krivinama ima više, tako da i centipetalna sila menja tačku – centar krivine kroz koji prolazi zavisno od toga na kom je delu putanje pokretna materijalna tačka. Jedini slučaj, kada centripetalna sila prolazi kroz jednu fiksnu tačku centar krivine koji se ne menja je kada se materijalna tačka kreće po krugu. Centripetalna sila je usmerena ka centru krivine. Suprotna ovoj sili je centrifugalna sila. Naprimer kod ravnomernog kružnog kretanja, kada se materijalna tačka kreće po krugu konstantnom brzinom, onda je ta centripetalna sila jednaka $F_N = m\dfrac{v^2}{R}$, gde je R poluprečnik krivine. Pojam centripetalne sile uveo je Kristijan Hajgens publikujući ovu formulu u svom delu ''*Horologium oscilatorium*'' publikovanom 1683.godine u Parizu.

Kao što smo definisali osnovno svojstvo *centralne sile*, a to je da njena napadna linija uvek prolazi kroz *centar sila* C jednu stalnu tačku, to je moment centralne sile za tu stalnu tačku jednak nuli. Imajući u vidu prethodne teoreme o promeni momenta impulsa kretanja materijalne tačke, kao i lemu *o održanju* ***momenta impulsa (količine) kretanja*** *pokretne materijalne tačke* možemo zaključiti da je moment impulsa kretanja meterijalne tačke, koja se kreće pod dejstvom centralne sile, za momentnu tačku u centru sila, konstantan.





Mnogobrojna ispitivanja svojstava centralnih sila koje se javljaju u prirodi i u našem širem okruženju, pokazuju da gotovo u svim značajnim slučajevima centralne sile zavise od rastojanja materijalne tačke od centra sile. Opravdano je da se zaključi da od svih centralnih sila, koje se javljaju u u prirodi, da su najvažnije one čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja pokretne materijalne tačke od centra sila. Svakako treba istaći da u centralna kretanja spadaju najvažnija kretanja u prirodi. Kretanje planeta, prirodnih i veštačkih satelita, a takodje i čestica atomskih razmera, odvija se pod dejstvom centralnih sila. Istorijski posmatrano, kretanje materijalnih sistema pod dejstvom centralnih sila bilo je inspiracija mnogih istraživača, što je i dovelo do utemeljenja racionalne mehanike, kao racionalnog dela fizike. Poseban interes je bio izražen u izučavanju kretanja nebeskih tela.

Ako se vektor položaja materijalne tačke odredjuje u odnosu na centar sila, kao što je to pokazano na prethodnim slikama, gde smo sa C označili centar sile, to se centralna sila može u vektorskom obliku izraziti sledećom relacijom:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}_0 = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

gde je $f(r)$ *zakon dejstva centralne sile, a* $\vec{r}_0$ *je ort vektora položaja materijalne tačke u odnosu na centar sila.* U slučaju da vektor položaja nije u centru sila C, nego je u nekoj tački O u odnosu na koju je centar sila odredjen vektorom položaja $\vec{\rho}_C$, a položaj materijalne tačke odredjen vektorom položaja $\vec{\rho}$ to je onda vektor položaja $\vec{r}$ materijalne tačke u odnosu na centar sila $\vec{r} = \vec{\rho}_C - \vec{\rho}$ te se tada centralna sila može vektorski izraziti u obliku:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{\rho}_C - \vec{\rho}}{r}$$

Centralna sila koja zavisi od rastojanja konzervativna je i ima funkciju sile. Funkciju sile odredjujemo integraljenjem:

$$U(r) = \int f(r)dr + C$$

Ako se kretanje odvija pod dejstvom većeg broja centralnih sila sa odgovarajućim centrima C_i, $i = 1,2,3,...,c$ onda je rezultujuća sila dejstva na materijalnu tačku:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=c} f_i(r_i)\frac{\vec{\rho}_{C_i} - \vec{\rho}}{r_i}$$

Funkcija sile je tada:

$$U(r_1, r_2, ..., r_c) = \sum_{i=1}^{i=c} \int f_i(r_i)dr_i + C$$

Centralne sile mogu biti *privlačne (atraktivne) i odbojne (repilzivne)* u zavisnosti od znaka funkcije $f(r) > 0$ ili $f(r) < 0$, odnosno

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm|f(r)|\vec{r}_0 = \pm|f(r)|\frac{\vec{r}}{r}$$

U radovima ***Rudjera Boškovića*** nalazimo teoriju o dejstvu prirodnih sila i njihovom dvojakom dejstvu *privlačnom (atraktivnom) i odbojnom (repilzivnom)* zavisno od rastojanja na kojima su čestice materije.

Kao što smo u početku izlaganja zaključili, ako je kretanje materijalne tačke pod dejstvom jedne centralne sile, onda ta centralna sila prolazi kroz centar sila, pa je moment sile za momentnu tačku u centru sila, te sledi da je moment količine kretanja te materijalne tačke za momentnu tačku u centru sila konstanta, a putanja materijalne tačke je ravna kriva, koja leži u ravni koju smo nazvali *invarijantna ravan*. Zbog veze momenta impulsa kretanja sa sektorskom brzinom za pol u centru sila sledi da je *kretanje materijalne tačke pod dejstvom jedne centralne sile sa konstantnom sektorskom brzinom* u odnosu na pol u centru sila.

$$\forall \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = 2m\dot{\vec{S}}_O = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^{\vec{F}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{S}_O = \vec{C} = const$$

$$2\vec{S}_C = r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0 = const$$

Ovo je *i integral površine*. Pomoću ove relacije moguće je odrediti putanju materijalne tačke, koja se kreće pod dejstvom jedne centralne sile.

Ako je brzina $\vec{v}_0$ kretanja materijalne tačke u početnom trenutku vremena činila sa njenim vektorom položaja $\vec{r}_0$ ugao ϑ_0 onda je na osnovu prethodnog integrala površine, dvostruka sektorska brzina:

$$2S_0 = 2\frac{dA}{dt} = r^2\dot{\varphi} = \left\|\left[\vec{r},\vec{v}\right]\right\| = \left\|\left[\vec{r}_0,\vec{v}_0\right]\right\| = r_0 v_0 \cos\vartheta_0 = const = C$$

što posle integraljenja daje:

$$A = \frac{1}{2}Ct + A_0$$

a na osnovu čega formulišemo sledeći zaključak:

Površina koju prevlači vector položaja pokretne materijalne tačke, pod dejstvom centralne sile u odnosu na centar sile, srazmeran je vremenu njenog kretanja.

Pored integrala površine za kretanje materijalne tačke pod dejstvom jedne centralne sile možemo primeniti i integral žive sile u obliku:

$$E_k - E_0 = U - U_0$$

kako je $U(r) = \int f(r)dr + C$, a kinetika energija $E_k = \frac{mv^2}{2}$, pri čemu je $v^2 = v_r^2 + v_c^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ to je integral energuije:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{m}{2}\left(\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2\right) = U(r) - U(r_0) = \int_r^{r_0} f(r)dr$$

Ili

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = U(r) - U(r_0) + \frac{m}{2}\left(\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2\right) = \int_r^{r_0} f(r)dr + \frac{m}{2}\left(\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2\right)$$

ili

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{2U(r) + 2E_0}{m}$$

Kako je $2\vec{S}_C = r^2\dot{\varphi} = C$ to je $\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}$ što unočenjem u prethodni integral energije daje:

$$\dot{r}^2 + r^2\frac{C^2}{r^4} = \frac{2U(r) + 2E_0}{m} \quad\Rightarrow\quad \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2U(r) + 2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}} \quad\Rightarrow\quad dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2U(r) + 2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

Odakle sledi da je:

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2U(r) + 2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

čime je zadatak kretanja materijalne tačke pod dejstvom centralne sile rešen, jer smo odredili zavisnost radijus vektora od vremena $r = r(t)$, pa nije teško odrediiti i polarni ugao u funkciji vremena:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t}\frac{Cdt}{r(t)^2}$$

čime smo dobili parametarske jednačine putanje u funkciji vremena $r = r(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$, te na osnovu toga možemo napisati vektor položaja pokretne materijalne tačke u invarijantnoj ravni kretanja u funkciji vremena t:

$$\vec{r}(t) = r(t)\left[\vec{u}\cos\varphi(t) + \vec{v}\sin\varphi(t)\right]$$

Drugi put rešavanja ovog zadatka je da se iz integrala energije i inetegrala površine

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2U(r)+2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}}} \qquad \text{i} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

eliminiše vreme pa se dobija:

$$d\varphi = \pm \frac{Cdr}{r^2\sqrt{\frac{2U(r)+2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

odakle dobijamo

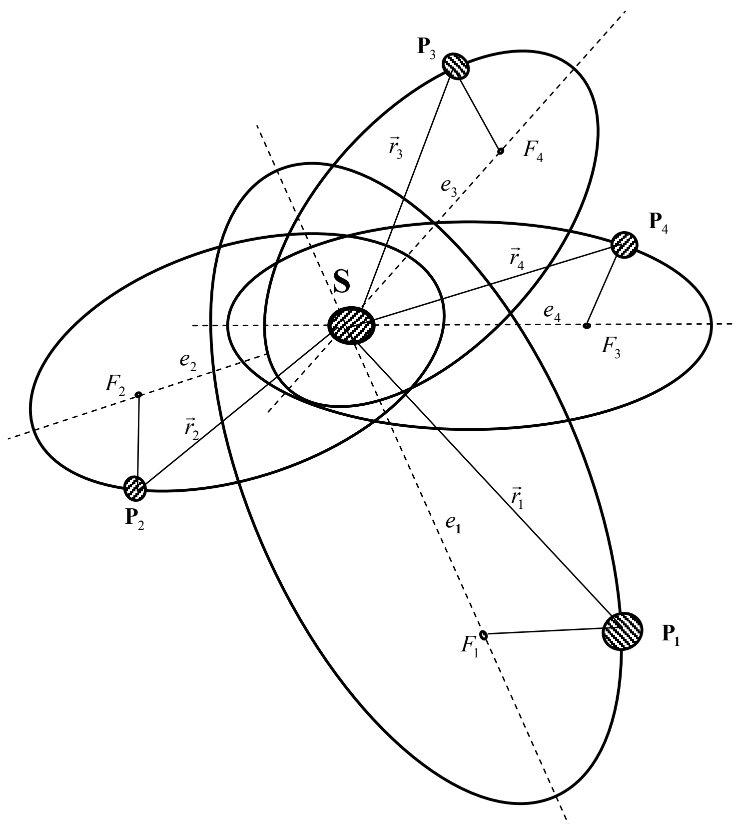
$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{Cdr}{r^2\sqrt{\frac{2U(r)+2E_0}{m} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

zavisnost radijus vektora $r = r(\varphi)$ od polarnog ugla φ, pa smo u polarnom sistemu koordinata r i φ dobili jednačinu putanje: $r = r(\varphi)$, te na osnovu toga možemo napisati vektor položaja pokretne materijalne tačke u invarijantnoj ravni kretanja u funkciji polarnog ugla φ:

$$\vec{r}(\varphi) = r(\varphi)[\vec{u}\cos\varphi + \vec{v}\sin\varphi]$$

Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta.

Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta odnose opisusju svojstva kretanja planeta pod dejstvom centralnih sila pa ćemo ih ovde ponoviti iako su oni izloženi kada smo proučavali i definisali zakone dinamike.



Slika. Eliptične putanje planeta pri obilasku oko Sunca.

Johan Kepler (1571-1630) je bio naslednik *Tiho Brahea* u zvanju dvorskog astronoma i matematičara na dvoru u Pragu. Na osnovu mnogobrojnih podataka iz posmatranja kretanja nebeskih tela i posebno Marsa, koje mu je ostavio prethodnik Tiho Brahe, Kepler je nastavio posmatranja kretanja

Marsa i Zemlje. U svom delu ***''Astronomia nova de motibus stellae Martis''***, koje je publikovano 1609, postavio je svoja prva dva zakona kretanja planeta, a u delu ***''Harmonices mundi***'' 1619 i svoj treći zakon.

Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta glase:

1* *Planete opisuju oko Sunca eliptičke putanje; u zajedničkoj žiži tih elipsi nalazi se Sunce.*

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

je jednačina elipse u polarnim koordinatama (r,φ) i sa poluosama (b,c), dok je parametar elipse

$$p = \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - e^2}{b},$$

a linearna ekscentričnost je

$$e = \sqrt{b^2 - c^2} = \varepsilon b,\ e < b,\ \varepsilon < 1.$$

2* *Vektor položaja planete u odnosu na Sunce prevlači u jednakim delovima vremena jednake površine.*

Ovaj zakon tvrdi da je sektorska brzina kretanja planeta konstantna te je u polarnom sistemu koordinata (r,φ) ta tvrdnja izražena (iskazana) sledećom relacijom:

$$2S = r^2\dot{\varphi} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = C = const$$

3* *Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca srazmerni su kubovima velikih poluosa eliptičnih putanja planeta*.

Na osnovu prethodnog drugog Kepler-ovog zakona pomoću sektorske brzine dolazi se do trećeg zakona koji izražavamo relacijom:

$$k = \frac{b^3}{T^2}$$

gde je k broj koji važi za sve planete, a T vreme jednog obilaženja planete oko Sunca.

Ova sva tri zakona *ne odredjuju silu medjudejstva planeta*, pa direktno ne spadaju u grupu zakona dinamike, kako smo ih definisali, ali su *osnova na kojoj je Newton odredio silu privlačenja* izmedju planeta.

Već smo u prethodnom poglavlju razmotrili pojam *centripetalne sile*, onako kako ju je uveo Kristijan Hajgens (*Christian Huygens* (1629-1695)) i objavio, kao formulu u svom delu ''*Horologium oscilatorium*'' publikovanom 1683.godine u Parizu. Danas, poznata kao Hajgensova, teorema kaže da materijalna tačka koja se kreče po kružnoj limžniji konstantnom brzinom podvrgnuta je (podleže) samo normalnom (centrifugalnom) ubrzanju $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ koje je uvek usmereno ka središtu kruga.

[Briljantni holandski naučnik Kristijan Hajgens (*Christian Huygens* (1629-1695)) je izučio i opisao kretanje matematičkog klatna i uveo je pojam i objasnio svojstva centrifugalne sile i time se upisao u zaslužne naučnike za dalji razvoj Dinamike i Teorije oscilacija. Te rezultate je opisao u svom delu "*Horologium oscillatorium*" koje publikovano 1638 godine.]

Na osnovu navedene Hajgensove teoreme tri engleska naučnika Kristofer Vren (*Christofer Wren* 1692-1723), Robert Huk (*Robert Hooke* 1635-1703) i Edmond Halej (*Edmond Halley* 1656-1742 god.) nezavisno jedan od drugog, i skoro uporedo, izveli su sledeći zaključak: *Kada se pretpostavi da se zbog malih odstupanja ekscentričnosti planetarnih putanja, planete kreću po kružnim linijama, normalno ubrzanje kretanja planeta je:*

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

gde je T vreme jednog obilaženja planete oko Sunca. Uzimajući sada u obzir Kepler-ov treći zakon , normalno ubrzanje se može napisati u sledećem vidu:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 k}{R^2}$$

te se može zaključiti sledeće: ***Planete podležu normalnom ubrzanju usmerenom ka Suncu, a po intenzitetu obrnuto srazmernom kvadratu poluprečnika kružne putanje***.

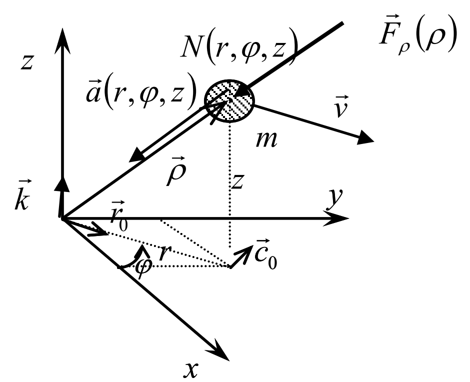
Francuski matematičar i astronom Žak Filip Marie Bine (*Jacque Philipe Marie Binet* 1786-1856) na drugi način je izrazio ovo ubrzanje i taj obrazac je u literaturi poznat pod imenom Bineov obrazac.

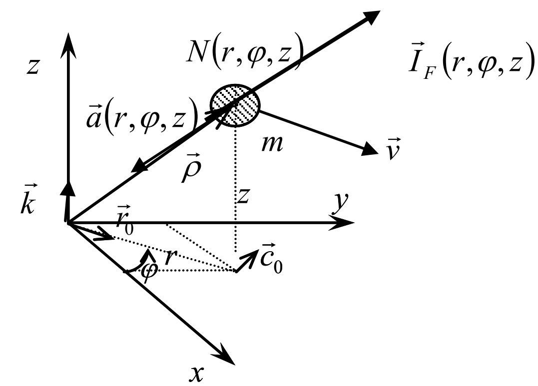
Binet-ov obrazac – Binet-ova jednačina

Jednačine kretanja materijalne tačke u polarnom sistemu koordinata su:
Ubrzanje materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k}$$

gde su $\left(\vec{r}_0, \vec{c}_0, \vec{k}\right)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.





Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne tačke*** $N(r,\varphi,z)$***, mase*** m***,*** *čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata *je*

$$\vec{I}_F = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 - m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 - m\ddot{z}\vec{k},$$

sa komponentama

$$I_{F,r} = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \qquad I_{F,c} = -m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) \quad I_{F,z} = -m\ddot{z}$$

Sistem jednačina kretanja slobodne materijalne tačke u polarno-cilindričkom sistemu koordinata pod dejstvom centralne sile:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \left(\vec{F}, \vec{r}_0\right) = F_r$$
$$m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = \left(\vec{F}, \vec{c}_0\right) = F_c = 0$$
$$m\ddot{z} = \left(\vec{F}, \vec{k}\right) = F_z = 0$$

Iz druge diferencijalne jednačine dobijamo *integral površine*

$$2S = r^2\dot{\varphi} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = C = const$$

koji kaže da je sektorska brzina konstantna. Izvodi vektora položaja su sada:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -Cu'$$

$$\ddot{r} = -C\frac{d}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -C^2u^2u''$$

gde smo uveli smenu pomoću relacije $u=\dfrac{1}{r}$. Unošenjem izvoda potega (radijalne koordinate) $\dot{r}$ i $\ddot{r}$ po vremenu, koje smo transformisali preko izvoda po cirkularnoj koordinati φ i nove recipročne potegu koordinate $u=\dfrac{1}{r}$ u prvu jednačinu kretanja materijalne tačke pod dejstvom centralne sile dobijamo:

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=\left(\vec{F},\vec{r}_0\right)=F_r$$

odnosno

$$-C^2u^2u''-\frac{1}{u}C^2u^4=\frac{1}{m}F_r(r)$$

ili u transfoirmisanom obliku jednačina kretanja materuijalne tačke u radijalmoom pravcu pod dejstvom centralne sile je:

$$-C^2u^2\left(u''+u\right)=\frac{1}{m}F_r(r)$$

ili

$$-C^2u^2\left(u''+u\right)=-\frac{1}{m}F_r(r)$$

Pri čemu se prva diferencijalna jednačina sa znakom *plus* ispred centralne sile odnosi na *privlačnu (atraktivnu)* centralnu silu, dok se poslednja diferencijalna jednačina sa znakom *minus* ispred centralne sile odnosi na *odbojnu (repulzivnu)* centralnu silu.

Radijalno komponenta ubrzanja je sada:

$$a_r=-C^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=-C^2u^2\left(u''+u\right)=\pm\frac{1}{m}F_r(r)$$

S obzirom da smo iz druge diferencijalne jednačine za cirkularni pravac dobili da je sektorska brzina konstantna, to sa sobom povlači da je komponenta ubrzanja u cirkularnom pravcu iednaka nuli, kod kretanja materijalne tačke pod dejstvom centralne sile.

S obzirom da je kretanje planeta pod dejstvom centralnih sila, to možemo zaključiti da je kretanje planeta sa ubrzanjem u cirkularnom pravcu jednakom nuli i da su izložene samo dejstvu radijalne komponente ubrzanja.

Francuski matematičar i astronom Žak Filip Marie Bine (*Jacque Philipe Marie Binet* 1786-1856) je izveo ovaj obrazac za ubrzanje u radijalnom pravcu i taj obrazac je nazvan *Bineov obrazac, dok je prethodna jednačina Bineova diferencijalna jednačina.*

Izvedeni, Bineov obrazac omogućava da, ako se zna putanja materijalne tačke $r=r(\varphi)$*, da se odredi zakon dejstva centralne sile* $f(r)$. Omogućava i obrnuto, da ako se zna zakon promene centralne sile u funkciji radijusa $f(r)$ *da se odredi trajektorija – putanja materijalne tačke u polarnim koordinatama* $r=r(\varphi)$.

Kako smo pokazali iz druge jednačine dinamičke ravnoteže za cirkularnu koordinatu, to postoji integral površine, odnosno sektorska brzina je konstantna, to je Bineova jednačina, koju smo izveli i diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke u ravni pod dejstvom centralne sile.

Analizom integrala površine u sledećem obliku

$$2S=r^2\dot{\varphi}=r^2\frac{d\varphi}{dt}=rv\sin\vartheta=vc=h=C=const$$

gde smo uveli oznaku $c=r\sin\vartheta$, što predstavlja rastojanje centra privlačenja od tangente na putanju u položaju pokretne tačke.

Na osnovu principa rada za elementarni rad i teoreme o promeni kinetičke energije možemo da napišemo:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=d\left(\frac{m}{2}\frac{C^2}{c^2}\right)=\frac{mC^2}{2}d\left(c^{-2}\right)=\left(\vec{F}_r(r),d\vec{r}\right)=\pm F_r(r)dr$$

Na osnovu prethodnog se za centralnu silu može napisati sledeće

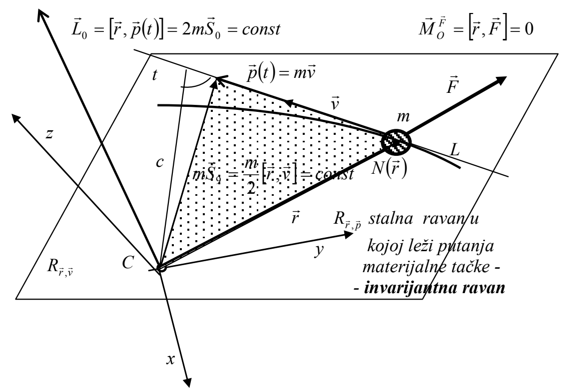
$$\pm F_r(r) = \frac{mC^2}{2}\frac{d\left(c^{-2}\right)}{dr}$$

a takodje možemo radijalnu kompionentu ubrzanja pokretne materijalne tačke pod dejstvom centralne sile da napisemo u obliku:

$$a_r(r) = \frac{C^2}{2}\frac{d\left(c^{-2}\right)}{dr}$$

Može se uspostaviti i sledeća veza:

$$a_r = -C^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = -C^2u^2\left(u''+u\right) = \frac{C^2}{2}\frac{d\left(c^{-2}\right)}{dr} = \pm\frac{1}{m}F_r(r)$$



Važi sledeća relacija:

$$-2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = -2u^2\left(u''+u\right) = \frac{d\left(c^{-2}\right)}{dr}$$

Sila opšte gravitacije poznata kao Njutnova gravuitacuona sila, takodje, pripada klasi centralnih sila.

Kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile opšte gravitacije. Veštački sateliti

Kao što smo već ranije konstantovali, kada smo govorili o zakonima dinamike, sada ponovimo da je iz Kepler-ovih zakona o kretanju planeta Newton osmislio dalekosežnije zaključke i publikovao ih sa dokazima u svom delu "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (Matematički principi prirodne filozofije) koje je publikovano maja 1687 godine i kojim je dao jak oslonac daljem *razvoju Dinamike*. On je iz Keplr-ovih zakona o kretanju planeta odredio komponentu ubrzanja $\vec{a}_r$ u radijalnom pravcu (pravac od planete do centra privlačenja – Sunca) u obliku:

$$\vec{a}_r = -\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0$$

Ovo je i zakon *Vrena* (*Christofer Wren* 1692-1723), koji važi i za stvarne, a ne samo za kinematičke eliptične putanje.

Newton se ne zaustavlja na ovome, već svojim genijalnim umom uopštava prethodni rezultat i na ostala nebeska tela, koristeći pri tome i rezultate *Galileo Gelileya* da materijalna tačka na površi Zemlje ima ubrzanje g.

Odredio je silu kojom Sunce privlači planete:

$$\vec{F}_r = -m\vec{a}_r = -m\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je m masa te planete, r radijus u radijalnom pravcu (pravac od planete do centra privlačenja – Sunca), a $\vec{r}_o$ jedinični vektor orjentacije tog pravca planeta - Sunce.

Po tome zakonu dejstva i protivdejstva mase planete i mase Sunca se dolazi do zakona o sili uzajamnog privlačenja Sunca i planete u obliku:

$$\vec{F}_r = -f\frac{mM_s}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je M_s masa Sunca, m masa planete, $f = \frac{\lambda}{M_s} = \frac{4\pi\kappa}{M_s}$ univerzalna konstanta koja važi za sve planete Sunčevog sistema. Time je Newton došao do zakona o opštoj univerzalnoj gravitaciji, koja važi za svaka dva delića materije, kao i za celu Vasionu.

Newton-ov zakon o opštoj univerzalnoj gravitaciji ima sledeću formulaciju:

Svako materijalno telo u Vasioni privlači drugo silom koja pada u pravac spojne prave tih tela, intenziteta srazmernog proizvodu masa tela, a obrnuto srazmernog kvadratu rastojanja:

$$\vec{F}_g = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je f univerzalna gravitaciona konstanta (po Gauss-u). Njena vrednost je odredjena eksperimentalno (po *Kevendišu* - *Cavendish* 1798.godine) i iznosi $f = 6{,}67\,10^{-8}\left[gr*^{-1}\,cm^3\sec^{-2}\right]$ i ona je privlačna sila dveju masa od po jednog $[gr*]$ na rastojanju od jednog $[cm]$ i izražena je u dyn-ima.

Kako se nebeska tela kreću pod dejstvom, prethodno prikazanih, sila koje zavise od radijus vektora poloaja planeta u odnodu na Sunce, to su sile opšte gravitacije *centralne* i *konzervativne*. Intenzitet tih sila je obrnuto srazmeran kvadratu njihovog rastojanja.

Sada ćemo rešiti obrnuti zadatak, da odredimo putanju planete, koja se kreće pod dejstvom centralne sile tipa Newton-ove sile opšte gravitacije, a pri tome ćemo koristiti Binet-ov obrazac.

Zato u Binet-ov obrazac

$$a_r = -C^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = -C^2u^2\left(u''+u\right) = \pm\frac{1}{m}F_r(r)$$

unosimo radijalno ubrzanje $\vec{a}_r = -\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0 = -\lambda u^2\vec{r}_0$ i time smo dobili neophodnu diferencijalnu jednačinu:

$$-C^2u^2\left(u''+u\right) = -\lambda u^2$$

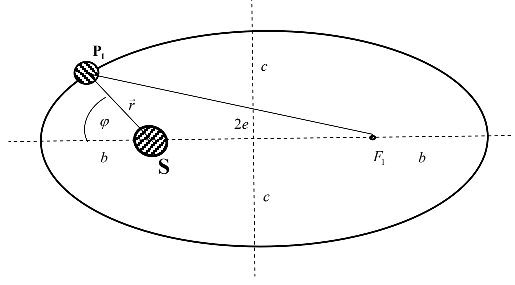
koja je u uprošćenom obliku:

$$\left(u''+u\right) = \frac{\lambda}{C^2}$$

Obična diferencijalna jednačina drugog reda, nehomogena, čije je rešenje sastavljeno od partikularnog rešenja i rešenja homogene jednačine:

$$u(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{\lambda}{C^2}$$

u kome su A i B integracione konstante koje se odredjuju iz početnih uslova položaja planete na putanji i njene brzine.



Za $\varphi = 0$, $r(0) = b - e$ za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{c^2 - e^2}$ ili za $\varphi = \pi$, $r(\pi) = b + e$ pa unošenjem ovih podataka u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$u(\varphi)\Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{b-e} = A + \frac{\lambda}{C^2}$$

$$u(\varphi)\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} = B + \frac{\lambda}{C^2}$$

pasledi da je:

$$A = \frac{1}{b-e} - \frac{\lambda}{C^2} = \frac{C^2 - \lambda b + \lambda e}{C^2(b-e)} = \frac{1}{(b-e)}\left[1 - \frac{\lambda}{C^2}(b-e)\right] = \frac{1}{b(1-\varepsilon)}\left[1 - \frac{\lambda b}{C^2}(1-\varepsilon)\right] = \frac{\lambda}{C^2}\varepsilon\cos\varphi_0$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} - \frac{\lambda}{C^2} = \frac{\lambda}{C^2}\varepsilon\sin\varphi_0$$

$$\frac{1}{r} = \left[\frac{1}{b-e} - \frac{\lambda}{C^2}\right]\cos\varphi + \left[\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} - \frac{\lambda}{C^2}\right]\sin\varphi + \frac{\lambda}{C^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{C^2}\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right] = \frac{1}{p}\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right]$$

$$r = \frac{C^2}{\lambda}\frac{1}{\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right]} \qquad p = \frac{C^2}{\lambda}$$

$$r = \frac{p}{\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right]}$$

$$\varepsilon = \frac{C^2}{\lambda}\sqrt{\left[\frac{1}{b-e} - \frac{\lambda}{C^2}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} - \frac{\lambda}{C^2}\right]^2}$$

$$\varepsilon = \frac{C^2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{1}{b-e}\right)^2 - 2\frac{1}{b-e}\frac{\lambda}{C^2} + 2\left(\frac{\lambda}{C^2}\right)^2 + \frac{1}{c^2-e^2} + 2\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}}\frac{\lambda}{C^2}}$$

$$tg\varphi_0 = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} - \frac{\lambda}{C^2}\right]}{\left[\frac{1}{b-e} - \frac{\lambda}{C^2}\right]}$$

Na kraju jednačinu putanje planeta, pri kretanju oko Sunca, pod dejstvom centralne sile opšte gravitacije dobijamo u obliku:

$$r = \frac{p}{\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right]}$$

gde je parametar putanje planeta u polarnim koordinatama $p = \frac{C^2}{\lambda}$, dok je ekscentricitet elipse

$$\varepsilon = \frac{C^2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{1}{b-e}\right)^2 - 2\frac{1}{b-e}\frac{\lambda}{C^2} + 2\left(\frac{\lambda}{C^2}\right)^2 + \frac{1}{c^2-e^2} + 2\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}}\frac{\lambda}{C^2}} = \frac{e}{b}$$

i početni ugao φ_0

$$tg\varphi_0 = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{c^2-e^2}} - \frac{\lambda}{C^2}\right]}{\left[\frac{1}{b-e} - \frac{\lambda}{C^2}\right]}$$

Kada je početni ugao φ_0 jednak nuli jednačina putanje planeta je:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

a to je za $\varepsilon < 1$ jednačina elipse u polarnim koordinatama (r,φ) i sa poluosama (b,c), dok je parametar elipse

$$p = \frac{c^2}{b} = \frac{b^2-e^2}{b},$$

a linearna ekscentričnost je

$$e = \sqrt{b^2-c^2} = \varepsilon b .$$

Prethodno dobijena jednačina

$$r = \frac{p}{\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right]}$$

se može proučavati i u opštijem obliku, kada ona predstavlja jednačinu krive drugog reda, odnosno, konusnog preseka i to za slučaj:

* kada je $\varepsilon < 1$ to je *elipsa*,
* kada je $\varepsilon = 1$ to je *parabola*,
* kada je $\varepsilon > 1$ to je *hiperbola*,
* kada je $\varepsilon = 0$ te se radi o *kružnoj liniji*.

Obrnutim pristupom zadatku, pod pretpostavkom da je poznata putanja tipa konusnog preseka pomoću Binet-ovog obrasca moguće je dokazati da je centralna sila koja proizvodi takvo kretanje obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja planete (materijalne tačke) od centra privlačenja sile odnosno Sunca.

Ako pak, posmatramo kretanje materijalne tačke pod dejstvom centralne sile koja je obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja materijalne tačke od centra privlačenja, na osnovu prethodno izvedene jednačine putanje $r = \frac{p}{\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right]}$, možemo zaključiti da ta putanja može biti elipsa za $\varepsilon < 1$, parabola za $\varepsilon = 1$, hiperbola za $\varepsilon > 1$ i kružna linija za $\varepsilon = 0$, tj. jedna od linija drugog reda tipa konusnih preseka u zavisnosti od ekscentriciteta ε.

Kad su u pitanju kretanja veštačkih, zemljinih satelita, njih takodje možemo smatrati materijalnim tačkama u odnosu na Zemlju, a takodje da se oni kreću pod dejstvom centralne sile usmerene ka centru Zemlje, kao i da je ta centralna sila obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja r veštačkog Zemljinog satelita od njenog centra:

$$\vec{F}_g = -f\frac{mM}{r^2}\vec{r}_0$$

gde su M masa Zemlje, m masa veštačkog satelita, f univerzalna gravitaciona konstanta (po Gauss-u). Njena vrednost je odredjena eksperimentalno (po *Kevendišu - Cavendish* 1798.godine) i iznosi $f = 6{,}67\,10^{-8}\left[gr*^{-1}\,cm^3\sec^{-2}\right]$ i ona je privlačna sila dveju masa od po jednog $\left[gr*\right]$ na rastojanju od jednog $[cm]$ i izražena je u dyn-ima.

Kako je na površini Zemlje ova privlačna centralna sila jednaka mg težini veštačkog satelita, to možemo naći sledeću relaciju:

$$\vec{F}_g(R) = -f\frac{mM}{R^2}\vec{r}_0 = -mg\vec{r}_0$$

Odakle sledi:

$$fM = gR^2$$

te je:

$$\vec{F}_g = -mg\frac{R^2}{r^2}\vec{r}_0 = -m\frac{\lambda}{r^2}\vec{r}_0$$

gde je sada $\lambda = gR^2$. Dalji postupak opisivanja kretanja veštačkog satelita oko Zemlje svodi se na prethodno matematičko opisivanje i rezmatranje kretanja planete oko Sunca, te iz Binet'ovog obrasca možemo pisati sledeću diferencijalnu jednačinu:

$$-C^2u^2\left(u''+u\right)=-\lambda u^2$$

koja je u uprošćenom obliku:

$$\left(u''+u\right)=\frac{\lambda}{C^2}$$

Obična diferencijalna jednačina drugog reda, nehomogena, čije je rešenje sastavljeno od partikularnog rešenja i rešenja homogene jednačine:

$$u(\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi+\frac{\lambda}{C^2}$$

u kome su A i B integracione konstante, koje se odredjuju iz početnih uslova kretanja veštačkog satelita u odnosu na Zemlju.

Neka su početni uslovi zadati time, da je veštački satelit izbačen iz položaja udaljenog od površine Zemlje za h (visina položaja) i da mu je saopštena početna brzina v_0. čiji pravac zaklapa sa horizontom ugao α_0. To su dva početna uslova iz kojih se mogu odrediti dve nepoznate integracione konstante. Radijalna komponenta brzine u očetnom trenutku je:

$$v_r(0)=\dot r(0)=v_0\sin\alpha_0$$

Dok je cirkularna komponenta brzine u početnom trenutku jednaka:

$$v_c(0)=r_0\dot\varphi_0=(R+h)\dot\varphi_0=v_0\cos\alpha_0$$

te odatle odredjujemo izvod cirkularne koordinate po vremenu u početnom trenutku:

$$\dot\varphi_0=\frac{v_0\cos\alpha_0}{(R+h)}$$

te je sada lako odrediti sektorsku brzinu:

$$2S_0=r_0^2\dot\varphi_0=(R+h)^2\frac{v_0\cos\alpha_0}{(R+h)}=(R+h)v_0\cos\alpha_0=C$$

Kako smo ranije odredili izvod vektora položaja po vremenu, to je sada:

$$\dot r(\varphi_0)=-Cu'(\varphi_0)=v_0\sin\alpha_0=-A\sin\varphi_0+B\cos\varphi_0$$

$$u(\varphi_0)=\frac{1}{R+h}=A\cos\varphi_0+B\sin\varphi_0+\frac{\lambda}{C^2}$$

Prethodni sistem se može napisati u sledećem obliku:

$$-A\sin\varphi_0+B\cos\varphi_0=v_0\sin\alpha_0$$

$$A\cos\varphi_0+B\sin\varphi_0=\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}$$

odakle sledi da je:

$$A=\left[\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right]\cos\varphi_0-v_0\sin\alpha_0\sin\varphi_0=\tilde\varepsilon\frac{\lambda}{C^2}\cos\varphi_0-v_0\sin\alpha_0\sin\varphi_0$$

$$B=\left[\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right]\sin\varphi_0+v_0\sin\alpha_0\cos\varphi_0=\tilde\varepsilon\frac{\lambda}{C^2}\sin\varphi_0+v_0\sin\alpha_0\cos\varphi_0$$

Sada, jednačinu trajektorije (putanje) veštačkog satelita, možemo napisati u sledećem obliku:

$$u(\varphi)=\left[\tilde\varepsilon\frac{\lambda}{C^2}\cos\varphi_0-v_0\sin\alpha_0\sin\varphi_0\right]\cos\varphi+\left[\tilde\varepsilon\frac{\lambda}{C^2}\cos\varphi_0+v_0\sin\alpha_0\cos\varphi_0\right]\sin\varphi+\frac{\lambda}{C^2}$$

$$u(\varphi)=\frac{\lambda}{C^2}\left[1+\tilde\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right]+v_0\sin\alpha_0\sin(\varphi-\varphi_0)$$

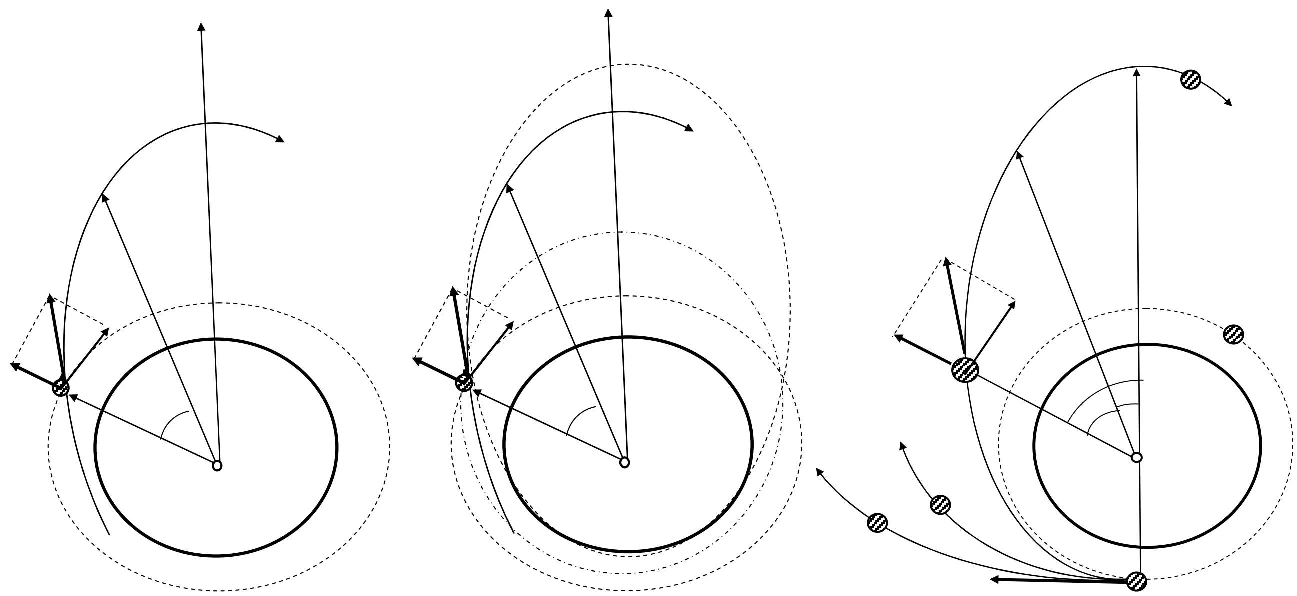
$$r(\varphi)=\frac{p}{\left[1+\tilde{\varepsilon}\cos(\varphi-\varphi_0)\right]+\frac{v_0\sin\alpha_0}{p}\sin(\varphi-\varphi_0)}$$

gde je parametar putanje satelita u polarnim koordinatama

$$p=\frac{C^2}{\lambda}=\frac{(R+h)^2v_0^2\cos^2\alpha_0}{gR^2},$$

jer je: $\lambda=gR^2$, $C=(R+h)v_0\cos\alpha_0$. Kako je

$$\tilde{\varepsilon}=\left[\frac{C^2}{\lambda(R+h)}-1\right]$$ te je sada $$\tilde{\varepsilon}=\left[\frac{(R+h)^2v_0^2\cos^2\alpha_0}{gR^2(R+h)}-1\right]$$



Ova se jednačina trajektorije može transformisati na sledeći oblik:

$$r(\varphi)=\frac{p}{\left[1+\tilde{\varepsilon}\cos(\varphi-\varphi_0)\right]+\tilde{\varepsilon}_1\sin(\varphi-\varphi_0)}$$

gde je $\tilde{\varepsilon}_1=\frac{v_0\sin\alpha_0}{p}$. Ako sada uvedemo nove oznake

$$\varepsilon=\sqrt{\tilde{\varepsilon}^2+\tilde{\varepsilon}_1^2}=\sqrt{\left[\frac{(R+h)^2v_0^2\cos^2\alpha_0}{gR^2(R+h)}-1\right]^2+\frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{p^2}}$$

$$tg\tilde{\varphi}_0=\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}}=\frac{v_0\sin\alpha_0}{p^2\left[\frac{(R+h)^2v_0^2\cos^2\alpha_0}{gR^2(R+h)}-1\right]}$$

to ee jednačina putanje veštačkog satelita dobija u obliku:

$$r(\varphi)=\frac{p}{\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0-\tilde{\varphi}_0)\right]}$$

i takodje je kriva drugog reda – konusni presek i zavisno od vrednosti i znaka parametra ekscentričnosti ε može biti:

* *kada je* $\varepsilon<1$ *to je elipsa,*
* *kada je* $\varepsilon=1$ *to je parabola,*
* *kada je* $\varepsilon>1$ *to je hiperbola,*
* *kada je* $\varepsilon=0$ *te se radi o kružnoj liniji.*

Obrnutim pristupom zadatku, pod pretpostavkom da je poznata putanja tipa konusnog preseka po kojoj se kreće veštački satelit, to pomoću Binet-ovog obrasca moguće je dokazati da je centralna sila, koja proizvodi takvo kretanje obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja veštačkog satelita (materijalne tačke) od centra privlačenja sile, odnosno centra Zemlje. Takodje se može odrediti na osnovu poznate putanje, *kojom btzinom i sa koje visine treba lansirati veštački satelit da bi se kretao po odredjenoj putanji.*

Kako se kretanje veštačkog satelita odvija u polju centralne sile, koja je i konzervativna, pa je i kretanje sistema sa *konstantnom ukupnom energijom*, pa je zato moguće postaviti *relaciju teoreme o održanju ukupne energije sistema kretanja veštačkog satelite*, pa možemo napisati i sledeći iskaz te teoreme:

$$E = \left[E_k + E_p\right]_{r=R+h} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\lambda}{(R+h)} = \frac{mv^2}{2} - \frac{m\lambda}{r}$$

Na osnovu prethodne relacije odredjujemo

$$v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2\lambda}{r} = v_c^2 + v_r^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

odakle je:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\lambda}{r} - \frac{C^2}{r^2}}$$

ili razdvajanjem promenljivih:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\lambda}{r} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

odnosno

$$t - t_0 = \int_{R+h}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\lambda}{r} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

pa time dobijamo zavisnost $r = r(t)$, a iz integrala površine - sektorske brzine možemo odrediti $\dot{\varphi}(t) = \frac{C}{r^2(t)}$, čime smo dobili parametarske jednačine kretanja veštačkog satelita.

Prethodna relacija za kvadrat brzine veštačkog satelita se može napisati i u sledećem obliku:

$$v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2\lambda}{r} = v_c^2 + v_r^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = C^2u'^2 + C^2u^2 = \frac{2E}{m} - 2\lambda u$$

ili u obliku

$$u' = \sqrt{\frac{2E}{mC^2} + \frac{2\lambda u}{C^2} - u^2}$$

ili

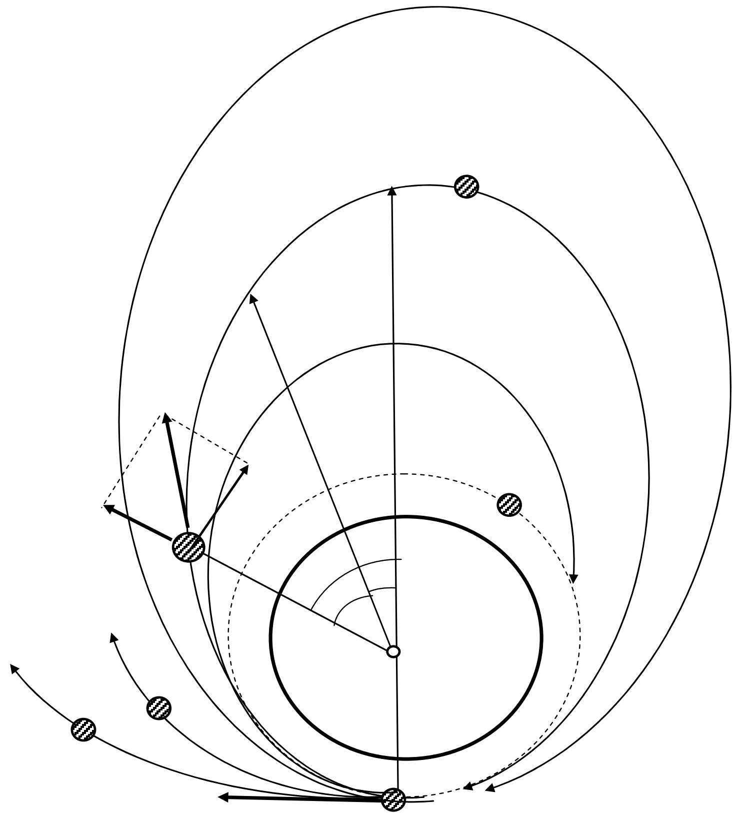
$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2} + \frac{2\lambda u}{C^2} - u^2}}$$

Ili

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0=\frac{1}{R+h}}^{u=\frac{1}{r}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2} + \frac{2\lambda u}{C^2} - u^2}}$$

U ovom prethodnom integralu, podintegralnu funkciju možemo transformisati i napisati isti u sledećem obliku:

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{u_0=\frac{1}{R+h}}^{u=\frac{1}{r}}\frac{d\left(u-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}-\left(u-\frac{\lambda}{C^2}\right)^2}}$$



Ovaj integral nije teško integraliti, te možemo napisati i sledeće:

$$\varphi-\varphi_0=arc\cos\left.\frac{\left(u-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}\right|_{u_0=\frac{1}{R+h}}^{u=\frac{1}{r}}=arc\cos\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}-arc\cos\frac{\left(\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{\lambda}{C^2}+\sqrt{\left(\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}\right)}\cos\left[\varphi-\varphi_0+arc\cos\frac{\left(\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}\right],$$

odakle sledi da je jednačina putanje veštačkog satelita u polarnom sistemu koordinata u obliku:

$$r(\varphi)=\frac{1}{\frac{\lambda}{C^2}+\sqrt{\left(\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}\right)}\cos\left[\varphi-\varphi_0+arc\cos\frac{\left(\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}\right]}$$

Ako uvedemo sledećie oznake: parametar putanje satelita u polarnim koordinatama

$p=\frac{C^2}{\lambda}=\frac{(R+h)^2v_0^2\cos^2\alpha_0}{gR^2}$, jer je: $\lambda=gR^2$, $C=(R+h)v_0\cos\alpha_0$, kao i ekscentricitet

$$\varepsilon = \frac{C^2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}\right)}$$

kao i

$$\widetilde{\varphi}_0 = arc\cos\frac{\left(\frac{1}{R+h}-\frac{\lambda}{C^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}}}$$

odakle sledi da je jednačina putanje veštačkog satelita u polarnom sistemu koordinata u klasičnom obliku krive drugog reda – konusnog preseka:

$$r(\varphi) = \frac{p}{\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0-\widetilde{\varphi}_0)\right]}.$$

Na osnovu izvedenih jednačina kretanja u konačnom obliku korisno je analizirati neke specijalne slučajeve kinetičkih parametara kretanja.

Prvo postavimo pitanje, koliku početnu brzinu treba saopštiti veštačkom satelitu da bi se on kretao po kružnoj putanji oko Zemlje, jer je taj slučaj značajan za praksu upotrebe veštačkih satelita. Da bi putanja bila kružna, pri kretanju materijalne tačke – satelita potrebno je da su kinetički parametri takvi da je ekscentrcitet ε jednak nuli.

$$\varepsilon^2 = \frac{C^4}{\lambda^2}\left(\frac{2E}{mC^2}+\frac{\lambda^2}{C^4}\right) = 0$$

odavde sledi da je:

$$\varepsilon = 0\ , \quad \frac{2E}{mC^2} = -\frac{\lambda^2}{C^4} \qquad E\big|_{\varepsilon=0} = -\frac{m\lambda^2}{2C^2}$$

$$E = \left[E_k + E_p\right]_{r=R+h,\varepsilon=0} = -\frac{m\lambda^2}{2C^2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\lambda}{(R+h)}$$

$$v_0^2 = \frac{2\lambda}{(R+h)} - \frac{\lambda^2}{C^2}$$

Kako je $\lambda = gR^2$ i $C = (R+h)v_0\cos\alpha_0$ to iz uslova da putanja veštačkog satelita bude kružna dobijamo sledeću relaciju:

$$v_0^2 = gR^2\left[\frac{2}{(R+h)} - \frac{gR^2}{(R+h)^2 v_0^2\cos^2\alpha_0}\right]$$

Odnosno bikvadratnu jednačinu po početnoj brzini:

$$\frac{v_0^4}{gR^2} - \frac{2v_0^2}{(R+h)} + \frac{gR^2}{(R+h)^2\cos^2\alpha_0} = 0$$

$$v_0^4 - \frac{2gR^2}{(R+h)}v_0^2 + \frac{g^2R^4}{(R+h)^2\cos^2\alpha_0} = 0$$

koju nije teško rešiti, tako da dobijamo par korena u obliku zavisnosti početne brzine veštačkog satelita u zavisnosti od visine položaja lansiranja veštačkog satelita i ugla pod kojim se lansiranje vrši:

$$v_{0(1,2)}^2 = \frac{gR^2}{(R+h)} \mp \sqrt{\left(\frac{gR^2}{(R+h)}\right)^2 - \frac{g^2R^4}{(R+h)^2\cos^2\alpha_0}}$$

Specijalan slučaj je, kada se lansiranje vrši sa položaja male visine u odnosu na poluprečnik Zemlje i da se lansiranje vrši u horizontalnom pravcu, pa je $R+h \approx R$ i $\alpha_0 = 0$, kada prethodna karakteristična jednačina postaje:

$$v_0^4 - 2gRv_0^2 + g^2R^2 \approx 0$$

te je potrebna brzina $v_{0I} = \sqrt{gR}$. Kako je poluprečnik Zemlje $R = 6370\,[km]$, a $g = 9{,}81\,[m\sec^{-2}]$ to je potrebna brzina za taj slučaj horizontalnog lansiranja $v_{0I} \approx 7{,}9\,[km/h]$. To je prva ***kosmička brzina***.

Drugo, postavimo pitanje, koliku početnu brzinu treba saopštiti veštačkom satelitu da bi se on kretao po paraboličnoj putanji oko lansirnog polažaja na Zemlji ka vasioni, jer je i taj granični slučaj značajan za praksu ispitivanja svemira. Da bi putanja bila parabola, pri kretanju materijalne tačke – satelita potrebno je da su kinetički parametri takvi da je ekscentrcitet ε jednak jedinici.

$$\varepsilon^2 = \frac{C^4}{\lambda^2}\left(\frac{2E}{mC^2} + \frac{\lambda^2}{C^4}\right) = 1$$

odavde sledi da je:

$$\varepsilon = 1, \quad \frac{2E}{mC^2} = \frac{\lambda^2}{C^4} - \frac{\lambda^2}{C^4} \qquad E\big|_{\varepsilon=1} = 0$$

$$E = \left[E_k + E_p\right]_{r=R+h,\varepsilon=1} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\lambda}{(R+h)} = 0$$

$$v_0^2 = \frac{2\lambda}{(R+h)}$$

Kako je $\lambda = gR^2$ i $C = (R+h)v_0\cos\alpha_0$ to iz uslova da putanja veštačkog satelita bude parabola dobijamo sledeću relaciju:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR^2}{(R+h)}}$$

Specijalan slučaj je kada se lansiranje vrši sa položaja male visine u odnosu na poluprečnik Zemlje i da se lansiranje vrši u horizontalnom pravcu, pa je $R+h \approx R$ i $\alpha_0 = 0$ kada prethodna karakteristična brzina postaje $v_{0II} = \sqrt{2gR}$. Kako je poluprečnik Zemlje $R = 6370\,[km]$, a $g = 9{,}81\,[m\sec^{-2}]$, to je potrebna brzina za taj slučaj horizontalnog lansiranja $v_{0II} \approx 11{,}2\,[km/h]$. To je ***druga kosmička brzina***.

Imajući u vidu prethodne analize o karakteru putanje kretanja materijalne tačke pod dejstvom centralne sile opšte gravitacije, možemo zaključiti o granicama pojedinih oblika putanje, koje pripadaju krivama drugog reda, konusnim presecima, kada su u pitanju putanje kretanja veštačkih satelita.

a* Ako je početna brzina lansiranja veštačkog satelita sa Zemlje početnom brzinom paralelnom horizontu i ako je ta brzina manja po intenzitetu od prve kosmičke brzine $v_0 < v_{0I} \approx 7{,}9\,[km/h]$ veštački satelit se vraća na površ Zemlje.

b* Ako je početna brzina lansiranja veštačkog satelita sa Zemlje početnom brziniom paralelnom horizontu i ako je njena brzina po intenzitetu jednaka prvoj kosmičkoj brzini $v_{0I} \approx 7{,}9\,[km/h]$ veštački satelit ce se kretati po kružnoj putanji, oko Zemlje, ne napuštajući tu kružnu putanju.

.**c*** Ako je početna brzina lansiranja veštačkog satelita sa Zemlje početnom brziniom paralelnom horizontu i ako je njena brzina po intenzitetu u opsegu izmedju prve kosmičke brzine $v_{0I} \approx 7{,}9\,[km/h]$ i druge kosmičke brzine $v_{0II} \approx 11{,}2\,[km/h]$, odnosno $v_{0I} < v_0 < v_{0II}$, veštački satelit ce se kretati po eliptičnoj putanji, oko Zemlje, ne napuštajući tu eliptičnu putanju.

.**d*** Ako je početna brzina lansiranja veštačkog satelita sa Zemlje početnom brziniom paralelnom horizontu i ako njena a brzina po intenzitetu veća od druge kosmičke brzine $v_0 > v_{0II} \approx 11{,}2\,[km/h]$, veštački satelit ce se kretati po hiperboličnoj putanji, oko Zemlje, napuštajući po toj hiperboličkoj putanji Zemljino gravitaciobo polje.

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Основи теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - *Воронков* - *Минаков* - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - *Lowry H.* - *Hayden H.* - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - *Л. Люстерник* - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947

Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:
Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί έπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche.
Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Ễléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):
P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.

Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кievъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.