DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

IV. ČETVRTA NEDELJA

Principi mehanike.

Princip ravnoteže. Princip rada. Princip dejstva. Princip prinude. Newton-ovi principi. Primeri.

Teoreme mehanike.

Teorema o promeni impulsa kretanja. Teorema o promeni kinetičke energije. Promena Hamiltonijana. Teorema o promeni mehaničke energije. Teorema o upravljivosti kretanja. Teoreme o optimalnom kretanju upravljivih sistema i optimalnom upravljanju kretanjem. Newton-ovi zakoni.

V. PETA NEDELJA

Stabilnost kretanja i mirovanja.

Kriterijumi stabilnosti.

VI. *ŠESTA NEDELJA*

Dinamika materijalne *tačke*

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke i njihovi integrali, početni uslovi.

Pravolinijsko kretanje materijalne tačke. Vertikalni hitac naviše i naniže. Sila zavisi samo rastojanja: Harmonijsko kretanje. Slobodan pad sa velike visine. Sila zavisi od rastojanja i brzine: Amortizovano kretanje. Sila zavisi od vremena, rastojanja i brzine: Prinudne oscilacije.

Krivolinijsko kretanje materijalne tačke u ravni: Horizontalni i kosi hitac.

VII.1. SEDMA NEDELJA

Konzervativno kretanje. Konzervativne sile. Funkcija sile. Cauchy-Reiman-ovi uslovi. Rad konzervativne sile. Potencijalna energija. Teorema o održanju mehaničke energije. Integral energije. Odredjivanje funkcije sile.

Centralna kretanja. Funkcija sile kod centralnih kretanja. Bineov obrazac. Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanom sistemu koordinata. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VII.2. OSMA NEDELJA

Prinudno kretanje materijalne tačke. Veze. Podela veza. Uslovi za brzinu i ubrzanje. Lagrange-ovi množioci veza. Kretanje materijalne tačke po idealnoj površi. Lagrange-ove jednačine I vrste. Diferencijalne jednačine kretanja u prirodnom sistemu koordinata. Integral energije. Kretanje materijalne tačke po obrtnoj površi. Prinudno kretanje materijalne tačke po liniji. Integral energije. kretanje materijalne tačke po krugu u polju zemljine teže. Dinamika relativnog kretanja materijalne

Teorema o promeni kinetičke energije

Kinetička energija ili ‘’*živa sila*’’ je mera kretanja materijalnog sistema kojm se ispoljava svojstvo transformacije jednog kretanja u drugo, ekvivalentno.

Definicijom 5. smo uveli skalarnu invarijantu dinamike elementarni rad sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke kao skalarni proizvod te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$.

Na sonovu te definicije skalarne invarijante, uveli smo i ukupan rad sile $\vec{F}$ na stvarnom putu - pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke, kao ukupan zbir svih elementarnih radova $dA^{\vec{F}} \overset{def}{=} \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$ ili integral skalarnog proizvoda te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s} = d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku:

$$A^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s dA^{\vec{F}} \stackrel{def}{=} \int_0^s \left(\vec{F}, d\vec{s}\right)$$

Definicijom ***skalarnog odredjenja*** - *skalarne invarijante* - *elementarnog rada sile* $\vec{F}$ *na stvarnom elementarnom pomeranju* $d\vec{s} = d\vec{r}$ *duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* uspostavljena je skalarna veza izmedju sila (aktivne $\vec{F}$, ili reaktivne $\vec{F}_w$ odnosno sile inercije $\vec{I}_F$) i pomeranja duž puta s materijalne tačke m.

Imajući u vidu definiciju sile inercije $\vec{I}_F(t) \stackrel{def}{=} -m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$, kao *vektorske invarijante* i jednog od osnovnih odredjenja dinamike, kao i definiciju rada sile kao *skalarne invarijante* za ***rad sile inercije*** $\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu, pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke, m koja se kreće brzinom $\vec{v}$ odredili smo sledeću relaciju:

$$A^{\vec{I}_F} \stackrel{def}{=} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{I}_F, d\vec{s}\right) = \int_{t_0}^{t} \left(-m\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}dt\right) = -m\int_{\vec{v}_0}^{v} \left(\vec{v}, d\vec{v}\right) = -\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\left(E_k - E_{k0}\right)$$

i time doveli rad sile inercije u veztu sa kinetičkom energijom.

Za rad sile inercije $\vec{I}_F(t)$ na stvarnom putu, pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$, a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli, $v_0 = 0$ izveli smo i sledeću relaciju

$$A^{\vec{I}_F} \stackrel{def}{=} \int_{s_0}^{s} \left(\vec{I}_F, d\vec{s}\right) = \int_{t_0}^{t} \left(-m\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}dt\right) = -m\int_{0}^{v} \left(\vec{v}, d\vec{v}\right) = -\frac{m}{2}v^2 = -E_k$$

*iz koje smo izveli **zaključak**: Rad sile inercije* $\vec{I}_F(t)$ *na stvarnom putu - pomeranju duž putanje* s *kretanja materijalne tačke* m *koja se kreće brzinom* $\vec{v}$, *a u početnom položaju je imala početnu brzinu jednaku nuli,* $v_0 = 0$, *jednak je negativnoj vrednosti njene kinetičke energije* E_k.

*Kinetička energija se naziva i imenom ''**živa sila**''.*

Takodje smo analizirali i izvod po vremenu rada sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ i uveli pojam ***snaga** ili **efekat rada sile,*** koja se iskazuje sledećom matematičkom relacijom:

$$P \stackrel{def}{=} \frac{dA^{\vec{F}}}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

Zaključili smo da je ***snaga** ili **efekat rada sile*** $\vec{F}$ na stvarnom putu - pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$, *i **brzina vršenja rada**, i da je to skalarni proizvod sile* $\vec{F}$ *koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku i brzine* $\vec{v}$ *kretanja te materijalne tačke duž njene putanje.*

Ove definisane skatarne invarijante - definisane pomoću vektorskih invarijanti dinamike, dovoljne su da se definiše *teorema o promeni kinetičke energije po vremenu.*

***Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu materijalne tačke**: Promena kinetičke energije materijalne tačke po vremenu, konstantne mase, koja se kreće brzinom* $\vec{v}$, *i na koju dejstvuje sila* $\vec{F}$, *jednaka je snazi* P *te sile. Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dE_k}{dt} = P \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) = \left(\vec{F}, \sum_{j=1}^{n=3-s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_i\right) = \sum_{j=1}^{j=n=3-s} Q_j \dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j = \left(\vec{F}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \begin{cases} q_i, i = 1,2,3 \text{ (krivolinijski sistem koordinata)} \\ q_i, i = 1,..,n; \quad n = 3-s; \ s < 3 \text{ (sistem generalisanih koordinata)} \end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i=1,2,3$ i dejstvuju na materijalnu tačku. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo kordinate položaja materijalne tačke u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima 3, q_i, $i=1,2,3$, ili su to nezavisne koordinate pokretne materijalne tačke kada ih ima $n=3-s$, q_i, $i=1,..,n(=3-s)$, gde je $s<3$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na tu pokretnu tačku. Ako je pokretna materijalna tačka slobodna, onda ima tri generalisane coordinate q_i, $i=1,2,3$ i tri generalisane sile Q_i, $i=1,2,3$, ili u slučaju kada nije slobodna već je podvrgnuta vezama i tada postoje dve ili jedna generalisana sila zavisno da li je podvrgnuta jednoj ili dvema vezama (prinudno kretanje po površi odnosno liniji) kada ima dva stepena slobode kretanja (prinudno kretanje po površi, q_i i Q_i, za $i=1,2$), odnosno, jedan stepen slobode kretanja (prinudno kretanje po liniji, q_1 i Q_1,).

Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu sistema materijalnih tačaka: *Promena kinetičke energije sistema materijalnih tađaka po vremenu, konstantnih masa, koje se kreću brzimana $\vec{v}_i$ na koje dejstvuju sile $\vec{F}_i$ jednaka je snazi P tih sila. Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dE_k}{dt}=P\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{N}\frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\sum_{j=1}^{n=3N-s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_i\right)=\sum_{j=1}^{j=n=3N-s}Q_j\dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right),\ \begin{cases} q_i\,, i=1,2,3,...,3N \text{ (krivolinijski sistem koordinata)} \\ q_i\,, i=1,2,3,...,n; \quad n=3N-s \text{ (sistem generalisanih koordinata)}\end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i=1,2,3,...,3N$ i dejstvuju na materijalnu tačku. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo kordinate položaja materijalnih tačaka u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima $3N$, q_i, $i=1,2,3,...,3N$, ili su to nezavisne koordinate pokretnog sistema pokretnih materijalnih tačaka, kada ih ima $n=3N-s$, q_i, $i=1,..,n(=3N-s)$, gde je $s<3N$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na taj sistem ili pojedinačno na neku njegovu pokretnu materijalnu tačku. Analizu bi smo ri tome sproveli na sledeći način: Prvo bi smo analizirali broj stepeni slobode kretanja svake materijalne tačke sadržane u sistemu pojedinačno, a zatim svake u odnosu na svaku drugu iy sistema. Na osnovu toga bi smo zaključili koliki je minimalno potreban minimalni broj $n=3N-s$ nezavisnih koordinata q_i, $i=1,..,n$ da potpuno odredo jednoznačno položaj svake pokretne materijalne tačke materijalnog sistema u tom krivolinijskom sistemu koordinata. Sistem generalisanih koordinata (nezavisnih) može biti izabran i u Descartes-ovom sistemu koordinata. Naprrimer, analizu bi smo počeli sa pojedinačnim materijalnim tačkama. Ako je pokretna materijalna tačka u tom sistemu slobodna, onda ona ima tri generalisane coordinate q_i, $i=1,2,3$ i tri generalisane sile Q_i, $i=1,2,3$, ili u slučaju kada nije slobodna već je podvrgnuta vezama i tada postoje dve ili jedna generalisana sila zavisno da li je podvrgnuta jednoj ili dvema vezama (prinudno kretanje po površi odnosno liniji) kada ima dva stepena slobode kretanja (prinudno kretanje po površi, q_i i Q_i, za $i=1,2$), odnosno, jedan stepen slobode kretanja (prinudno kretanje po liniji, q_1 i Q_1,). Zatim se sabere broj tako dobijenih nezavisnih koordinata, pa se od tog zbira oduzme broj koji odgovara broju medjuveza izmedju tih materijalnih tačaka i koordinata.analiziraju veze izmedju. Kao rezultat se dobija broj $n=3N-s$ nezavisnih koordinata, koje nazivamo *generalisanim koordinatama* pokretnog materijalnog sistema q_i, $i=1,..,n(=3N-s)$, gde je $s<3N$ ukupan broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na taj sistem ili pojedinačno na neku njegovu pokretnu materijalnu tačku. Broj generalisanih sila Q_i, $i=1,..,n$ koje dejstvuju na mehanički sistem materijalnih tačaka je jednak broju generalisanih koordinata $n=3N-s$.

Dokaz ovih teorema se može izvesti pomoću principa dinamičke ravnoteže

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \vec{F}_{wN} + \vec{F}_{wT} = 0$$

Ne gubeći opštost postavljanja dokaza teoreme o promeni kinetičke energije po vremenu polazimo od vektorske relacije iskaza principa dinamičke ravnoteže u jednostavnijem obliku za slobornu materijalnu tačku

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} = 0$$

Skalarnim množenjem prethodne vektorske relacije brzinom $\vec{v}$ materijalne tačke dobijamo

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}, \vec{v}\right) = 0$$

odakle sledi:

$$-\frac{d\left(m\frac{v^2}{2}\right)}{dt} + \left(\vec{F}, \vec{v}\right) = 0$$

Kako je po definiciji kinetička energija $E_k \stackrel{def}{=} m\frac{v^2}{2}$, to sledi relacija

$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) = \sum_{j=1}^{j=n=3-s} Q_j \dot{q}_j$$

što je trebalo i dokazati.

Kada materijalna tačka nije slobodna onda prethodna relacija uključuje i sile otpora veza:

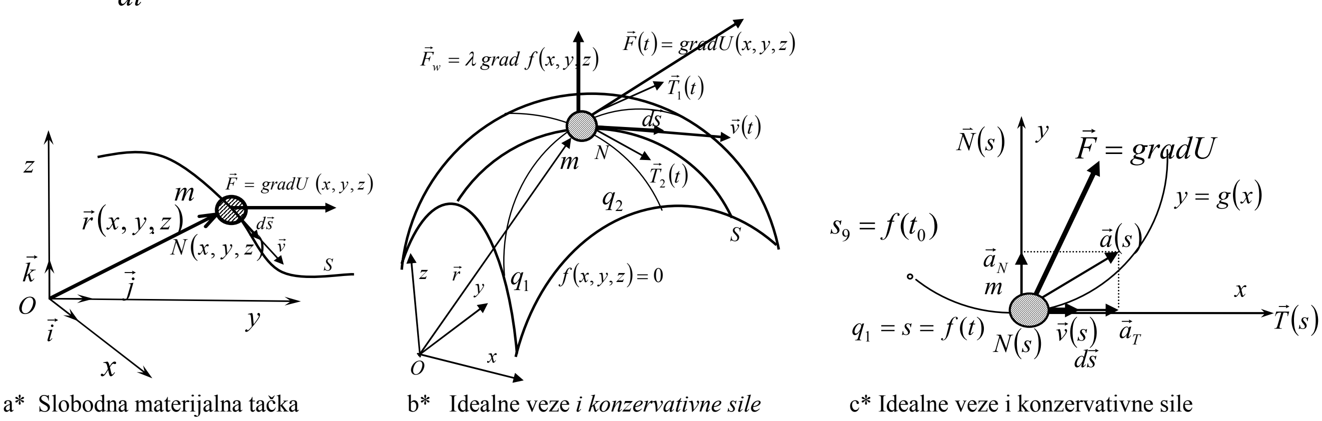
$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wT}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wN}, \vec{v}\right) = \sum_{j=1}^{j=n=3-s} Q_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{j=n=3-s} Q_{wNj} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{j=n=3-s} Q_{wTj} \dot{q}_j$$

U zaključku možemo teoremu o promeni kinetičke energije da formuliđemo na sledeći način:
Prvi izvod kinetičke energije mehaničkog sistema jednak je snazi sila koje na njega dejstvuju.

Teorema o održanju mehaničke energije pokretne materijalne tačke

Kada materijalna tačka nije slobodna relacija teoreme o promeni kinetičke energije je oblika:

$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wT}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wN}, \vec{v}\right)$$



a* Slobodna materijalna tačka *i dejstvo konzervativne sile* b* Idealne veze *i konzervativne sile na materijalnu tačku dejstvuje jedna veza* c* Idealne veze i konzervativne sile *na materijalnu tačku dejstvuju dve veze*

Slika*. Razni slučajevi kretanja materijalne tačke u polju konzervativnih sila – slobodna od dejstva veza i pod dejstvom jedne (površ) i dve stacionarne geometrijske veze (linija)*

Sada prelazimo na analizu svakog od članova na desnoj strani prethodne relacije. Zato pretpostavimo da:

* aktivne sile $\vec{F}$ koje dejstvuju na materijalnu tačku imaju funkciju sile $U(x,y,z)$ i da se mogu izraziti kao gradijent te skalarne funkcije u obliku:

$$\vec{F} = grad\,U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

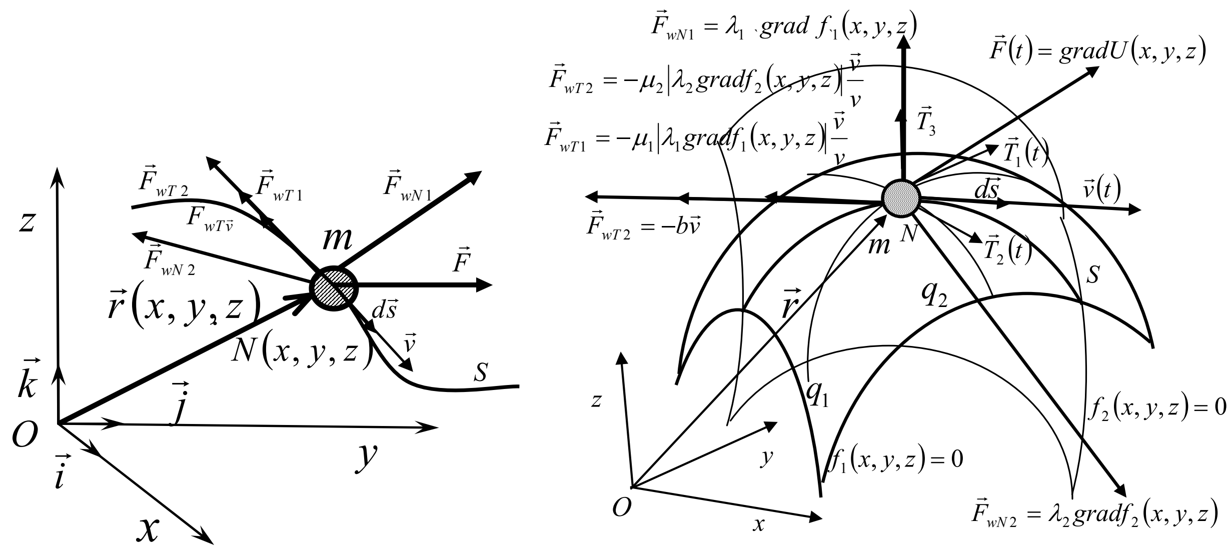
pa je *snaga* te sile pri njenom dejstvu na materijalnu tačku ili *brzina vršenja rada* jednaka

$$P^{\vec{F}} = (\vec{F},\vec{v}) = (\vec{v}, grad\,U(x,y,z)) = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$$

* na materijalnu tačku dejstvuju dve stacionarne geometrijske veze $f_1(x.y.z)=0$ i $f_2(x.y.z)=0$ usled čega se javljaju sile otpora $\vec{F}_{wN1}$ i $\vec{F}_{wN2}$ u pravcu normala na površi veza oblika:

$$\vec{F}_{wN1} = \lambda_1 grad\ f_1(x,y,z) = \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{F}_{wN2} = \lambda_2 grad\ f_2(x,y,z) = \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}\right)$$



Slika. *Kretanje materijalne tačke po hrapavoj liniji (na materijalnu tačku dejstvuju dve neidealne veze) u polju konzervativnih sila i sredini u kojoj se javlja otpor kretanju lineano proporcionalan brzini kretanja materijalne tačke*

gde su λ_1 i λ_2 Lagrangeovi množioci veza, pa je *snaga* tih sila otpora veza pri dejstvu veza na materijalnu tačku ili *brzina vršenja rada* jednaka nuli

$$P^{\vec{F}_{wN1}} = \lambda_1(\vec{v},\vec{F}_{wN1}) = \lambda_1(\vec{v}, grad\ f_1(x,y,z)) = \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\dot{z}\right) = 0$$

$$P^{\vec{F}_{wN2}} = \lambda_2(\vec{v},\vec{F}_{wN2}) = \lambda_2(\vec{v}, grad\ f_2(x,y,z)) = \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\dot{z}\right) = 0$$

što sledi iz uslova ortogonalsnosti brzina i gradijenta na površi odredjene stacionarnim geometrijskim vezama..

* na materijalnu tačku dejstvuju dve stacionarne geometrijske neidelane veze $f_1(x.y.z)=0$ i $f_2(x.y.z)=0$ usled čega se javljaju pored dveju normalnih komponenti $\vec{F}_{wN1}$ i $\vec{F}_{wN2}$ i dve tangencijalne komponente sila otpora veza $\vec{F}_{wT1}$ i $\vec{F}_{wT2}$. Ako pretpostavimo da su te tangencijalne komponete tipa sila trenja usled dejstva neidealnih veza granične vrednosti veličine suvog trenja pri mirovanju $\vec{F}_{wT1}$ i $\vec{F}_{wT2}$ proporcionalne veličini sile odgovarajućeg normalnog otpora (pritiska) veze $\vec{F}_{wN1}$, odnosno, $\vec{F}_{wN2}$

izmedju materijalne tačke (tela) i hrapave površi veze i koeficijenta trenja klizanja i mirovanja $\mu_i, i = 1,2$, koji je bezdimenzioni broj:

$$\vec{F}_{wT1} = -\mu_1 F_{wN1}\frac{\vec{v}}{v} = -\mu_1 \left|\lambda_1 \ grad\ f_1(x,y,z)\right|\frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{F}_{wT2} = -\mu_2 F_{wN2}\frac{\vec{v}}{v} = -\mu_2 \left|\lambda_2 \ grad\ f_2(x,y,z)\right|\frac{\vec{v}}{v}$$

pa je *snaga* tih tangencijalnih komponenti sila otpota neidealnih veza pri dejstvu veza na materijalnu tačku ili *brzina vršenja rada, pojedinačno* jednaka

$$P^{\vec{F}_{wT1}} = \left(\vec{v}, \vec{F}_{wT1}\right) = -\mu_1 F_{wN1}\frac{(\vec{v},\vec{v})}{v} = -\mu_1\left|\lambda_1 \ grad\ f_1(x,y,z)\right| v < 0$$

$$P^{\vec{F}_{wT2}} = \left(\vec{v}, \vec{F}_{wT2}\right) = -\mu_2 F_{wN2}\frac{(\vec{v},\vec{v})}{v} = -\mu_2\left|\lambda_2 \ grad\ f_2(x,y,z)\right| v < 0$$

* sila otpora sredine kretanju materijalne tačke zavisi linearno proporcionalno od brzine u obliku $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$,

i da ima Relijevu funkciju rasipanja $\Phi(\vec{v})$ u obliku:

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{1}{2}b(\vec{v},\vec{v}) = \frac{1}{2}bv^2 .$$

Rad sile otpora proporcionalne brzini $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$, na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ u jedinici vremena je jednak dvostrukoj vrednosti Relijeve funkcije rasipanja sa negativnim znakom ili matematičkom relacijom opisano, kao:

$$\frac{dA^{\vec{F}_{wT}}}{dt} = -2\Phi(\vec{v}) < 0$$

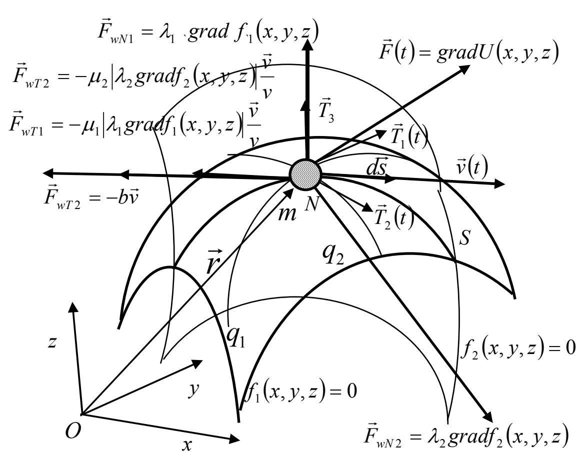
i predstavlja snagu sile otpora proporcionalne brzini $\vec{F}_{wT} - b\vec{v}$.

Možemo da zaključimo da *snaga aktivnih sila može biti ili pozitivna ili negativna, a da je snaga reaktivnih (otpornih) sila negativna*.

Sada, kada materijalna tačka nije slobodna, na osnovu relacija teoreme o promeni kinetičke energije, a uzimajući u obzir prethodnu analizu o snazi aktivnih sila i sila veze, koje dejstvuju na materijalnu tačku možemo da napišemo::

$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F},\vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wT},\vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wN},\vec{v}\right)$$

$$\frac{dE_k}{dt} = P = P^{\vec{F}} + P^{\vec{F}_{wN1}} + P^{\vec{F}_{wN2}} + P^{\vec{F}_{wT1}} + P^{\vec{F}_{wT2}} + P^{\vec{F}_{wT}}$$



Slika. *Kretanje materijalne tačke po hrapavoj liniji (na materijalnu tačku dejstvuju dve neidealne veze) u polju konzervativnih sila i sredini u kojoj se javlja otpor kretanju lineano proporcionalan brzini kretanja materijalne tačke*

Odnosno

$$\frac{dE_k}{dt}=\frac{dU}{dt}-2\Phi(\vec{v})-\mu_1|\lambda_1\ grad\ f_1(x,y,z)|v--\mu_2|\lambda_2\ grad\ f_2(x,y,z)|v$$

ili:

$$\frac{dE_k}{dt}+\frac{dE_p}{dt}=-2\Phi(\vec{v})-\mu_1|\lambda_1\ grad\ f_1(x,y,z)|v--\mu_2|\lambda_2\ grad\ f_2(x,y,z)|v$$

gde je $E=E_k+E_p$ ukupna energija sistema u stanju kretanja materijalne tačke, koja uključuje dejstvo konzervativnih sila. Na osnovu poslednje relacije možemo da formulišemo iskaz *teoreme o promeni ukupne energije proučavanog sistema* - jedne pokretne materijalne tačke podvrgnute dvema vezama, pomoću sledeće relacije:

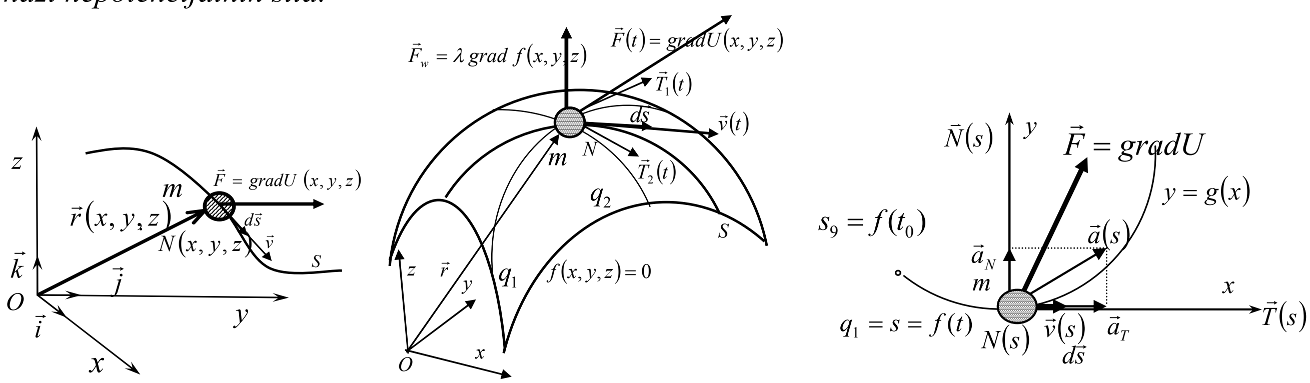
$$\frac{dE}{dt}=\frac{d(E_k+E_p)}{dt}=-2\Phi(\vec{v})-\mu_1|\lambda_1\ grad\ f_1(x,y,z)|v--\mu_2|\lambda_2\ grad\ f_2(x,y,z)|v$$

Teorema o promeni ukupne energije pokretne materijalne tačke u prisustvu konzervativnih sila, neidealnih veza i otpora sredine: *Promena ukupne energije pokretne materijalne tačke po vremenu, konstantne mase, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ na koju dejstvuje sila $\vec{F}$ koja ima funkciju sile i na koju dejstvuju neidealne hrapave veze i otpor sredine, koji ima funkciju rasipanja $\Phi(\vec{v})$ jednaka je zbiru negativne dvostruke vrednosti funkcije rasipanja i snaga otpornih sila hrapavih veza.*

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d(E_k+E_p)}{dt}=-2\Phi(\vec{v})-\mu_1|\lambda_1\ grad\ f_1(x,y,z)|v--\mu_2|\lambda_2\ grad\ f_2(x,y,z)|v$$

Ovu relaciju možemo opisati i sledećom ***teoremom****:*

Promena po vremenu potpune mehaničke energije sistema sa konstantnim masama jednaka je snazi nepotencijalnih sila.

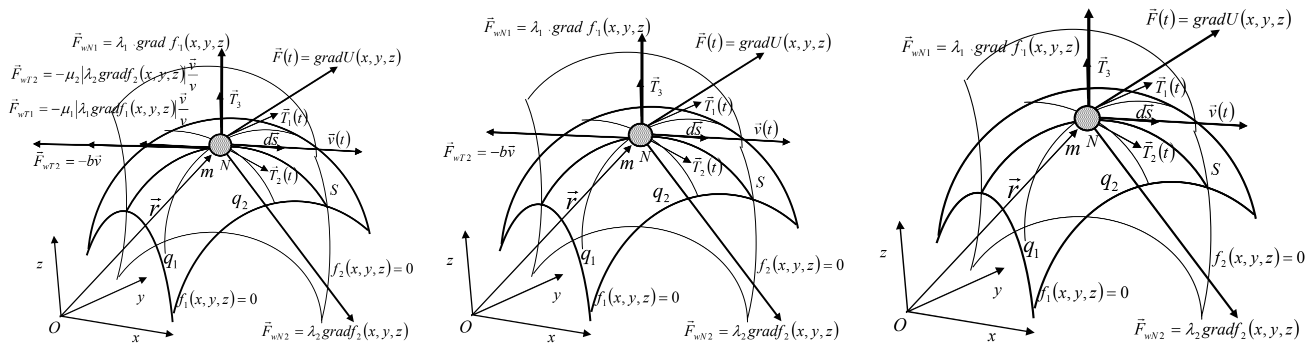


a* Slobodna materijalna tačka *i dejstvo konzervativne sile*   b* Idealne veze *i konzervativne sile na materijalnu tačku dejstvuje jedna veza*   c* Idealne veze i konzervativne sile *na materijalnu tačku dejstvuju dve veze*

Slika*. Razni slučajevi kretanja materijalne tačke u polju konzervativnih sila – slobodna od dejstva veza i pod dejstvom jedne (površ) i dve stacionarne geometrijske veze (linija)*

Teorema o promeni ukupne energije pokretne materijalne tačke u prisustvu konzervativnih sila, idealnih veza i otpora sredine: *Promena ukupne energije pokretne materijalne tačke po vremenu, konstantne mase, koje se kreće brzinom $\vec{v}$ na koju dejstvuje sila $\vec{F}$ koja ima funkciju sile i na koju dejstvuju idealne veze i otpor sredine koji ima funkciju rasipanja jednaka je negativnoj dvostrukpj vrednosti funkcije rasipanja. Tada je funkcija rasipanja mera opadanja ukupne energije sistema.*

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d(E_k+E_p)}{dt}=-2\Phi(\vec{v})$$



a* Neidelne hrapave veze i otpor srtedine *i konzervativne sile*   b* Idealne veze i otpor srtedine *i konzervativne sile*   c* Idealne veze i konzervativne sile

***Slika**. Kretanje materijalne tačke po liniji – na materijalnu tačku dejstvuju dve veze*

Teorema o promeni ukupne energije pokretne materijalne tačke u prisustvu konzervativnih sila i idealnih veza: *Promena ukupne energije pokretne materijalne tačke po vremenu, konstantne mase, koje se kreće brzinom* $\vec{v}$ *na koju dejstvuje sila* $\vec{F}$ *koja ima funkciju sile i na koju dejstvuju idealne veze i nema otpora srdeine jednaka je nuli..*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\left(E_k + E_p\right)}{dt} = 0$$

Tada je ukupna energije sistema konstantna.

$$E = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = E_0 = const$$

Za takav system kažemo da je konzervativan sa idealnim stacionarnim holonomnim vezama. Poslednja relacija predstavlja i integral energije ili ''žive sile''.

Znači da je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan. Poslednja relacija je relacija teoreme o održanju (konzervacxiji) ukupne mehaničke energije energije sistema.

Kada se kretanje materijalne tačke vrši pod uticajem sile koja ima funkciju sile tada je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan.

*Iz izvedenih teorema vidimo da u slučaju kada na materijalnu tačku dejstvuju sile koje nemaju funkciju sile (potencijal**) teorema o održanju ukupne mehaničke energije pokretne materijalne tačke ne važi**, već se javlja opadanje ukupne mehaničke energije sistema, odnosno degradacija ukupne mehaničke energije sistema. Kako teorema o održanju energije izražava opšte svojstvo prirode o održanju ukupne energije to znači da će degradacija - opadanje mehaničke energije sistema proizvesti druge oblike energije, naprimer toplotnu u prisustvu snage sila trenja - otpora hrapavih neidelanih veza.*

Iz relacije o promeni kinetičke energije

$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wT}, \vec{v}\right) + \left(\vec{F}_{wN}, \vec{v}\right)$$

možemo da napiđemo:

$$dE_k = Pdt = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)dt + \left(\vec{F}_{wT}, \vec{v}\right)dt + \left(\vec{F}_{wN}, \vec{v}\right)dt$$

ili

$$dE_k = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) + \left(\vec{F}_{wT}, d\vec{r}\right) + \left(\vec{F}_{wN}, d\vec{r}\right)$$

po integraljenju poslednje relacije dobijamo:

$$E_k - E_{k0} = \sum_{i=1}^{M} A^{\vec{F}_i}$$

ili

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{M} A^{\vec{F}_i}$$

Ove dve poslednje relacije predstavljaju ***teoremu o promeni kinetičke energije pokretne materijalne tačke u konačnom intervalu vremena.***

Priraštaj kinetičke energije pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju iz jednog položaja u drugi, na konačnom rastojanju duž njene putanje, jednak je algebarskom zbiru svih radova svih sila, aktivnih i reaktivnih, koje one izvrše duž puta koji pri tome predje materijalna tačka.
Ako je zbir svih radova sila, aktivnih i reaktivnih, koje one izvrše duž puta koji pri tome predje materijalna tačka njena kinetička energija će se povećati, i obrnuto, ako je ukupan rad negativan kinetička energija će se smanjiti, a to zavisi od svojstava sila koje na istu dejstvuju.

Konzervativne sile

Kretanje materijalne tačke pod dejstvom sila koje imaju funkciju sile odvija se sa konstantnom mehaničkom energijom jednakom mehaničkoj energiji, koju je ona imala u početnom trenutku kretanja. To znači da za kretanje te materijalne tačke vazi ***teorema o održanju (konzervaciji) ukupne mehaničke energije*** *i da je takvo kretanje* ***konzervativno.***

Pokazali smo da je za taj slučaj ukupna mehanička energija sistema konstantna.

$$E = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = E_0 = const$$

Za takav sistem kažemo da je konzervativan sa idealnim stacionarnim holonomnim vezama.
Takodje smo pokazali da sile koje proizvode takva kretanja imaju ***funkciju sile*** *i one se nazivaju* ***konzervativnim silama****.*

Konzervativna sila $\vec{F}$ koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku ima funkciju sile $U(x, y, z)$ i može da se odredi kao gradijent te skalarne funkcije u obliku:

$$\vec{F} = grad\,U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

što znači da su njene Descartes-ove koordinate:

$$X = \frac{\partial U(x.y.z)}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U(x.y.z)}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U(x.y.z)}{\partial z}$$

Ako poznajemo funkciju sile $U(x, y, z)$ lako je prema prethodnim relacijama odrediti Descartes-ove koordinate sile X, Y i Z.

Obrnuti zadatak je nešto složeniji. Ako poznajemo Descartes-ove koordinate sile X, Y i Z, a potrebno je odrediti funkciju sile, kao prvo potrebno je proveriti da li koordinate X, Y i Z zadovoljavaju uslov da je sila konzervativna, odnosno da ima funkciju sile. Taj uslov ćemo dobiti diferenciranjem koordinata konzervativne sile po koordinatama x, y i z i uporediti dobijene izvode. Diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x.y.z)}{\partial z \partial y}$$

Uporedjivanjem prethodno dobijenih parcijalnih izvoda, vidimo da koordinte konzervativne sile, koja ima funkciju sile moraju zadovoljavati sledeće uslove:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}$$

Ovi uslovi su poznati kao uslovi egzistencije totalnog diferencijala, a nazivaju se i još Cauchy-Reiman-ovi uslovi.

U vektorskom obliku ti uslovi se mogu izraziti i pomoću rotora konzervativne sile koji mora biti jednak nuli, a taj uslov iskazujemo na sledeći način:

$$rot\,\vec{F} = \left(\nabla, \vec{F}\right) = \left(\nabla, grad\,U(x, y, z)\right) = \left(\nabla, \nabla U\right) - rot\,grad U(x, y, z) = 0$$

tj.

$$rot\,\vec{F} = \left(\nabla, \vec{F}\right) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

Odakle slede uslovi koje smo dobili uporedjivanjem parcijalnih izvoda po koordinatama.

Naprimer ako su koordinate sile funkcije samo od po jedne koordinate, naprimer $X(x)$, $Y(y)$ i $Z(z)$ zadovoljeni su prethodni uslovi, pa je sila sa takvim koorinatama konzervativna i ima funkciju sile.

Kada su poznate koordinate sile $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ i $Z(x,y,z)$,kao funkcije položaja odredjenog koordinatama x, y i z pokretne materijalne tačke možemo integraljenjem odrediti funkciju sile $U(x,y,z)$, kao i potencijalnu funkciju (potencijal) $\Pi(x,y,z) = -U(x,y,z)$.

Polazimo od sledećih relacija za coordinate konzervativne sile:

$$\frac{\partial U(x.y.z)}{\partial x} = X(x.y.z) \qquad \frac{\partial U(x.y.z)}{\partial y} = Y(x.y.z) \qquad \frac{\partial U(x.y.z)}{\partial z} = Z(x.y.z)$$

Iz prve relacije integraljenjem po x dobijamo:

$$U(x.y.z) = \int_{x_0}^{x} X(x.y.z)dx + \varphi(y,z) = f(x,y,z) + \varphi(y,z)$$

gde je $\varphi(y,z)$ nepoznata funkcija, koju treba odrediti. Zbog uslova konzervativnosti lako se dokazuje da ta funkcija ne zavisi od koordinate x, jer je:

$$\frac{\partial U(x.y.z)}{\partial y} = Y(x.y.z) = \frac{\partial f(x.y.z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y.z)}{\partial y}$$

Zatim integraljenjem po y iz prethodne parcijalne diferencijalne jednačine dobijamo nepoznatu funkciju $\varphi(y,z)$:

$$\varphi(y,z) = \int_{y_0}^{y} \left[Y(x.y.z) - \frac{\partial f(x.y.z)}{\partial y} \right] dy + \vartheta(z) = f_1(y,z) + \vartheta(z)$$

Sada je

$$U(x.y.z) = \int_{x_0}^{x} X(x.y.z)dx + \int_{y_0}^{y} \left[Y(x.y.z) - \frac{\partial f(x.y.z)}{\partial y} \right] dy + \vartheta(z) = f(x,y,z) + f_1(y,z) + \vartheta(z)$$

gde je $\vartheta(z)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti. Zbog uslova konzervativnosti lako se dokazuje da ta funkcija ne zavisi od koordinata x i y.

$$\frac{\partial U(x.y.z)}{\partial z} = Z(x.y.z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} + \frac{d\vartheta(z)}{dz}$$

Zatim integraljenjem po z iz prethodne diferencijalne jednačine dobijamo nepoznatu funkciju $\vartheta(z)$ u sledećem obliku:

$$\vartheta(z) = \int_{z_9}^{z} \left(Z(x.y.z) - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} \right) dz + C$$

gde je C nepoznata integraciona konstanta

Sada traženu funkciju sile $U(x,y,z)$ možemo da napišemo u sledećem obliku::

$$U(x.y.z) = \int_{x_0}^{x} X(x.y.z)dx + \int_{y_0}^{y} \left[Y(x.y.z) - \frac{\partial f(x.y.z)}{\partial y} \right] dy + \int_{z_9}^{z} \left(Z(x.y.z) - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} \right) dz + C$$

Konzervativna sila $\vec{F} = grad\,U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ se može dovesti u vezu sa skalarnim poljem funkcije sile $U(x,y,z)$. Poznata je osobina gradijenta neke funkcije da taj vektor pada u pravac normale na tangentnu ravan ekviskalarnu površ funkcije sile $U(x,y,z) = const$ u posmatranoj tački prostora $N(x,y,z)$ i da je usmerena u pravcu porasta skalara (opadanja potencijala) i ima intenzitet jednak intenzitetu gradijenta odnosno izvodu skalarne funkcije $U(x,y,z)$ u pravcu normale na ekviskalarnu površ. Na osnovu toga se može napisati da je:

$$F = |\vec{F}| = |grad\,U(x,y,z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \frac{dU}{d\vec{n}}$$

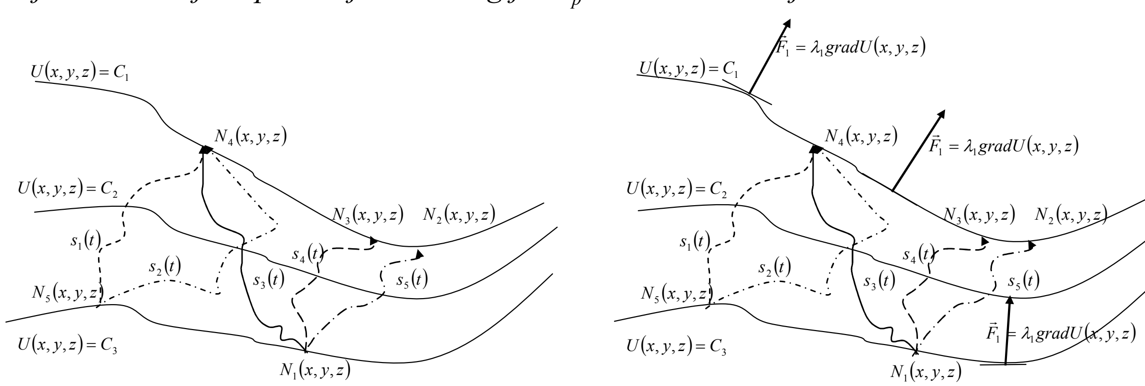
Projekcija sile na pravac tangente putanje kretanja materijalne tačke biće:

$$F_T = (\vec{F},\vec{T}) = (\vec{T}, grad\,U(x,y,z)) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(grad\,U(x,y,z), d\vec{r})}{|d\vec{r}|} = \frac{dU}{dr}$$

Kao što smo već ranije analizirali orilikom formulisanja principa rada za sve sile koje imaju funkciju sile $U(\vec{r})$ ili $U(x,y,z)$ možemo da napišemo da je sila $\vec{F}(\vec{r})$ ili $\vec{F}(x,y,z)$ gradijent te skalarne funkcije u obliku $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$, a kako je: $(\vec{F}, d\vec{s}) = (gradU, d\vec{r}) = dU$ to je rad te sile na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom $\vec{v}$:

$$\int_{s_0}^{s}(\vec{F}, d\vec{s}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}(gradU, d\vec{r}) = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 = -E_p$$

Iz poslednje relacije sledi ***zaključak****: Rad sile* $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$, koja ima funkciju sile $U(\vec{r})$, *na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m koja se kreće brzinom* $\vec{v}$ *, jednak negativnoj vrednosti njene potencijalne energije* E_p *sa tačnošću do jedne aditivne konstante.*



Slika. E#kviskalarne površi polja konzervativnih sila $U(x,y,z) = C_i$. Rad konzervativne sile $\vec{F} = grad\,U(\vec{r})$ ne zavisi od oblika putanje i puta prelsaka materijalne tačke iz jednog položaja u drugi, već od potencijala sile u početnoj i krajnjoj tački dela puta na kome se odredjuje rad te sile.

Iz relacije rada konzervativne sile zaključujemo da rad konzervativne sile ne zavisi od oblika putanje $s_i(t)$ koja spaja dve tačke-dva položaja materijalne tačke, već samo od njihovih položaja i razlike funkcija sile u tum tačkama. Rad konzervativne sile se ne menja kada se materijalna tačka pomera po ekviskalarnoj površi funkcije sile, već samo kada predje s jedne na drugu. Takodje ako je putanja zatvorena, rad konzervativne sile se ne menja. U slučaju kada je putanja materijalne tačke zatvorena kriva, onda se krivolinijski integral može pretvoriti u površinski pa možemo da napiđemo:

$$A^{\vec{F}=gradU} = \Gamma = \oint_L(\vec{F}, d\vec{s}) = \oint_L(gradU, d\vec{r}) = \int(d\vec{A}, rot\,\vec{F})$$

Ovaj integral predstavlja cirkulaciju i za slučaj konzervativne sile je jednak nuli, ali za slučaj da funkcija sile ima singularitet može biti I različit od nule.

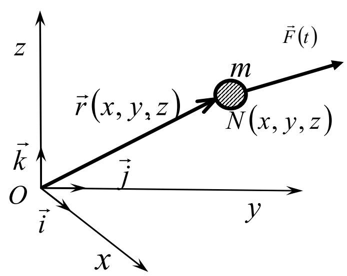
Klasa konzervativnih sila je najznačajnika u klasičnoj mehanici. Ovoj klasi pripadaju sila teže, Njutnova gravitaciona sila, sila srazmerna rasžtojanju I druge.

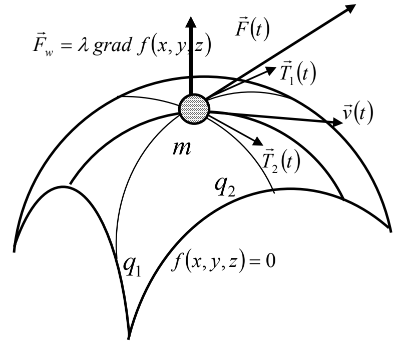
Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke i njihovi integrali, početni uslovi.

Iz principa dinamičke ravnoteže za slobodnu materijalnu (dinamičku) tačku vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)+\vec{F}=0$$

gde je $\vec{F}(t)$ zbir svuh aktivnih sila koje dejstvuju na slobodnu pokretnu materijalnu tačku.





Iz principa dinamičke ravnoteže za materijalnu (dinamičku) tačku, podvrgnutu dejstvu jedne geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f(x,y,z)=0$, vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)+\vec{F}+\lambda\, grad\, f(x,y,z)=0 \qquad \text{uz uslov} \qquad (\vec{v}(t), grad\, f(x,y,z))=0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze $(\vec{v}(t), grad\, f(x,y,z))=0$, jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w=\lambda\, grad\, f(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Iz principa dinamičke ravnoteže za materijalnu (dinamičku) tačku, podvrgnutu dejstvu dveju geometrijskih, skleronomnih idealnih veza oblika $f_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$ vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)+\vec{F}+\lambda_1\, grad\, f_1(x,y,z)+\lambda_2\, grad\, f_2(x,y,z)=0\ ,\ (\vec{v}(t), grad\, f_i(x,y,z))=0\ , i=1,2\ ,$$

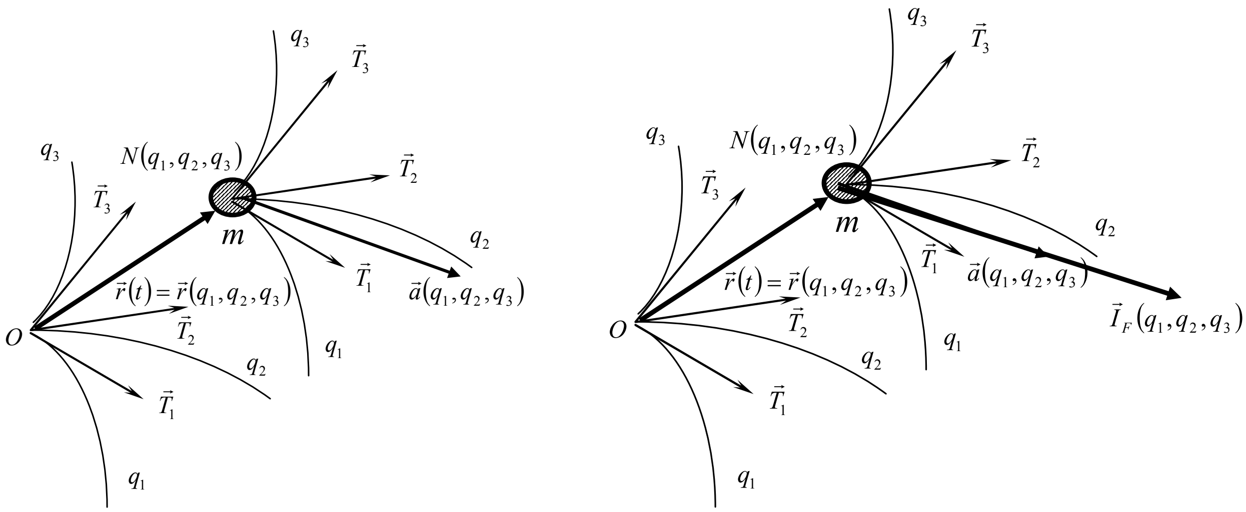
gde λ_i, $i=1,2$ nepoznati Lagrange-ovi množioci veza $f_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$,a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze $(\vec{v}(t), grad\, f_i(x,y,z))=0$, $i=1,2$, jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_{wi}=\lambda_i\, grad\, f_i(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze i to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Ubrzanje materijalne tačke $N(q_1,q_2,q_3)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata (q_1,q_2,q_3) je:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{3}a_i\vec{T}_i\ ,$$

gde su a_i projekcije vektora ubrzanja u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordunata

$$a_i = \frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial q_i}\right].$$



***Sila inercije** $\vec{I}_F(t)$ **materijalne tačke** $N(q_1,q_2,q_3)$, **mase** m, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u generalisanom istemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata q_1,q_2,q_3 je:*

$$\vec{I}_F(t) = -m\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{T}_i = -\sum_{u=1}^{3} I_{F,i}\vec{T}_i$$

$$I_{F,i} = -\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right] = -\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right], \quad i = 1,2,3$$

gde je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ kinetička energija materijalne tačke.

Vektorska jednačina dinamičke ravnoteže (kretanja) pokretne slobodne materijalne tačke $N(q_1,q_2,q_3)$, ***mase** m, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t, odredjen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata q_1,q_2,q_3 je:*

$$\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]\right)\vec{T}_i + \vec{F} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right]\right\}\vec{T}_i + \vec{F} = 0$$

ili u skalarnom obliku:

$$\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right] = \left(\vec{F},\vec{T}_i\right) = \widetilde{Q}_i$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]=A_i\,\widetilde{Q}_i$$

Vektorska jednačina dinamičke ravnoteže pokretne materijalne tačke $N(q_1,q_2,q_3)$***, mase*** m*,* na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(q_1,q_2,q_3)=0$, *u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata* q_1,q_2,q_3 *je:*

$$\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]\right)\vec{T}_i+\vec{F}+\lambda\,grad\;f(q_1,q_2,q_3)=0$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right]\right\}\vec{T}_i+\vec{F}+\lambda\,grad\;f(q_1,q_2,q_3)=0,$$

$$(\vec{v}(t),grad\;f(x,y,z))=0$$

Pri čemu mora biti zadovoljen uslov ortogonalnosti brzine i gradijenta veze:

$$(\vec{v}(t),grad\;f(q_1,q_2,q_3))=0$$

Dalje možemo skalarno pomnožiti sa jediničnim vektorom baze $\vec{T}_i$ *generalisanog sistema ortogonalnih krivolinijskih koordinata* q_1,q_2,q_3 *vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže i dobiti tri skalarne :*

$$\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]=(\vec{F},\vec{T}_i)+(\lambda\,grad\;f(q_1,q_2,q_3),\vec{T}_i),\qquad 1,2,3$$

ili

$$\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]=\widetilde{Q}_i+\widetilde{Q}_{wi}$$

$$\widetilde{Q}_{wi}=(\lambda\,grad\;f(q_1,q_2,q_3),\vec{T}_i)$$

$$(\vec{v}(t),grad\;f(x,y,z))=0$$

Ako su krivolinijske koordinate izabrane tako da su dve q_1 i q_2 parametarske linije površi veze $f(q_1,q_2,q_3)=0$, onda se jednačina ove površi svodi na oblik $q_3=0$ i iz prethodnog sistema od tri diferencijalne jednačine kretanja dobijamo dve koje ne sadrže silu otpora idealne veze, jer je njegova komponeta kao gradijent površi $\widetilde{Q}_{w3}=\lambda=\widetilde{F}_N$ upravna na površ, kao i na jedinične vektore baze koordinatnog sistema $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$, dok su druge dve komponente u pravcima krivolinijskih koordinata q_1 i q_2 jednake nuli: $\widetilde{Q}_{w1}=\widetilde{Q}_{w2}=0$. To znači da su ortogonalne krivolinijske koordinate q_1 i q_2 nezavisne, pa su i generalisane koordinate kretanja materijalne tačke podvrgnute jednoj vezi oblika $q_3=0$, jer tada sistem ima dva stepena slobode kretanja i tada se u prethodnom sistemu javljaju dve diferencijalne jednačine koje ne sadrže komponente otpora idealne veze, već samo generalisanje sile - komponente aktivnih sila. Treća jednačina sadrži nepoznatu komponentu otpora idealne veze $\widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N$ iz koje se ona može odrediti. Tako da se sistem od tri jednačine svodi na dve diferencijalne jednačine po krivolinijskim koordinatama q_1 i q_2, koje su sada nezavisne i predstavljaju generalisane koordinate kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje jedna veza, i jednu jednačinu za odredjivanje nepoznate sile otpora idealne veze $\widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N$. Znači dve jednačine kretanja po generalisanim koordinatama q_1 i q_2 se mogu rešavati nezavisno od treće iz koje se odredjuje sila – otpor veze. Te jednačine se sada mogu napisati u obliku:

$$\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right] = \widetilde{Q}_i \quad , \ i = 1,2$$

$$q_3 = 0, \quad \widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N = -\widetilde{Q}_3$$

Ili

$$\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right] = \widetilde{Q}_i, \ i = 1,2.$$

$$q_3 = 0, \quad \widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N = -\widetilde{Q}_3 = \left(\vec{F}, \vec{T}_3\right)$$

Vidimo da dve diferencijalne jednačine ne sadrže *Lagrange-ov množilac veze* λ. Ove dve jednačine predstavljaju ***Lagrange-ove jednačine druge vrste*** i ima ih onoliko koliko sistem ima stepeni slobode kretanja i u sebi ne sadrže nepoznate sile - otpore veza, za razliku od ***Lagrange-ovih jednačina prve vrste*** koje sadrže nepoznate sile - otpore veza, a sa tim i nepoznat Lagrange-ov množilac veze λ koji treba odrediti iz tog sistema jednačina uz uslov za brzinu.

Na prostom primeru kretanja materijalne tačke na koju dejstvuje jedna skleronomna geometrijska veza možemo uočiti razliku izmedju ***Lagrange-ovih jednačina prve vrste i Lagrange-ovih jednačina druge vrste,*** *što će nam kasnije biti od koristi za razumevanje ove razlike kada pišemo jednačine kretanja sistema sa više materijalnih tačaka i mnogo stepeni slobode kretanja, od ovog slučaja za jednu materijalnu tačku.*

U slučaju kada je aktivna sila u sebi sadrži komponentnu silu koja je konzervativna pa ima funkciju sile, odnosno potencijal, onda se komponente te sile za odgovarajuće generalisane koordinate mogu napisati u obliku:

$$\widetilde{Q}_i = \left(\vec{F}, \vec{T}_i\right) + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial q_i} + \left(\vec{F}_{w\vec{v}}, \vec{T}_i\right) = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \widetilde{Q}_i + \widetilde{Q}^*_i, \ i = 1,2$$

te prethodni sistem postaje:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i + Q^*_i, \ i = 1,2.$$

$$q_3 = 0, \quad \widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N = -\widetilde{Q}_3 = \left(\vec{F}, \vec{T}_3\right)$$

Ako sila otpora sredine kretanju materijalne tačke ima Relijevu funkciju rasipanja $\Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ onda se Lagrange-ove jednačine druge vrste mogu napisati u obliku:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \ i = 1,2.$$

$$q_3 = 0, \quad \widetilde{Q}_{w3} = \lambda = \widetilde{F}_N = -\widetilde{Q}_3 = \left(\vec{F}, \vec{T}_3\right)$$

gde su sada Q_i generalisane sile koje obuvataju nepotencijalne i nekonzervative sile koje dejstvuju na materijalnu tačku. Ako je dejstvo svih konzervativnih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku obuhvaćeno potencijalnom energijom odnosno dejstvo otpornih sila funkcijom rasipanja prethodni sistem jednačina se svodi na:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right]+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}=0\,,\ i=1,2\,.$$

$$q_3=0\,,\quad \widetilde{Q}_{w3}=\lambda=\widetilde{F}_N=-\widetilde{Q}_3=\left(\vec{F},\vec{T}_3\right)$$

Vektorska jednačina dinamičke ravnoteže pokretne materijalne tačke $N(q_1,q_2,q_3)$***, mase*** m*,* na koju dejstvuju dve geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f_i(q_1,q_2,q_3)=0\,,\ i=1,2\,,$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]\right)\vec{T}_i+\vec{F}+\lambda_1\, grad\, f_1(q_1,q_2,q_3)+\lambda_2\, grad\, f_2(q_1,q_2,q_3)=0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{-\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right]\right\}\vec{T}_i+\vec{F}+\lambda_1\, grad\, f_1(q_1,q_2,q_3)+\lambda_2\, grad\, f_2(q_1,q_2,q_3)=0$$

$$\left(\vec{v}(t), grad\, f_i(q_1,q_2,q_3)\right)=0\,, i=1,2$$

Dalje možemo skalarno pomnožiti sa jediničnim vektorom baze $\vec{T}_i$ *generalisanog sistema ortogonalnih krivolinijskih koordinata* q_1,q_2,q_3 *vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže i dobiti tri skalarne :*

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i}\right]=A_i\left(\vec{F},\vec{T}_i\right)+A_i\left(\lambda_1 grad\, f_1(q_1,q_2,q_3),\vec{T}_i\right)+A_i\left(\lambda_2 grad\, f_2(q_1,q_2,q_3),\vec{T}_i\right)$$

Ako su krivolinijske koordinate izabrane tako da je q_1 duž linije putanje (luk putanje) , onda se obe jednačine veze $f_i(q_1,q_2,q_3)=0\,,\ i=1,2$ uprošćavaju i jednačine veza (dve površi koje se seku po liniji putanje materijalne tačke) i jednačine veza (površi) koje dejstvuju na materijalnu tačku se svode na oblik $q_2=0$ i $q_3=0$ i iz prethodnog sistema od tri diferencijalne jednačine kretanja dobijamo jednu koja ne sadrži sile otpora idealnih veza, jer su njegove komponete kao gradijenti površi $Q_{w2}=A_2\lambda_1=F_{N2}$ i $Q_{w3}=A_3\lambda_2=F_{N3}$ upravne na odgovarajuću površ veze, ali istovremeno i upravne na liniju putanje, kao i na jedinični vektor baze koordinatnog sistema $\vec{T}_1$, dok je komponenta u pravcu putanje, lnije po kojoj se materijalna tačka kreće u pravczu krivolinijske coordinate q_1 jednaka nuli, $Q_{w1}=0$.

To znači da je ortogonalna krivolinijska koordinata q_1 nezavisna, pa je ona i generalisana koordinata kretanja materijalne tačke podvrgnute dvema vezama oblika $q_2=0$ i $q_3=0$, jer tada sistem ima jedan stepen slobode kretanja i tada se u prethodnom sistemu javlja jedna diferencijalna jednačina koja ne sadrži komponente otpora idealnih veza, već samo generalisane sile - komponente aktivnih sila. Druga i treća jednačina sadrže nepoznate komponente otpora idealnih veza $Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}$ i $Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}$ iz kojih se one mogu odrediti. Tako sada se sistem od tri jednačine svodi na jednu diferencijalnu jednačinu po krivolinijskoj koordinati q_1 , koja sada predstavljaja i generalisanu koordinatu kretanja materijalne tačke na koju dejstvujju dve idealne stacionarne geometrijske veze, i dve jednačine za odredjivanje nepoznatih sila otpora idealnih veza $Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}$ i $Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}$.

Znači jedna jednačina kretanja po generalisanoj koordinati q_1 se može rešavati nezavisno od druge i treće iz kojih se odredjuju dve komponente sila veze. Ta jednačina se sada može napisati u obliku:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_1}\right]=Q_1 .$$

$$q_2=0 \text{ i } q_3=0,\ Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}=A_2\left(\vec{F},\vec{T}_2\right) \text{ i } Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}=A_3\left(\vec{F},\vec{T}_3\right)$$

U slučaju kada je aktivna sila u sebi sadrži komponentnu silu koja je konzervativna pa ima funkciju sile, odnosno potencijal, oda se komponente te sile za odgovarajuću generalisanu koordinatu može napisati u obliku:

$$Q_1=A_1\left(\vec{F},\vec{T}_1\right)+\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial q_1}+A_1\left(\vec{F}_{w\vec{v}},\vec{T}_1\right)=-\frac{\partial E_p}{\partial q_1}+Q_1+Q^*{}_1 ,$$

te prethodna jednačina postaje:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial E_p}{\partial q_1}=Q_1+Q^*{}_1 ,.$$

$$q_2=0 \text{ i } q_3=0,Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}=A_2\left(\vec{F},\vec{T}_2\right) \text{ i } Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}=A_3\left(\vec{F},\vec{T}_3\right)$$

Ako sila otpora sredine kretanju materijalne tačke ima Relijevu funkciju rasipanja $\Phi(\dot{q}_1,\dot{q}_2)$ onda se *Lagrange-ova jednačina druge vrste* može napisati u obliku:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial E_p}{\partial q_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1}=Q_1 ,.$$

$$q_2=0 \text{ i } q_3=0,\ Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}=A_2\left(\vec{F},\vec{T}_2\right) \text{ i } Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}=A_3\left(\vec{F},\vec{T}_3\right)$$

gde je sada Q_1 generalisana sila koja obuhvata nepotencijalne i nekonzervativne sile koje dejstvuju na materijalnu tačku. Ako je dejstvo svih konzervativnih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku obuhvačeno potencijalnom energijom odnosno dejstvo otpornih sila funkcijom rasipanja prethodni sistem se svodi na:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial E_p}{\partial q_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1}=0,\ i=1,2 .$$

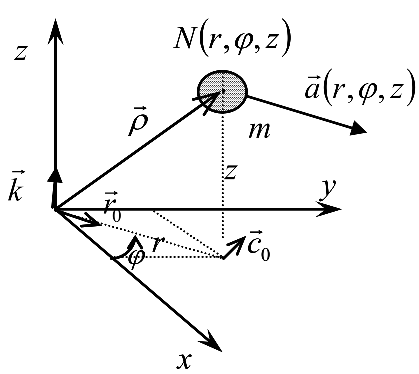
$$q_2=0 \text{ i } q_3=0,\ Q_{w2}=\lambda_1 A_2=F_{N1}=A_2\left(\vec{F},\vec{T}_2\right) \text{ i } Q_{w3}=\lambda_2 A_3=F_{N2}=A_3\left(\vec{F},\vec{T}_3\right)$$

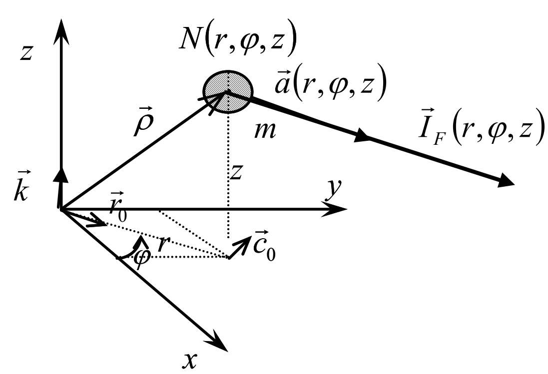
Na ovim primerima smo pokazali i značaj izbora koordinata u kojima treba opisivati model dinamike sistema. To može znatno uprostiti rešavanje konkretnih zadataka. U narednom delu sastavićemo diferencijalne jednačine u konkretnim krivolinijskomortogonalnim sistemima.

Ubrzanje materijalne tačke $N(r,\varphi,z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je:

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0+\ddot{z}\vec{k}$$

gde su $\left(\vec{r}_0,\vec{c}_0,\vec{k}\right)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.





Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne taćke*** $N(r,\varphi,z)$***, mase*** m***,*** *čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata *je*

$$\vec{I}_F = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_0 - m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{c}_0 - m\ddot{z}\vec{k},$$

sa komponentama

$$I_{F,r} = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \qquad I_{F,c} = -m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) \quad I_{F,z} = -m\ddot{z}$$

Iz principa dinamičke ravnoteže za slobodnu materijalnu (dinamičku) tačku vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} = 0$$

gde je $\vec{F}(t)$ zbir svuh aktivnih sila koje dejstvuju na slobodnu pokretnu materijalnu tačku., pa sledi da je sistem jednačina kretanja slobodne materijalne tačke u polarno-cilindričkom sistemu koordinata:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \left(\vec{F}, \vec{r}_0\right) = F_r$$

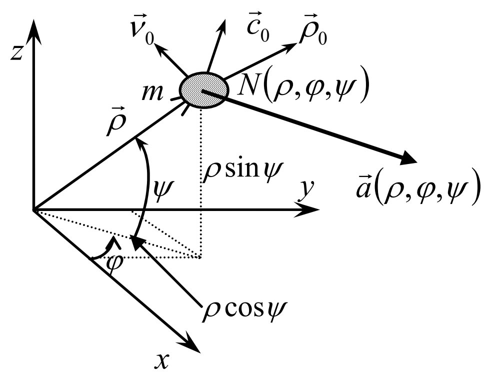
$$m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = \left(\vec{F}, \vec{c}_0\right) = F_c$$

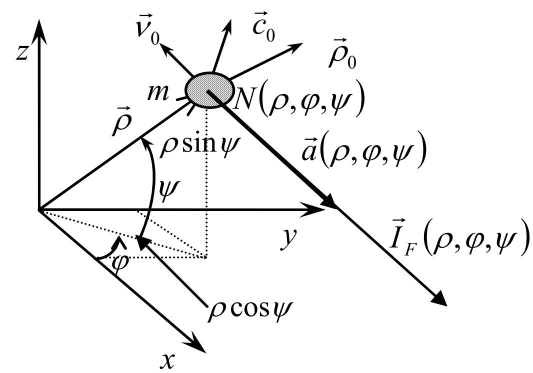
$$m\ddot{z} = \left(\vec{F}, \vec{k}\right) = F_z$$

Ubrzanje materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$ u sistemu sfernih koordinata je:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

gde su $\left(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{v}_0\right)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i meridionalnom pravcu.





Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne tačke*** $N(\rho,\varphi,\psi)$***,*** *mase* m*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata *je*

$$\vec{I}_F = -m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0 - \frac{m}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0 - m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

sa komponentama

$$\vec{I}_{F,\rho} = -m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\dot{\psi}^2\right)\vec{\rho}_0$$

$$\vec{I}_{F,c} = -\frac{m}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)\vec{c}_0$$

$$\vec{I}_{F,v} = -m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]\vec{v}_0$$

Iz principa dinamičke ravnoteže za slobodnu materijalnu (dinamičku) tačku vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)+\vec{F}=0$$

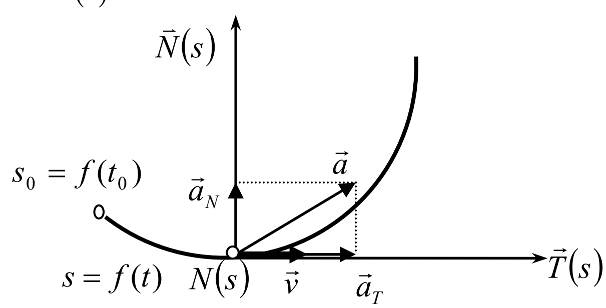
gde je $\vec{F}(t)$ zbir svuh aktivnih sila koje dejstvuju na slobodnu pokretnu materijalnu tačku., pa sledi da je sistem jednačina kretanja slobodne materijalne tačke u sfernom sistemu koordinata:

$$m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\cos^2\psi-\rho\dot{\psi}^2\right)=\left(\vec{F},\vec{\rho}_0\right)=F_\rho$$

$$\frac{m}{\rho\cos\psi}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi\right)=\left(\vec{F},\vec{c}_0\right)=F_c$$

$$m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right)+\rho\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi\right]=\left(\vec{F},\vec{v}_0\right)=F_v$$

Vektor brzine $\vec{v}(s)$ ***pokretne materijalne tačke*** $N(s)$ usmeren je po tangenti na putanju tačke po krivoj liniji, orjentisanoj ortom $\vec{T}(s)$.



$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}=v\cdot\vec{T}$$

Impuls kretanja materijalne tačke $N(s)$***,*** *mase* m*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u prirodnom sistemu koordinata je:

$$\vec{p}(t)=m\frac{ds}{dt}\vec{T}$$

i pada u pravac tangente na putanju materijalne tačke.

Oskulatorna ravan je ravan krive, to je ravan koju čine tangenta na putanju pokretne tačke, sa jediničnim vektorom $\vec{T}=\vec{T}(s)$, i usmerena je u pozitivnom smeru porasta puta s i normala na krivu sa jediničnim vektorom $\vec{N}=\vec{N}(t)$, u smeru konkavne strane putanje, i vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ pokretne materijalne tačke $N(s)$ leži uvek u toj ravni.

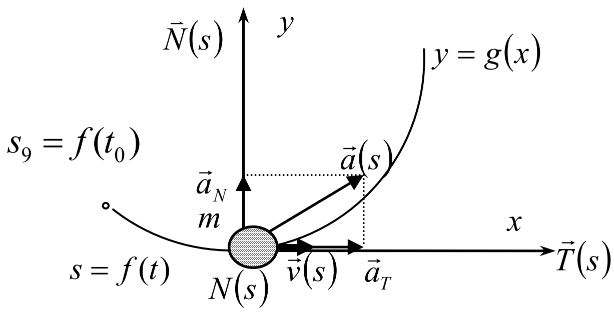
U ***prirodnom sistemu putanje materijalne tačke*** $N(s)$ ***vektor ubrzanja*** $\vec{a}(s)$ te tačke $N(s)$ je

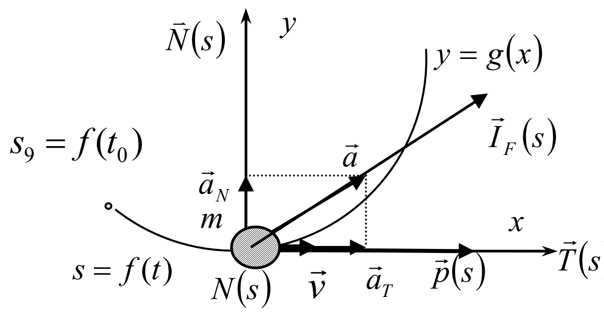
$$\vec{a}=\dot{v}\vec{T}+\frac{v^2}{R_k}\vec{N},$$

i njegove komponente su:

$a_T=\dot{v}$ -tangencijalna komponenta ubrzanja orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju

$a_N=\dfrac{v^2}{R_k}$ -normalna komponenta ubrzanja orjentisana ortom normale na krivolinijsku putanju





Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ ***materijalne tačke*** $N(s)$***,*** *mase* m*, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena* t*, odredjen vektorom položaja* $\vec{r}(t)$ u prirodnom sistemu je:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\left(\dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R_k}\vec{N}\right)$$

i njene komponente su:

$$\vec{I}_{F,T} = -m\vec{a}_T = -m\dot{v}\vec{T}$$

-komponenta sile inercije u tangencijalnom pravcu orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju ***materijalne tačke*** $N(s)$***,*** *mase* m *;*

$$\vec{I}_{F,N} = -m\vec{a}_N = -m\frac{v^2}{R_k}\vec{N}$$

- komponenta sile inercije u pravcu normale na putanju i orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju ***materijalne tačke*** $N(s)$***,*** *mase* m .

Iz principa dinamičke ravnoteže za slobodnu materijalnu (dinamičku) tačku vektorska jednačina kretanja je:

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} = 0$$

gde je $\vec{F}(t)$ zbir svuh aktivnih sila koje dejstvuju na slobodnu pokretnu materijalnu tačku., pa sledi da je sistem jednačina kretanja slobodne materijalne tačke u prirodnom sistemu koordinata:

$$m\dot{v} = \left(\vec{F}, \vec{T}\right) = F_T$$

$$m\frac{v^2}{R_k} = \left(\vec{F}, \vec{N}\right) = F_N$$

Primer - Zadatak 1. Materijalna tačka M , mase m , kreće se u vertikalnoj ravni u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini, $\vec{F} = -km\vec{v}$, $(k \succ 0)$. U početnom trenutku kretanja materijalna tačka je imala brzinu $\vec{v}_0$ usmerenu po horizontali, a koordinatni sistem je postavljen tako da se koordinatni početak poklapa sa početnim položajem tačke. Smatrajući silu zemljine teže konstantnom, koristeći princip dinamičke ravnoteže, odrediti:

- diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke;
- konačne jednačine kretanja materijalne tačke i njenu putanju za zadate početne uslove;
- teorijski horizontalni domet materijalne tačke .

Rešenje:

Filozofija i strategija rešavanja postavljenog zadatka.

Da bi smo rešili postavljeni zadatak, potrebno je da prvo napravimo analizu mogućeg modela dinamike sistema, odnosno modela dinamike materijalne tačke i odgovorimo na pitanje da li se radi o kretanju slobodne materijalne tačke ili materijalne tačke podvrgnute dejstvu veza.

Zatim odredimo broj stepeni slobode kretanja i izaberemo koordinatni sistem i odgovarajući broj koordinata kojima ćemo opisati dinamiku materijalne tačke.

Zatim sledi analiza sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i odredjivanje njihovih poznatih ili nepoznatih koordinata u izabranom sistemu koordinata.

Zatim biramo, ako to zadatkom nije propisano, princip pomoću koga ćemo sastaviti jednačine kretanja.

Zatim jednačine kretanja rešavamo i na kraju odredjujemo integracione konstante koristeći zadate početne uslove.

U zaključivanju analiziramo dobijeno repenje za zadate poletne uslove i izvodimo zaključke o svojstvima rešenja i opisane dinamike.

Kako se materijalna tačka, definisano tekstom zadatka, kreće u polju zemljine teže i u uslovima otpora sredine, i na nju ne dejstvuju veze, to imamo slučaj kretanja – dinamike ***slobodne materijalne tačke***, koja ima tri stepeni slobode kretanja i njen položaj u prostoru kretanja ćemo odrediti vektorom položaja $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, čije su koordinate x, y, z u Descartes-ovom sistemu koordinata. Koordinatni sistem ćemo izabrati tako da je njegov koordinatni početak u tački –početnom položaju materijalne tačke, odnosno u tački u kojoj je materijalna tačka bila u početnom trenutku kretanja, a tako da je osa Oy usmerena vertikalno naniže, a ravan Oxz da je horizontalna, kao što je na slici prikazano. Kako je početna brzina u horizontalnoj ravni to ćemo koordinatnu osu Ox izabrati u pravcu početne brzine $\vec{v}_0$, što će se pokazati opravdanim radi uprošćenja matematičkog opisa zadatka.

Sile koje dejstvuju na slobodnu materijalnu tačku su:

- aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = mg\vec{j}$
- sila otpora sredine u kojoj se kreće materijalna tačka je: $\vec{F}_w = -km\vec{v}$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže je:

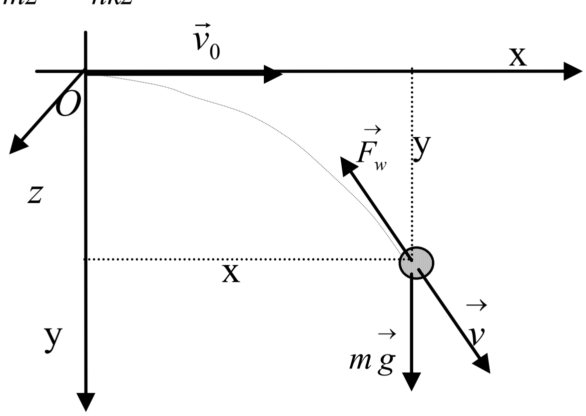
$$\vec{I}_F + \sum \vec{F}_i = 0, \qquad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{g} - km\vec{v}$$

Iz ove vektorske jednačine mogu se formirati tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke u prostoru i izabranom koordinatnom početku:

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -mk\dot{y} + mg$$

$$m\ddot{z} = -nk\dot{z}$$



Slika 1.

pri čemu su početni uslovi oblika:

$$t=0;\quad \begin{matrix} x(0)=0; & \dot{x}(0)=v_0; \\ y(0)=0; & \dot{y}(0)=0; \\ z(0)=0; & \dot{z}(0)=0 \end{matrix}$$

Integraljenjem polaznog sistema diferencijalne jednačine kretanja, sledi:

$$\dot{x}=-kx+C_1,$$
$$\dot{y}=-ky+gt+C_2$$
$$\dot{z}=-kz+C_3$$

Pri čemu se uzimajući u obzir početne uslove dobijaju integracione konstante u obliku:

$$C_1=v_0 \quad , \quad C_2=0 \ \text{ i } \ C_3=0$$

Pa sistem ***prvih integrala*** diferencijalnih jednačina kretanja postaje:

$$\dot{x}+kx=v_0,$$
$$\dot{y}+ky=gt.$$
$$\dot{z}+kz=0$$

Ovo je sada sistem od dve nehomogene diferencijalne jednačine i jedne homogene prvog reda, pri čemu su integrali homogenog dela:

$$x_h=C_4e^{-kt} \quad ; \quad y_h=C_5e^{-kt} \ \text{ i } \ z=C_6e^{-kt}$$

a partikularni integrali se pretpostavljaju u obliku:

$$x_p=A \quad \text{i} \quad y_p=Bt+D$$

Posle unošenja pretpostavljenih partikularnih integrala u sistem diferencijalnih jednačina prvog reda dobijaju se integracione konstante:

$$A=\frac{v_0}{k}, \qquad B=\frac{g}{k} \quad \text{i} \quad D=-\frac{g}{k^2}.$$

Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja su:

$$x(t)=x_h+x_p=C_4e^{-kt}+A$$
$$y(t)=y_h+y_p=C_5e^{-kt}+Bt+D$$
$$z(t)=z_h+z_p=C_6e^{-kt}$$

ili

$$x=C_4e^{-kt}+\frac{v_0}{k}$$
$$y=C_5e^{-kt}+\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}.$$
$$z(t)=C_6e^{-kt}$$

Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja moraju takodje da zadovoljavaju početne uslove. Iz uslova zadovoljenja početnih uslov dobijamo sistem algebarskih jednačina po nepoznatim integracionim konstantama, te rešavanjem tog sistema dobijamo integracione konstante u sledećem obliku:

$$C_4=-\frac{v_0}{k} \quad , \quad C_5=\frac{g}{k^2} \ \text{ i } \ C_6=0,$$

pa su konačne jednačine kretanja materijalne tačke:

$$x(t)=\frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$
$$y(t)=\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right)$$
$$z(t)=0$$

Iz konačnih jednačina kretanja vidimo da se materijalna tačka kreće u ravni xOy, što smo mogli i pretpostaviti u startu, analizirajuči komponente sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i početne uslove.

Ovaj zadatak predstavlja u stvari ***horizontalni hitac u realnoj sredini***, pri čemu je otpor vazduha proporcionalan brzini kretanja materijalne tačke.

Teorijski domet se dobija kada se odredi granična vrednost funkcije $x(t)$ za $t \to \infty$:

$$D_t = \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0}{k}.$$

Primer - Zadatak 2. Materijalna tačka mase $m = 2[kg]$ kreće se pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli jednačine $y = 4px^2$, gde je $p\left[m^{-1}\right]$ parametar dimenzione saglasnosti, iz početnog položaja $N_0(y_0 = 10\,cm)$ bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u vertikalnoj ravni. Koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?

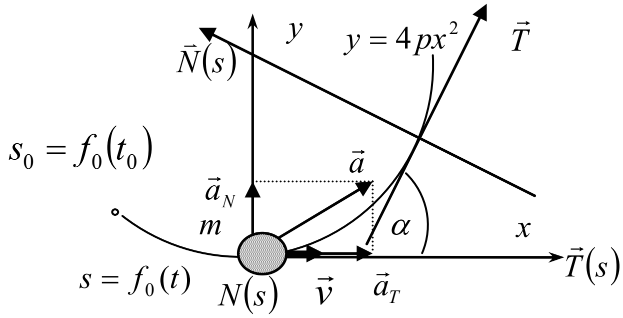
Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes+ove koordinate (x, y, z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde paraboli, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija – parabola u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je $f(x, y) = y - 4x^2 = 0$. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna.

Zadatkom se traži da se napišu jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole kada je izložena dejstvu dve geometrijske stacionarne veze i dejstvu sile sopstvene težine primenom principa dinamičke ravnoteže. Kako ova materijalna tačka ima, kako smo prethodnom analizom zaključili, jedan stepen slobode kretanja za generalisanu koordinatu izabraćemo put po luku parabole po kojoj se kreće i označićemo ga sa: s. Brzina materijalne tačke pada u pravac tangente na putanju, ovde na zadatu parabolu i iznosi

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\ .$$

Pravac tangente na putanju materijalne tačke – zadatu parabolom je definisan uglom α, i jasno je da je $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = y' = 8px$ za slučaj zadate parabole. Za primenu principa dinamičke ravnoteže potrebno je napraviti analizu sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku. Na materijalnu tačku dejstvuju sledeće sile: aktivna sila sopstvene težine $\vec{G} = -mg\vec{j}$, a dejstvom veza javlja se sila otpora veza koja je upravna na liniju putanje i može se izraziti u obliku $\vec{F}_{wN} = \vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x, y)$, jer se radi o idealnim vezama $z = 0$ ***i*** $f(x, y) = y - 4px^2 = 0$, pa nema tangencijalne komponente. Analizom zaključujemo da se radi o kretanju u ravni xOy. Javlja se i sila inercije koja je suprotno smerna od vektora ubrzanja materijalne tačke pomoženog masom, što je definisano jednom od definicija vektorskih invarijanti dinamike materijalne tačke. Za silu inercije možemo da napišemo: $\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$. U ovom slučaju radi jednostavnosti rešavanja zadatka dobro je koristiti prirodni koordinatni sistem linije putanje kretanja materijalne tačke, ali se jednačine kretanja mogu napisati i u Descartes'ž-ovom sistemu koordinata.



Princip dinamičke ravnoteže smo formulisali sledećim iskazom:

*Materijalno kruto telo je u **dinamičkoj ravnoteži** ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuje jedna geometrijska, skleronomna idealna veza oblika $f(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0$$

Ili

$$\left(-m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) + \vec{F} + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0$$

gde λ nepoznati Lagrange-ov množilac veze $f(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na površ veze

$$(\vec{v}(t), grad\; f(x,y,z)) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda\, grad\; f(x,y,z)$ je upravna na tangencijalnu površ idealne veze I to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i površi po kojoj se kreće i u kojoj leži brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke.

Za materijalnu (dinamičku) tačku na koju dejstvuju dve geometrijske, skleronomne idealne veze oblika $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, princip dinamičke ravnoteže se može iskazati sledećom jednačinom:

$$\vec{I}_F + \sum_{i=1}^{i=k} \vec{F}_i + \lambda_1\, grad\; f_1(x,y,z) + \lambda_2 gradf_2(x,y,z) = 0$$

gde su λ_1 i λ_2 nepoznati Lagrange-ovi množioci veza $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$, a brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke zadaovoljava uslov da je tangencijalna na obe površi veza, odnosno liniju

$$(\vec{v}(t), grad\; f_1(x,y,z)) = 0 \quad \text{i} \quad (\vec{v}(t), grad\; f_2(x,y,z)) = 0$$

jer reakcija (otpor) idealne veze $\vec{F}_w = \lambda_1\, grad\; f_1(x,y,z) + \lambda_2 gradf_2(x,y,z)$ je upravna na tangentu na presečnu krivu obe površi idealne veze I to je sila medjudejstva izmedju materijalne tačke i linije po kojoj se kreće .

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\; f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad \text{uslov brzine} \quad (\vec{v}(t), grad\; f(x,y,z)) = 0$$

ili

$$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

a R je poluprečnik krivine $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''} = \dfrac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$.

Element luka s duž parabole – putanje materijalne tačke je:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju smo napisali:

$\left(-m\vec{a}\right) + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$ i uslov brzine $\left(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)\right) = 0$

ili

$$\left(-m\vec{a}_N\right) + \left(-m\vec{a}_T\right) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0,$$

Iz prikazanih vektorskih jednačina možemo napisati odgovarajući broj skaranih jednačina. Iz prvohžg zapisa možemo da napišemo dve diferencijalne jednačine :

$$\left(-m\ddot{x}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\left(-m\ddot{y}\right) + \left(-mg\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i uslov za brzinu

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ili kako je $f(x,y) = y - 4px^2 = 0$, prethodni sistem diferencijalnih jednačina i uslov za brzinu postaju:

$$\left(-m\ddot{x}\right) - 8\lambda px = 0$$

$$\left(-m\ddot{y}\right) + \left(-mg\right) + \lambda = 0$$

$$-8p\dot{x}x + \dot{y} = 0$$

U Descartes-ovom sistemu koordinata smo dobili dve diferencijalne jednačine i jedan uslov za brzinu, iz kojih treba odrediti Lagrange-ov množilac veze i dve koordinate što nije tako prost zadatak. Zato čemo se ovde i zaustaviti jer je zadatkom tražemo da se napišu diferencijalne jednačine.

Lagrange-ov množilac veze je:

$$\lambda = m\left(\ddot{y} + g\right) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)$$

i sila otpora veze je:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_N = \lambda\, grad\ f(x,y,z) = m\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right)\left(-8px\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Pri tome je potrebno prethodno rešiti nelinearnu diferencijalnu jednačinu:

$$\ddot{x} + 8px\left(8p\dot{x}^2 + 8px\ddot{x} + g\right) = 0 \qquad y = 4px^2$$

po koordinati x koju smo u Descartes-ovom sistemu koordinata izabrali za generalisanu koordinatu.

Kako je:

$$\ddot{x}\left(1+64p^2x^2\right)=-8px\left(8p\dot{x}^2+g\right) \qquad \ddot{x}=-\frac{8px\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Sledi da je

$$\lambda=m\left(8p\dot{x}^2-64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+g\right)=m\left(\frac{8p\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}-64p^2x^2\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+\frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right)=$$

$$=m\left(\frac{8p\dot{x}^2+8p\dot{x}^2 64p^2x^2}{\left(1+64p^2x^2\right)}-\frac{\left(8p\dot{x}^2 64p^2x^2+g64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}+\frac{g\left(1+64p^2x^2\right)}{\left(1+64p^2x^2\right)}\right)=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

I konačno se za Lagrange-ov množilac veze dobija izraz preko kvadeata horizontalne komponente brzive i kvadrata apscise položaja materijalne tačke na paraboli.:

$$\lambda=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}$$

Normalna komponenta otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po idealno glatkoj paraboli u vektorskom obliku je:

$$\vec{F}_w=\vec{F}_N=\lambda\, grad\ f(x,y,z)=m\frac{8p\dot{x}^2+g}{\left(1+64p^2x^2\right)}\left(-8px\vec{i}+\vec{j}\right)$$

što predstavlja izraz u funkciji zavisnosti od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Intenzitet normalne komponente otpora veze koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju po paraboli

$$\left|\vec{F}_w\right|=F_w=\left|\vec{F}_N\right|=F_N=m\frac{\left(8p\dot{x}^2+g\right)}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$$

i zavisi samo od kvadrata horizontalne komponente brzine $\dot{x}$ i kvadrata apscise x položaja materijalne tačke na paraboli.

Drugi pristup je da vektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po paraboli pod dejstvom sopstvene težine anliziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanjue. Zato ćemo razmotriti u drugom obliku istu vektorsku jednačinu dinamičke ravcnoteže te materijalne tačke na paraboli:

$$\left(-m\vec{a}_N\right)+\left(-m\vec{a}_T\right)+m\vec{g}+\vec{F}_{N.}=0$$

Odnosno kako je $\vec{a}_T=\dot{v}\vec{T}=\ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N=\frac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right)+\left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right)+mg\left(-\sin\alpha\vec{T}-\cos\alpha\vec{N}\right)+F_{N.}\vec{N}=0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ parabole, ose oskulatorne ravni parabole dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s}-mg\sin\alpha=0$, u pravcu tangente na putanbju – na parabolu

$-m\frac{v^2}{R_k}-mg\cos\alpha+F_N=0$, u pravcu normale na putanju - na parabolu

gde je poluprečnik krivine: $R_k=\frac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}=\frac{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}}{8p}$, $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se odredi otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{8px}{\sqrt{1+64p^2x^2}}$

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$F_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg(y-y_0) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y).$$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže za pravac normale sledi:

$$F_N = \frac{mv_0^2}{R_k} + 2\frac{mg}{R_k}(y_0 - y) + \frac{mg}{\sqrt{1+64p^2x^2}}.$$

Kako je $y = 4px^2$ to je kvadrat brzune:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)$$

Pa imajući u vidu izraz za poluprečnik krivine izraz za otpor veze možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha = m\frac{\dot{x}^2\left(1+64p^2x^2\right)}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)^3}} + mg\frac{1}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)}} = \frac{m\left(p\dot{x}^2+g\right)}{\sqrt{\left(1+64p^2x^2\right)}}$$

To je identičan izraz koji smo za silu otpora idealne veze dobili i preko rešavanja zadatka u Descartes'ovom sistemu koordinata.

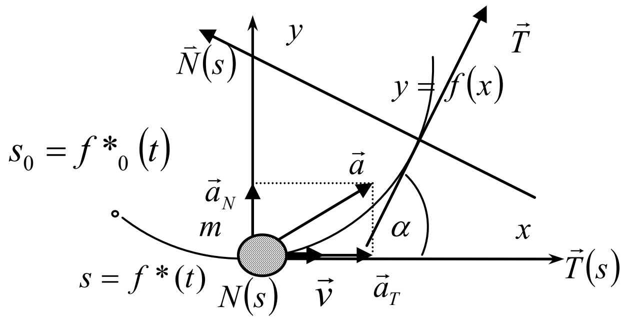
.

U temenu parabole je: $x = 0$ i $y = 0$, pa je $F_N = 16mgy_0 + mg = G(1+16y_0) = 32{,}18[N]$

Primer - Zadatak 3. Odrediti u vertikalnoj ravni Oxy jednačinu glatke linije - putanje teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk/R$; $R = R_k$.

Rešenje:

Slobodna materijalna tačka u prostoru ima tri stepeni slobode kretanja, i njen položaj je odredjen pomoću tri Descartes+ove koordinate (x, y, z), medjutim kada se materijalna tačka kreće po zadatoj liniji, ovde nepoznatoj, ona nije slobodna i ima samo jedan stepen slobode kretanja, jer na nju desjtvuju dve veze. Jedna veza je da je kriva linija u ravni xOy ili $z = 0$, a druga veza je nepoznata $f(x, y) = 0$ i zadatkom se tri. Prema tome radi se o kretanju materijalne tačke na koju dejstvuju dve geometrijske i stacionane (skleronomne) idealne veze. Zadatkom je već odredjen Descartes-ov koordinatni sistem u kome je ravan xOy vertikalna. Takodje je zadatkom dato da je veza idealna i da je otpor veze obrnuto *srazmeran krivini putanje* $F_N = mgk/R$; $R = R_k$.



Na osnovu principa dinamičke ravnoteže u razmatranom slučaju možemo da pišemo:

$\vec{I}_F + m\vec{g} + \lambda\, grad\ f(x,y,z) = 0$ i uslov brzine $(\vec{v}(t), grad\ f(x,y,z)) = 0$

ili

$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$,

gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda grad f(x,y)$, otpor idealne veze u pravcu normale na liniju veze, odnosno u pravcu gradijenta na putanju materijalne tačke (parabolu).

Za odredjivanje komponenata sile inercije u prirodnom sistemu koordinata parabole – putanje kretanja materijalne tačke pišemo:

$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T$

Gde su prirodne komponete vektora ubrzanja:

$\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ tangencijalna komponenta vektora ubrzanja, gde je $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ normalna komponeta vektora ubrzanja,

*V*ektorsku jednačinu dinamičke ravnoteže materijalne tačke koja se kreće po glatkoj krivoj u vertikalnoj ravni pod dejstvom sopstvene težine anliziramo u prirodnom sistemu koordinata njene putanjue. Zato ćemo razmotriti tu vektorsku jednačinu dinamičke ravcnoteže te materijalne tačke u obliku:

$(-m\vec{a}_N) + (-m\vec{a}_T) + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$

Odnosno kako je $\vec{a}_T = \dot{v}\vec{T} = \ddot{s}\vec{T}$ i $\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$,to je i

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right) + \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{N}\right) + mg\left(-\sin\alpha\vec{T} - \cos\alpha\vec{N}\right) + F_{N.}\vec{N} = 0$$

Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose tangente $\vec{T}$ i notmale $\vec{N}$ krive linije koju tražimo, ose oskulatorne ravni krivolinijske putanje i dobijamo dve skalarne jednačine:

$-m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0$, u pravcu tangente na putanbju

$-m\dfrac{v^2}{R_k} - mg\cos\alpha + F_N = 0$, u pravcu normale na putanju ž

gde je poluprečnik krivine: $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}$, a element luka putanje $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$.

Dakle sledi sistem jednačina kretanja i dinamičke ravnoteže, od kojih je prva diferencijalna drugog reda po generalisanoj koordinati s. a druga omogućava da se otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku izrazi pomoću krivine:

$\ddot{s} = -g\sin\alpha$

$$F_N = m\frac{v^2}{R_k} + mg\cos\alpha$$

gde su : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ i $\sin\alpha = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

S obzirom da je sistem konzervativan, iz integrala energije

$$F_k - E_{k0} = A = E_p - E_{p0}$$

sledi:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\left(y - y_0\right) + \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(y_0 - y\right).$$

Kako je oy-osa usmerena naviše, onda integral energije daje:

$v^2 = v_0^2 - 2gy$, gde je $y_0 = 0$

Iz druge jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke u pravcu normale na traženu krivu liniju sledi:

$$\frac{mv^2}{R} = -mg\cos\alpha + F_N = \frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{mgk}{R}$$

Pošto je zadatkom definisana sila otpora dejstvujuće veze linije, a traži se jednačina linije to rešavamo obrnuti zadatak i prethodna jednačina je diferencijalna jednačina putanje – linija veze koja dejstvuje na materijalnu tačku .

Posle transformacije dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu linije putanje:

$$\frac{m\left(v^2 - kg\right)}{R} = \frac{m\left(v_0^2 - 2gy - kg\right)}{R} = \frac{-mg}{\sqrt{1+y'^2}};$$

odnosno:

$$\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''} = \left(2y + c\right),$$

gde je uvedena oznaka radi jednostavnijeg pisanja

$$c = -\frac{v_0^2 - kg}{g}$$

Zamenom poluprečnika krivine relacijom $R_k = \dfrac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{y''}$ dobijamo:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\left(2y + c\right)};$$

Ta diferenvžcijalna jednačina razdvaja promenljive integracije y i $y' = \dfrac{dy}{dx}$, koordinate pokretne materijalne tačke u ravni xOy te je:

$$\frac{2y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2dy}{\left(2y + c\right)};$$

Integraljenjem leve i desne strane prethodnne jednačine u fždiferencijalnom obliku dobijamo

$$\ln\sqrt{1+y'^2} = \ln\left(2y + c\right) + \ln C_1 = \ln C_1\left(2y + c\right)$$

Imajući u vidu da je osobine logaritama kvadrata, količnika i proizvoda lako je iz prethodnog dobiti sledeće

$$y'^2 = ay + b\,;\quad a = 2C_1 \ \text{ i } \ b = C_1 c - 1$$

Ponovo razvajamo promenljive integracije

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{ay + b}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{ay + b}} = dx\,;\ 2\sqrt{ay + b} = a(x + C_2)$$

Te još jednim integraljenjem dobijamo sledeću jednačinu krive linije:

$$ay + b = \frac{a^2}{4}(x + C_2)^2 \ \text{ tj.}$$

$$y = \frac{a}{4}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\ ,$$

koja je zadatkom tražena. Znači tražena glatka kriva linija u vertikalnoj ravni Oxy putanja teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk / R\,; R = R_k$ je parabola - kriva linija drugog reda jednačine

$$y = \frac{a}{4}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}.$$

Mi smo ustvari dobili višeparametarsku familiju krivih linija parabola, jer u jednačini krive linije ima više proizvoljnih konstanti integracije, ali za sve te putanje – krive linije kao veze dejstva prinude veze u kretanju materijalne tačke imaju svojstvo da je otpoir veze obrnuto proporcionalan poluprecniku krivine veze, jer smo to jednačinu izveli iz tog uslova.

Stabilnost kretanja i mirovanja.
Kriterijumi stabilnosti.

Za početak navešćemo nekoliko rečenica znamenitog ruskog naučnika Nikolaja Gurevića Četajeva koje uvode u spoznaju pojma stabilnosti kretanja i mirovanja:

''Dinamika je nauka ostvarnim ravnotežama i kretanjima materijalnih sistema.Galilej i Njutn otkrili su njena načela i pokazali njihovu verodostojnost ogledima o padanj teških tela i objašnjavanjem kretanja planeta. Medjutim svako stanje mehanićkog sistema , koje odgovara matematički strogom rešenju kako jednačina mirovanja, tako i diferencijalnih jednačina kretanja, ne posmatra se u stvarnosti''

''Opštost principa i za izbor rešenja koja odgovaraju stabilnim stanjima u mehanici nije bilo, bio je prihvaćen karakter nauke o idealizovanim sistemima i za svaku strogu primenu na našu prirodu, principijelno za svaki put, tražena su rešenja zadataka stabilnbosti…''

''Opšti problem stabilnosti kretanja u klasičnoj postavci rešio je Ljapunov…''

. ***Ravnotežno stanje****.*Pod *pojmom ravnotežno stanje* podrszumeva se *mirovanje posmatranih tela kada su sve generalisane brzine jednake nuli, a imajući u vidu vezu sa impulsima kretanja I svi impulse kretanja su jednaki nuli, odnosno sve količine kretanja su jednake nuli za svako telo I svaku materijalnu tačku tog sistema.*

Ležen Dirišleova teorema o stabilnosti*. Ako je system od* N *materijalnih tačaka podvrgnut* k *,onačnim vezama onda takav system ima* $n=3N-k$ *stepeni slobode kretanja. Trenutni položaj sistema se može tada odrediti sa* $n=3N-k$ *medjusobno nezavisnih generalisanih koordinata* q_i, $i=1,2,....,n$. *Na osnovu principa rada mogu se napisati sledeće invarijantne relacije:*

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\Delta A^{\vec{F}_i}=0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\Delta\vec{r}_i\right)=0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\Delta A^{\vec{F}_i}\leq 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\Delta\vec{r}_i\right)\leq 0$$

ili

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\delta A^{\vec{F}_i}=0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\delta\vec{r}_i\right)=0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\delta A^{\vec{F}_i}\leq 0$$

Princip rada sila se može iskazati i u obliku: ***Ukupan rad svih sila na svim nezavisnim mogućim pomeranjima jednak je nuli, a za sistem sa jednostrano dejstvujućim vezama nije pozitivan.***

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\Delta A^{\vec{F}_i}=0 \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\Delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\left[Q_{(in),j}+Q_j{}^*+Q_j\right]\Delta q_j=0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\Delta A^{\vec{F}_i}\leq 0 \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\Delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\left[Q_{(in),j}+Q_j{}^*+Q_j\right]\Delta q_j\leq 0$$

ili

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\delta A^{\vec{F}_i}=0 \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\left[Q_{(in),j}+Q_j*+Q_j\right]\delta q_j=0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na materijalne tačke sistema:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\delta A^{\vec{F}_i}\le 0 \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\left[Q_{(in),j}+Q_j*+Q_j\right]\delta q_j\le 0$$

U slučaju ravnoteže sistema moraju sve generalisane sile biti jednake nuli $Q_j*+Q_j=0$, kao i sve generalisane sile inercije $Q_{(in),j}=0$. Na osnovu toga pišemo:

$$Q_j*+Q_j=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=0$$

$$Q_{(in),j}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{I}_{F,i},\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=0$$

To znači da i sve generalisane brzine moraju biti jednake nuli, odnosno $\dot{q}_i=0$.

$$Q_j*+Q_j=\left(\vec{F}_i+\vec{F}_{w,i},\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=0$$

U slučaju idealnih veza i kada su sve sile konzervativne i imaju funkciju sile $U(q_1,q_2,...,q_n)$ koja zavisi od generalisanih koordinata q_j $j=1,2,....,n$, onda mora u položaju ravnoteže sistema ta funkcija sile da ima ekstremnu vrednost. Kako je $Q_j=\dfrac{\partial U}{\partial q_i}$ to u položaju ravnoteže u kome su generalisane coordinate q_{0j} te sile treba ds budu jednake nuli

$$Q_j(q_{01},q_{02},...,q_{0n})=\left.\frac{\partial U(q_1,q_2,...,q_n)}{\partial q_j}\right|_{q_{0j},j=1,2,...,n}=0$$

Lagranž je, u svojoj Analitičkoj mehanici (1788) prvi formulisao ovu ***teoremu o stabilnosti skleronomnih konzervativnih sistema***, koju je kasnije dokazao *Dirišle* (*Lejeune Dirichlet* 1805-1850):

Ako u položaju ravnoteže konzervativnog holonomnog skleronomnog sistema funkcija sile ima maksimum (potencijalna funkcija minimu) onda je ravnoteža sistema stabilna; u protivnom je labilna ili pak indiferentna.

Sada posmatrajmo dva položaja i dva stanja sistema materijalnih tačaka:

Prvi položaj ravnoteže ćemo označiti sa O , i u tom položaju sistema položaj svake materijalne tačke odredjen nultim generalisanim koordinatama $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$.

Drugi, proizvoljan položaj sistema je u kretanju sistema i označimo isti sa N, i u tom, proizvoljnom, položaju sistema položaj svake materijalne tačke odredjen njegovim generalisanim koordinatama $q_j(t)$, $j=1,2,....,n$, koje su funkcije vremena t.

Prvo stanje sistema je stanje mirovanja. Ako je sistem u stanju mirovanja onda su sve brzine (izvodi generalisanih koordinata po vremenu) jednaki nuli kada je $\dot{q}_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$. To stanje mirovanja sistema ćemo označiti sa $\dot{O}$.

Drugo stanje sistema je stanje kada je system u kretanju. Ako je sistem u stanju kretanja onda su sve brzine (izvodi generalisanih koordinata po vremenu) funkcije vremena kada je $\dot{q}_j(t)=0$, $j=1,2,....,n$. To stanje kretanja sistema ćemo označiti sa $\dot{N}$.

Možemo reći da je sistem u stanju mirovanja kada je u stanju $\dot{O}$, $\dot{q}_j(t)=0$, $j=1,2,....,n$ u koordinatnom početku n- dimenzionog ''tangencijalnog prostora'' koordinata $\dot{q}_j$, $j=1,2,....,n$, koji odgovara n- dimenzionom prostoru generalisanih koordinata q_j $j=1,2,....,n$. Isto tako možemo reći da je sistem materijalnih tačaka u stanju mirovanja kada su sve brzine u ‘’’tangencijalnom prostoru’’ stanja kretanja u koordinatnom početku $\dot{O}$ n - dimenzionog prostora generalisanih brzina $\dot{q}_j$ $j=1,2,....,n$.

Možemo reći da je sistem u stanju kretanja kada je u stanju $\dot{N}$, kojoj odgovara $\dot{q}_j(t)$ $j=1,2,....,n$, odnosno u proizvoljnoj tački n - dimenzionog ‘’tangencijalnog prostora’’ koordinata $\dot{q}_j$, $j=1,2,....,n$, koji odgovara n - dimenzionom prostoru generalisanih koordinata q_j $j=1,2,....,n$. Isto tako možemo reći da je sistem materijalnih tačaka u stanju kretanja kada je bar jedna brzina u ‘’’tangencijalnom prostoru’’ stanja kretanja različita od nule, a system nije u koordinatnom početku $\dot{O}$ n - dimenzionog prostora generalisanih brzina $\dot{q}_j$ $j=1,2,....,n$.

Ako je sistem u ravnotežnom položaju i stanju mirovanja onda je istovremeno u položaju O koji je odredjen nultim generalisanim koordinatama $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$. i stanju $\dot{O}$ kome osgovara tačka $\dot{q}_j(t)=0$, $j=1,2,....,n$.

Ako je sistem u ravnotežnom položaju O koji je odredjen nultim generalisanim koordinatama $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$. i stanju $\dot{N}$, kome odgovaraju brzine $\dot{q}_j(t)$ $j=1,2,....,n$, odnosno stanju $\dot{N}$, onda kažemo da sistem prolazi kroz ravnotežno stanje, ali nije u stanju mirovanja, isžako je u položaju ravnoteže.

Sistem može mirovati i van položaja ravnoteže, kada moraju biti zadovoljeni I osnovni I dopunski uslovi. Naprimer uslovi prinudnog mirovanja, takodje i uslovi relativnog mirovanja, a zato je potrebna posebna analiza dinamike sistema. Ovde ćemo se dalje usmeriti na izučavanje stabilnosti položaja ravnoteže i mirovanja i kretanja oko ravnotežmog položaja.

Kako koordinatne sisteme biramo proizvoljno birajuči koordinatni početak, to generalisane coordinate možemo izabrati tako da su u položaju ravnoteže sistema sve generalisane koordinate jednake nuli: $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$, što smo i uradili u prethodnoj analizi. Zamislimo sada da u n-dimenzionom prostoru imamo sistem generalisanih koordinata q_j $j=1,2,....,n$ sa koordinatnim početkom u tački O koja odgovara položaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka. Sada oko te tačke O u tom n- dimenzionom prostoru opišemo sferu poluprečnika ρ tako da važi $\sum_{j=1}^{n=\#N=s} q_j^2=\rho^2$. Ta sfera obuhvata oblast (S) u kojoj za svaku od generalisanih koordinata važi $|q_i|\le\rho$, dok je za položaj ravnoteže sistema $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$ što definiše koordinatni početak u tački O , kada je $\sum_{j=1}^{n=\#N=s} q_{0j}^2=0$. Pretpostavimo da ρ može biti sasvim mali broj i to proizvoljno mali broj.

Sada, pretpostavimo da smo sistem izveli iz ravnotežnog položaja O i iz stanja mirovanja $\dot{O}$ u kome je bio u tom položaju ravnoteže. Znači iz položaja ravnoteže kada je $q_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$ i stanja mirovanja, kada je $\dot{q}_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$, *nekim poremećajem položaja ravnoteže i stanja mirovanja*, doveli smo sistem u stanje kretanja, $\dot{N}$ kome odgovaraju brzine $\dot{q}_j(t)$ $j=1,2,....,n$.

Pretpostavljamo sada da u odgovarajućem ‘’tangencijalnom’’ n- dimenzionalnom prostoru brzina $\dot{q}_j$ $j=1,2,....,n$ sa koordinatnim početkom u tački $\dot{O}$, koja odgovara stanju mirovanja sistema materijalnih tačaka, da možemo definisati ‘*’sferu brzina*’’ $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}\dot{q}_j^2=\varepsilon^2$, pri čemu je njen poluprečnik ε dovoljno veliki. Pretpostavimo takodje da za svaku od brzina važi da je $|\dot{q}_i|\le\varepsilon$. Ta sfera obuhvata oblast $(\dot{S})$ u kojoj za svaku od brzina (izvoda generalisanih koordinata oi vremenu) važi $|\dot{q}_i|\le\varepsilon$, dok je za stanje mirovanja sistema $\dot{q}_{0j}=0$, $j=1,2,....,n$ što definiše koordinatni početak u tački $\dot{O}$, kada je $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}\dot{q}_{0j}^2=0$.

Sada možemo formulisati sledeću ***teoremu***:

Ako ρ može biti po volji proizvoljno mala veličina tako da se pri saopštavanju početnih brzina $\left(\dot{q}_j\right)_0\neq 0$, $j=1,2,....,n$ može naći takva veličina ε tako da je $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}\left(\dot{q}_j^2\right)_0\leq\varepsilon^2$, odnosno $\left|\dot{q}_i\right|\leq\varepsilon$, i da sistem pri prelazu iz položaja O u polpžaj N ne izadje iz oblasti (S) sfere $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}q_j^2\leq\rho^2$ ravnoteža sistema je stabilna, jer je uvek $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}q_j^2(t)\leq\rho^2$, odnosno $\left|q_j(t)\right|\leq\rho$, $j=1,2,....,n$.

Ova teorema je u osnovi Ljapunovljeve teorije stabilnosti kretanja i mirovanja mehaničkih sistema. (***Анатоший Михайлович Ляпунов, 1850-1915,*** znameniti ruski naučnik čija je *teorija stabilnosti* i danas inspiracija za mnoga savremena istraživanja i u oblasti mehanike i matematike , aili u mnogim drugim naukama, gde je potrebno ispitivati stabilnost modela i dinamika sistema. Poznati su *Ljapunovljeve funkcije prve i druge vrste*, kao i *Ljapunovljevi eksponenti*).

Kako je sistem čiju stabilnost proučavamo konzervativni i skleronoman to za takav sistem važi teorema o održanju energije odnosno integral energije:

$$E=E_{k0}+E_{p0}=E_k+E_p=E_k-U=h=\cos nt$$

koji kaže da je ukupna energija sistema u toku kretanja jednaka energiji koju je sistem imao u početnom trenutku. Kako prethodnu relaciju, matematički iskaz teoreme o održanju energije odnosno integral energije moćemo napisati i u obliku

$$E_k=E_{k0}-\left(U_0-U\right)$$

koji nam je pogodan za analizu stabilnosti i dokaz teoreme o stabilnosti. Kako funkcija sile u položaju stabilne ravnoteže ima *maksimum*, to je $\left(U_0-U\right)>0$, jer je funkcija sile $U_9=U_{\max}$ u položaju ravnoteže. Ako sistem izvedemo iz položaja ravnoteže i dovedemo u stanje kretanja tako da neka generalisana koordinata ima najveću vrednost $q_i=\eta_{\max}$, dok ostale generalisane koordinate imaju proizvoljne vrednosti, ali su njihove apsolutne vrednosti manje od $\eta_{\max}$ tj, $\left|q_k\right|<\eta_{\max}$, onda razlika $\left(U_0-U\right)=P$ dobija različite vrednosti P_i. Pretpostavimo da je najmanja vrednost te razlike $P_{\min}$ i onda je sigurno da je $\left(U_0-U\right)>P_{\min}$. Ako su i početne brzine tako male da je $E_{k0}<P_{\min}$ onda je $E_k=E_{k0}-P_{\min}<0$, aovo ne može biti jer je $E_k>0$ uvek pozitivne veličine jer je po defoiniciji polovina zbira proizvoda kvadrata brzina materijalnih tačaka i njhovih masa. Isto tako treba imati na umu da ni koordinate q_j ne mogu dostići granične vrednosti $\eta_{\max}$. To je razlog da položaj sistema N ne može izaći iz oblasti (S) *sfere* $\sum_{j=1}^{n=\#N=s}q_j^2\leq\rho^2$. *To znači da je ravnotežni položaj stabilan prema Ljapunovljevoj teoremi I da je formulisana Lagranžeova, odnosno Ležen Dirišleova teorema o stabilnosti ranotežnog položaja za skleronomni konzervativni system dokazana.*

Da ponovim: U položaju stabilne ravnoteže potencijalna energija je u minimumo, a u položaju nestabilne ravnoteže ima maksimu.

Matematički iskaz ove teoreme o stabilnosti i nestabilnosti položaja ravnoteže je:

Uslov da je položaj položaj ravnoteže je da je prvi izvod potencijalne energije po generalisanoj koordinati jednak nuli:

$$Q_i=-\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0,\qquad i=1,2,.....,n$$

Uslov da je pložaj ravnoteže stabilan ili nestabilan zavisi od znaka drugog izvoda:

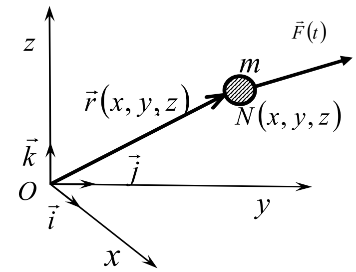
$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i^2}\right|_{\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0} = \begin{cases} >0 & stabi\ln a \\ =0 & indiferentna \\ <0 & nestabi\ln a \end{cases}$$

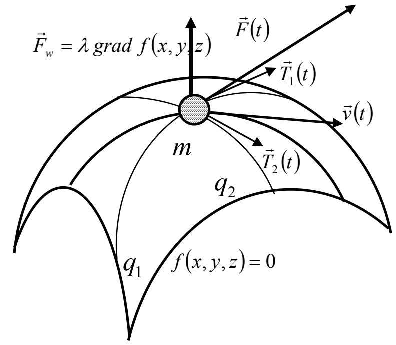
Ovaj kriterijum se može primenjivati i za ispitivanje stabilnosti položaja ravnoteže sistema u miru, pa je tada *statički kriterijum* stabilnosti. Takodje se primenjuje i u otpornosti materijala u formi *metode energije i metode deformacionog rada, jer je potencijalna energije deformisanog tela jednaka deformacionom radu utrošenom na deformaciji deformabilnog tela u oblasti do granica elastičnosti.*

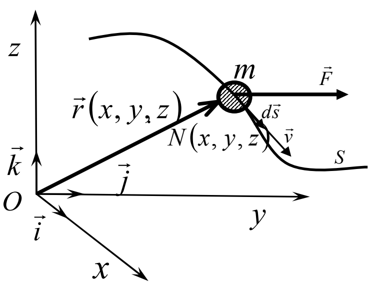
Ovde dodati primer sa dve materijalne tačke iz Teorije oscilacija.

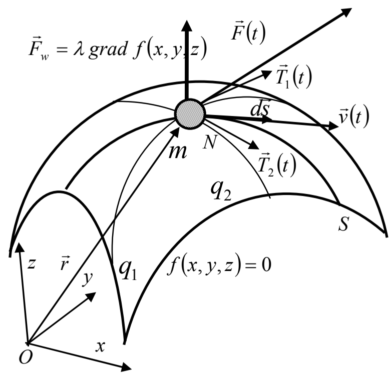
Ispitivanje stabilnosti je posebno važno kada se radi o specijalnim dinamikama – oscilacijama sistema sa više stepeni slobode kretanja kada se zakoni kretanja izražavaju u obliku: $q_i = C_i e^{\lambda t}$ *gde su* $\lambda_s = \alpha_s \mp i\beta_s$ *karakteristični brojevi. Tada se sastavlja karakteristična jednačina i ispituje znak realnog dela* α_s *njenih korena* $\lambda_s = \alpha_s \mp i\beta_s$, *koji moraju biti negativni da bi kretanje bilo stabilno. Takodje, u linearnim sistemima oscilacije su moguće samo oko stabilnih položaja ravnoteže.*

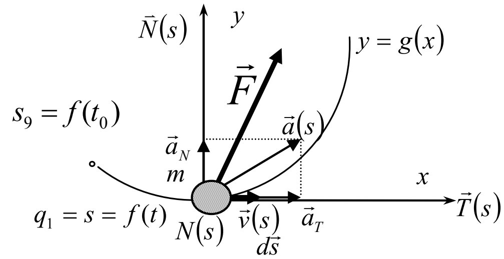
Isto tako teorija stabilnosti oscilatornih sistema se koristi za ispitivanbje stabilnosti kretanja, tako što se pišu jednačine u varijacijama (odstupanjima) od kretanja čiju stabilnost ispitujemo, pa se zadatak svodi na ispitivanje stabilnosti položaja ravnoteže.

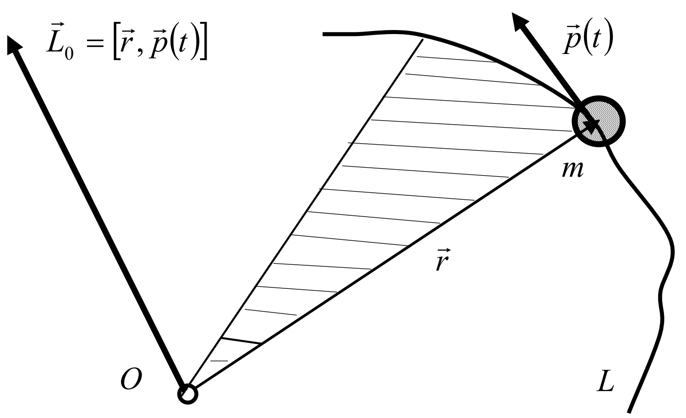

$\vec{F}(t)$
m
$\vec{r}(x,y,z)$
$N(x,y,z)$
z
$\vec{k}$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
y
x

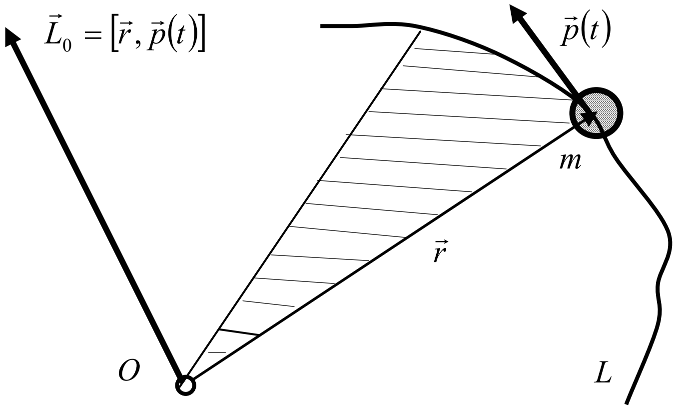

$\vec{F}_w = \lambda\, grad\, f(x,y,z)$
$\vec{F}(t)$
$\vec{T}_1(t)$
$\vec{v}(t)$
m
$\vec{T}_2(t)$
q_2
q_1
$f(x,y,z)=0$


z
m
$\vec{F}$
$\vec{r}(x,y,z)$
$N(x,y,z)$
$d\vec{s}$
$\vec{v}$
S
$\vec{k}$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
y
x


$\vec{F}_w = \lambda\, grad\, f(x,y,z)$
$\vec{F}(t)$
$\vec{T}_1(t)$
$d\vec{s}$
$\vec{v}(t)$
m
N
$\vec{T}_2(t)$
q_2
S
q_1
$f(x,y,z)=0$
O


$\vec{N}(s)$
y
$y = g(x)$
$\vec{F}$
$s_9 = f(t_0)$
$\vec{a}(s)$
$\vec{a}_N$
m
x
$q_1 = s = f(t)$
$N(s)$
$\vec{v}(s)$
$\vec{a}_T$
$\vec{T}(s)$
$d\vec{s}$


$\vec{L}_0 = [\vec{r}, \vec{p}(t)]$
$\vec{p}(t)$
m
$\vec{r}$
O
L


$\vec{L}_0 = [\vec{r}, \vec{p}(t)]$
$\vec{p}(t)$
m
$\vec{r}$
O
L

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.

.