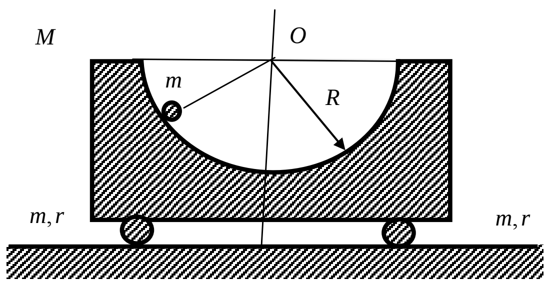
DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA – KINETIKA

1. Zadatak. Materijalni sistem se sastoji od suporta mase M, sa cilindričnim udubljenjem, idelno glatke površi, poluprečnika R, po kome se kreće materijalna tačka mase m, ne napuštajući vertikalnu ravan u kojoj je bila u početnom trenutku. Suport je postavljen na četiri točkića oblika homogenog diska, od kojih je svaki mase po m, poluprečnika po r, a koji se kotrljaju bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Ako je suport u početnom trenutku bio u miru, a maretijalna tačka iz položaja A izbačena početnom brzinom v_0 usmerenom u vertikalnom pravcu odrediti:

a* Broj stepeni slobode kretanja materijalnog sistema definisanog tekstiom zadatka;
b* Kinetičku i potencijalnu energiju sistema u početnom i proizvoljnom trenutku vremena;
c* Diferencijalne jednačine kretanja tog materijalnog sistema;
d* Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajuću relaciju;
e* Pritisk kuglice na suport i pritisak supotra na podlogu po kojoj se kreće, pod pretpostavkom da je rastojanje izmedju točkića suporta ℓ i da su simetrično rasporedjeni u odnosu na središte cilindrične površi.
f* odnos kinetičkih parametara sistema pri kome bi moglo doći do prevrtanja suporta i da li je moguće realizovati prevrtanje suporta?



Rešenje.

a* Materijalni system ima dva stepena slobode kretanja, jer se support moše kretati translatorno u horizontalnom pravcu, a materijalna tačka po cilindričnom udubljenju na suportu. Točkići suporta se kotrljaju bez klizanja po horizontalnoj podlozi bez kotrljanja i njhovo obrtno kretanje se može izraziti pomoću koordinate translatornog kretanja suporta, jer je brzina translacije centara točkića jednaka brzini kretanja suporta. Na osnovu toga biramo dve koordinate za generalisane koordinate sistema i to za pomeranje centra masa suporta (na simetrali suporta) u horizontalnom pravcu biramo koorinatu x, a za koordinatu relativnog položaja materijalne tačke na suportu ugao φ, koji zaklapa poteg ON sa horizontom, kako je to naznačeno na slici.

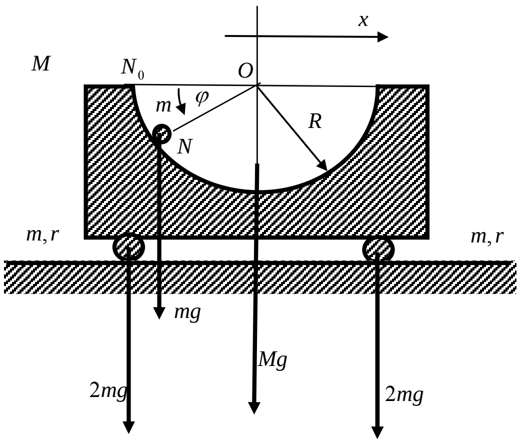
b* Od aktivnih sila na materijalni sistem dejstvuju sile težine: materijalne tačke mg, suporta Mg i četiri točka suporta svak po mg, kao što je to naznačeno na slici. Sve ove aktivne sile su konzervativne i imaju funkciju sile, odnosno potencijal. Kako se napadne tačke sila težine suporta i njegovih točkića ne pomeraju u vertikalnom pravcu to one vrše rad koji je jednak nuli. Sila težine materijalne tačke koja se kreće po cilindričnoj povrđi i u vertikalnoj ravni ne napuštajući je vrši rad koje je jednak

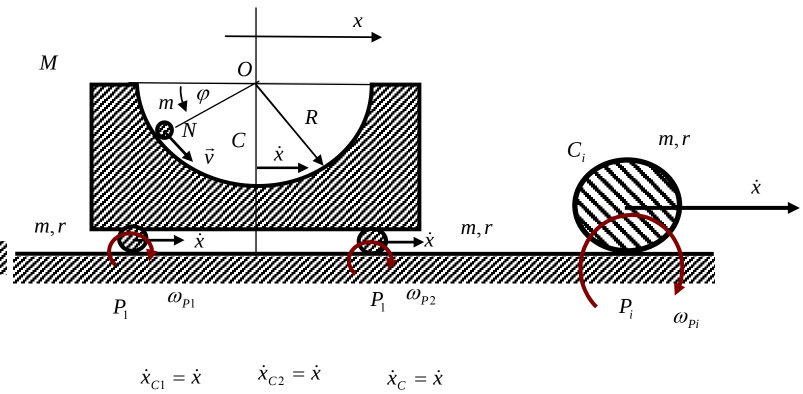
$$A = mgh = mgR\sin\varphi$$

jer se napadna tačka sile težine spusti za $h = R\sin\varphi$. Promena potencijalne energije u odnosu na početni položaj materijalne tačke do njenog proizvoljnog položaja odredjenog uglom φ na suportu i i položaja suporta odredjenog koordinatom x je:

$$E_p = -A = -mgR\sin\varphi$$

i vidimo da ne zavisi od koordinate x položaja suporta.





Izraz za kinetičku energiju sistema sastavljamo iz kinetičkih energije pojedinačno materijalne tačke koja se ralativno kreće po suportu brzinom $v_{rel} = R\dot{\varphi}$, a ima I prenosnu komponentu jednaku brzini kretanja suporta $v_{pren} = v_{Sup} = \dot{x}$, kinetičke energije translacije suporta brzinom $v_{Sup} = \dot{x}$ i konetičkih energija točkića suporta koje se pojedinačno mogu izraziti kao kinetičke energije rotacije oko trenutnih osa rotacije koje padaju u pravac dodirnih linija točkića sa podlogom.

Apsolutna brzina materijalne tačke $\vec{v}_a$ jenaka je zbiru njene realzivne brzine relativnog kretanja po suportu i brzine prenosnog kretanja one tačke suporta u kojoj se trenutno nalazi pri relativnog kretanja po cilindričnoj površi:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{pren}$$

$$\vec{v}_{rel} = R\dot{\varphi}\left(-\vec{j}\cos\varphi + \vec{i}\sin\varphi\right)$$

$$\vec{v}_{pren} = \dot{x}\vec{i}$$

Kvadrat brzine materijalne tačke je:

$$v_a^2 = \left(\dot{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + \left(R\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Ugaone brzine trenutne rotacihje točkića odrdjujemo pomoću brzine translacije centra točkića $v_{Ci} = \dot{x}_{Ci} = \dot{x} = R\omega_{Pi}$, koja je i brzina kojom rotira taj centar oko ose trenutne rotacije točkića, odakle dobijamo:

$$v_{Ci} = \dot{x}_{Ci} = \dot{x} = R\omega_{Pi}$$

$$\omega_{Pi} = \frac{\dot{x}}{R}.$$

Aksijalni moment inercije mase jednog točkića za trenutnu osu njegove rotacije je: $J_{P_i\zeta} = \frac{3}{2}mr^2$, jer je za dogovarajuću osu kroz njegov centar: $J_{C_i\zeta} = \frac{1}{2}mr^2$, je po Steiner-ovoj teoremi jednak zbiru aksijalnog momenta inercije za centralnu osu i položajnog u odnosu na centralnu osu paralelnu osu za koju se traži:

$$J_{P_i\zeta} = J_{C_i\zeta} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Na osnovu prethodne analize izraz za kinetičku energiju možemo da napišemo u obliku:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{Sup}^2 + \frac{1}{2}mv_a^2 + 4\frac{1}{2}J_{P_i\zeta}\omega_{P_i}^2$$

te je:

$$E_k = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right) + 4\frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

što posle sređivanja daje sledeći izraz za kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{1}{2} m \left[(\mu + 4)\dot{x}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + (2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi) \right]$$

gde smo uveli oznaku: $\mu = \dfrac{M}{m}$.

c* Da bi smo sastavili diferencijalne jednačine kretanja, možemo koristiti dva različita pristupa. S obzirom da smo napisali izraze za kinetičku i potencijalnu energiju možemo koristiti Lagrange+ove jednačine druge vrste za generalisane koordinate sistema φ i x u obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

Kako su izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju sistema:

$$E_p = -mgR\sin\varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left[(\mu + 4)\dot{x}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + (2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi) \right]$$

To su tražene diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema:

$$\frac{d}{dt}\left\{ m\left[R^2\dot{\varphi} + R\dot{x}\sin\varphi \right] \right\} - mR\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - mgR\cos\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{ m\left[(\mu + 4)\dot{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi \right] \right\} = 0$$

odnosno

$$R\ddot{\varphi} + \ddot{x}\sin\varphi - g\cos\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\mu + 4)\dot{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi \right] = 0$$

Ako pak, proanaliziramo izraze za kinetičku i potencijalnu energiju, vidimo da i potencijalna i kinetička energija ne zavise od koordinate x, te iz druje Lagrange-ove diferencijalne jednačine sledi da je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 0$$

odnosno sledi integral:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = const$$

što daje:

$$\left[(\mu + 4)\dot{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi \right] = const = 0$$

jer je u početnom trenutku brzina suporta bila jednaka nuli, $\dot{x}(0) = 0$, a i tom trenutku je ugao $\varphi(0) = 0$ bio jednak nuli.

Prethodna diferencijalna jednačina razdvaja promenljive i njen integral je:

$$\dot{x} = -\frac{R}{\mu + 4}\dot{\varphi}\sin\varphi \quad / dt$$

$$dx = -\frac{R}{\mu + 4}\sin\varphi d\varphi$$

$$x = \frac{R}{\mu + 4}\left[\cos\varphi - \cos\varphi(0) \right]$$

$$x = -\frac{R}{\mu + 4}\left[1 - \cos\varphi \right]$$

Iz druge Lagrange-ove diferencijalne jednačine dobijamo:

$$\ddot{x} = -\frac{R}{\mu + 4}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi \right)$$

te unošenjem u prvu

$$R\ddot{\varphi} + \ddot{x}\sin\varphi - g\cos\varphi = 0$$

dobijamo:

$$R\ddot{\varphi} - \frac{R}{\mu+4}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\sin\varphi - g\cos\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{\mu+4}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\sin\varphi - \frac{g}{R}\cos\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi}\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right] - \frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - \frac{g}{R}\cos\varphi = 0$$

ili

$$\ddot{\vartheta}\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)\right] - \frac{1}{\mu+4}\dot{\vartheta}^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right) - \frac{g}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right) = 0$$

$$\ddot{\vartheta}\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\cos^2\vartheta\right] + \frac{1}{\mu+4}\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{g}{R}\sin\vartheta = 0$$

pri čemu se ugao ϑ meri od vertikale u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu.

Ova diferencijalna jednačina je nelinearna i nije jednostavno je rešiti u analitičkom obliku, zašto je potrebno naći odgovarajuću smenu promenljivih integracije. Možemo je transformisati i napisati u sledećem obliku sistema od dve nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\cos^2\vartheta\right]}\left[\frac{1}{\mu+4}u^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{g}{R}\sin\vartheta\right]$$

d* S obzirom da je sistem konzervativan to važi integral energije pa sledi da je:

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left[(\mu+4)\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \left(2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\right] - mgR\sin\varphi = const.$$

Kako je

$$\dot{x} = -\frac{R}{\mu+4}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

to možemo da napišemo sledeći integral kretanja:

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1\right)R^2\dot{\varphi}^2\right] - mgR\sin\varphi = const.$$

Iz prethodnog integrala energije moguće je napisati sledeću jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}}. \qquad dt = \sqrt{\frac{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}}\,d\varphi \qquad t = \int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}}\,d\varphi$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\varphi - 1}{1 + b^2\sin\varphi}}\,d\varphi$$

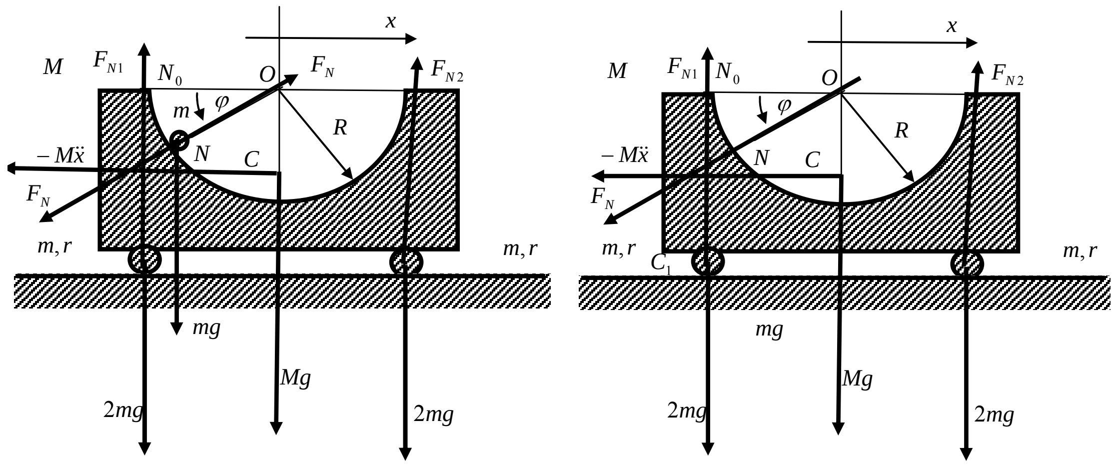
gde je

$$a^2 = \frac{1}{\mu+4} \qquad b^2 = \frac{2g}{Rh}$$

čime smo došli do konačnih jednačina relativnog kretanja materijalne tačke po suportu, a i suporta u obliku:

$$x = -\frac{R}{\mu + 4}\left[1 - \cos\varphi\right]$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\varphi - 1}{1 + b^2\sin\varphi}}d\varphi$$



f* Da bi smo našli otpor veze kretanju materijalne tačke po njoj potrebno je da napišemo jednačinu veze, koja je ovde pokretna cilindrićna površ koja zavisi od koordinate položaja suporta jer se sa njim kreće translatorno brzinom:

$$\dot{x} = -\frac{R}{\mu + 4}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Pretpostavimo da znamo $\varphi = \varphi(t)$ onda su koordinate materijalne tačke:

$$x_N = x - R\cos\varphi$$

$$y_N = -R\sin\varphi$$

a s obzirom da se materijalna tačka kreće prinudno po cilindričnoj površi koja se kreće sa suportom, to je sada jednačina pokretne površi (veze koja dejstvuje na materijalnu tačku):

$$f(x_N, y_N) = (x_N - x(t))^2 + y_N^2 - R^2 = 0$$

Otpor veze je:

$$\vec{F}_N = \lambda m grad\ f(x_N, y_N) = 2\lambda m\left[(x_N - x(t))\vec{i} + y_N\vec{j}\right]$$

te su Lagrange-ove jednačine prve vrste u obliku:

$$m\ddot{x}_N = \lambda m\frac{\partial f}{\partial x_N}$$

$$m\ddot{y}_N = -mg + \lambda m\frac{\partial f}{\partial y_N}$$

Ovim jednačinama pridružujemo uslov za brzinu:

$$(\vec{v}_N, gradf) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Za zadatu reonomnu vezu Lagrange-ove jednačine prve vrste su u obliku:

$$m\ddot{x}_N = 2\lambda m(x_N - x(t))$$

$$m\ddot{y}_N = -mg + 2\lambda m y_N$$

Kako je

$$\dot{x}_N = \dot{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y}_N = R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\ddot{x}_N = \ddot{x} + R\ddot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\ddot{y}_N = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

to unošenjem u prethodni sistem nije teško dobiti sledeće:

$$\ddot{x}_N = \ddot{x} + R\ddot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi = 2\lambda R\cos\varphi$$

$$\ddot{y}_N = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -g - 2\lambda R\sin\varphi$$

Iz prve i iz druge jednačine odredjujemo Lagranžeov množilac veze u obliku:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{x}}{R\cos\varphi} + \ddot{\varphi}tg\varphi + \dot{\varphi}^2\right]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{R\sin\varphi} + \ddot{\varphi}ctg\varphi - \dot{\varphi}^2\right]$$

Izjednačavanjem dobijenih izraza dobijamo:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{R\sin\varphi} + \ddot{\varphi}ctg\varphi - \dot{\varphi}^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{x}}{R\cos\varphi} + \ddot{\varphi}tg\varphi + \dot{\varphi}^2\right]$$

odakle sledi:

$$\frac{g}{R\sin\varphi} + \ddot{\varphi}\left(ctg\varphi + tg\varphi\right) + \frac{\ddot{x}}{R\cos\varphi} = 0$$

odnosno:

$$\ddot{x}\sin\varphi + \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\cos\varphi = 0$$

A to je jednačina koju smo dobili iz prve Lagrangeove jednačine druge vrste, što je potvrda da smo Lagrange-ov množilac veze odredili korektno. To znači da dalje možemo koristiti Lagrange-ov množilac veze u sledećem obliku:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{R\sin\varphi} + \ddot{\varphi}ctg\varphi - \dot{\varphi}^2\right]$$

Pa je otpor reonomne veze:

$$F_N = \lambda m grad\ f\left(x_N, y_N\right) = 2\lambda m\left[\left(x_N - x(t)\right)\vec{i} + y_N\vec{j}\right]$$

$$x_N = -\frac{R}{\mu+4}\left[1-\cos\varphi\right] - R\cos\varphi = -\frac{R}{\mu+4}\left[1 + \left(\mu+3\right)\cos\varphi\right]$$

$$y_N = -R\sin\varphi$$

$$x = -\frac{R}{\mu+4}\left[1-\cos\varphi\right]$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left[\frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{g}{R}\cos\varphi\right]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{R\sin\varphi} + \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left[\frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{g}{R}\cos\varphi ctg\varphi\right] - \dot{\varphi}^2\right]$$

$$\lambda = \frac{1}{2\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi} - \frac{g}{R\sin\varphi}\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi + \frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{g}{R}\cos\varphi ctg\varphi - \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi} - \frac{g}{R}\frac{1}{\mu+4}\sin\varphi + \frac{g}{R}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\mu+3}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi}\left[\left(1+\cos^2\varphi\right) - \frac{1}{(\mu+4)}\sin^2\varphi\right] - \frac{\mu+3}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi}\left[\left(1+\cos^2\varphi\right) - \frac{1}{(\mu+4)}\sin^2\varphi\right] - \frac{\mu+3}{\mu+4}\frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}\right\}$$

Pritisak materijalne tačke na cilindričnu površ suporta je:

$$\vec{F}_N = \lambda mgrad\ f\left(x_N, y_N\right) = 2\lambda Rm\left[\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}_N = \frac{mR\left(\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}\right)}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi}\left[\left(1+\cos^2\varphi\right) - \frac{1}{(\mu+4)}\sin^2\varphi\right] - \frac{\mu+3}{\mu+4}\frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}\right\}$$

Dok je intenzitet te sile veze koja desjtvuje na materijalnu tačku, ali i na suport:

$$F_N = \frac{mR}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi}\left[\left(1+\cos^2\varphi\right) - \frac{1}{(\mu+4)}\sin^2\varphi\right] - \frac{\mu+3}{\mu+4}\frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}\right\}$$

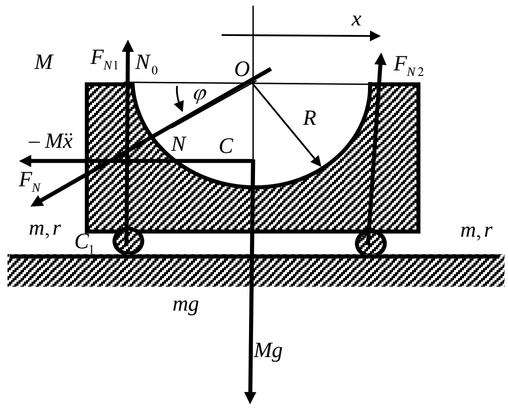
U nekom proizvoljnom položaju otpor veze prolazi kroz centar krivine cilindrične površi, koji je pokretan. Pritisak suporta na osovine točkova možemo odrediti koristeći princip dinamičke ravnoteže za tačku u centru prvog točka, pri čemu smo napravili prvo dekompoziciju sistema i uticaj materijalne tačke na suport zamenili silom pritiska $\vec{F}_N$ koja stalno prolazi kro tačku O koja je pokretna, a takodje ćemo pretpostaviti da je visinska razlika između centara točkova i taćke O jednaka c, kao i da je centar masa suporta u tački C.koja je udaljena za $\frac{\ell}{2}$ od obe osovne točkova, kao i da je na visini y_C iznad njih. Takodje ne gubimo iz vida da na suport koji se kreće translatorno dejstvuje sila inercije $(-M\ddot{x})$ sa napadnom tačkom u centru masa suporta. Tada možemo odrediti koordinatne napadne tačke sile kao

$$x_N = -\frac{R}{\mu+4}\left[1 + (\mu+3)\cos\varphi\right]$$

$$y_N = -R\sin\varphi$$

odnosno vektor položaja te napadne tačke u odnosu na momentnu tačku C_1 je:

$$\overrightarrow{C_1N} = \left(\frac{\ell}{2} + x_N\right)\vec{i} + \left(c + y_N\right)\vec{j} = \left\{\frac{\ell}{2} - \frac{R}{\mu+4}\left[1 + (\mu+3)\cos\varphi\right]\right\}\vec{i} + \left(c - R\cos\varphi\right)\vec{j}$$



Iz momentne jednačine za momentnu tačku C_1 sada je

$$\sum_i M^{\vec{F}_i} = 0 \qquad F_{N1}\ell + M\ddot{x}y_C + F_N\cos\varphi(H - R\sin\varphi) - F_N\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi\right) - Mg\frac{\ell}{2} = 0$$

a odatle odredjujemo pritisak suporta na osovinu desnih tiočkića:

$$F_{N1} = \frac{1}{\ell}\left\{Mg\frac{\ell}{2} - M\ddot{x}y_C - F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

dok pritisak suporta na osovinu levih točkića

$$F_{N2} = Mg + F_N\sin\varphi - F_{N1}$$

$$F_{N2} = \frac{Mg}{2} + F_N\sin\varphi + \frac{1}{\ell}\left\{M\ddot{x}y_C + F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

u kojima su:

$$F_N = \frac{mR}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left\{\frac{g}{R\sin\varphi}\left[\left(1+\cos^2\varphi\right) - \frac{1}{(\mu+4)}\sin^2\varphi\right] - \frac{\mu+3}{\mu+4}\,\frac{h + 2\frac{g}{R}\sin\varphi}{\frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi - 1}\right\}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left[\frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{g}{R}\cos\varphi\right]$$

$$x = -\frac{R}{\mu+4}[1 - \cos\varphi]$$

$$\dot{x} = -\frac{R}{\mu+4}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x} = -\frac{R}{\mu+4}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

$$\ddot{x} = -\frac{R}{\mu+4}\left\{\frac{1}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left[\frac{1}{\mu+4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin^2\varphi + \frac{g}{R}\cos\varphi\sin\varphi\right] + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right\}$$

$$\ddot{x} = -\frac{R}{(\mu+4)}\frac{\cos\varphi}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]}\left(\frac{g}{R}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\right)$$

Sila inercije koja dejstvuje na suport je:

$$I_F = -M\ddot{x} = \frac{MR}{(\mu+4)} \frac{\cos\varphi}{\left[1 - \frac{1}{\mu+4}\sin^2\varphi\right]} \left(\frac{g}{R}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \right)$$

Do prevrtanja može doći i oko levih i oko desnih točkića kada sila pritiska na osovine bude jednaka nuli ili negativna, pa je potrebno da su zadovoljeni jedan od dva uslova::

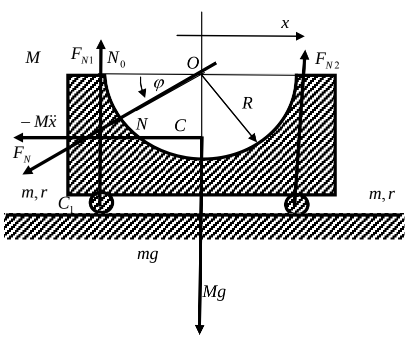
$$: \qquad F_{N1} = \frac{1}{\ell}\left\{ Mg\frac{\ell}{2} - M\ddot{x}y_C - F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi \right) \right] \right\} \le 0$$

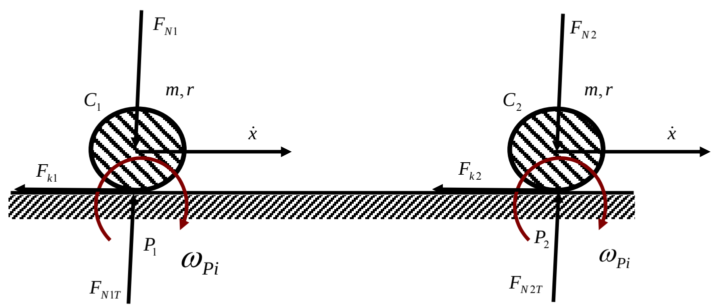
ili

$$F_{N2} = \frac{Mg}{2} + F_N\sin\varphi + \frac{1}{\ell}\left\{ M\ddot{x}y_C + F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi \right) \right] \right\} \le 0$$

Iz jednog od ovih uslova dobijamo ugao φ koji odredjuje položaj materijalne tačke u kome može doći do prevrtanja suporta, a iz uslova da je taj ugao realan na konstrukciji možemo doći do veze parametara sistema kada je moguće da dođe do prevrtanja suporta oko osovinica točkova.

Ostaje još zadatak odredjivanja pritisaka točkova na poddlogu, a to se može odrediti iz uslova dinamičke ravnoteže svakog od točkova uzimajući u obzir da oni vrše ravanska kretanja ili iz jednačina kretanja na osnovu teorema o promeni impulsa kretanja I momenta impulsa kretanja.





Za svaki od točkova sada možemo da napišemo jednačine ravanskog kretanja pomoću jednačina kretanja centra masa i reativnog kretanja oko centra masa:

$$m\ddot{x}_{C1} = X_{C1} - F_{k1}: \qquad\qquad m\ddot{x}_{C2} = X_{C2} - F_{k2}$$

$$my_{C1} = -F_{N1} + F_{N1T} = 0 \qquad\qquad my_{C2} = -F_{N2} + F_{N2T} = 0$$

$$J_{C1\zeta}\dot{\omega}_{C1\zeta} = -F_{k1}r \qquad\qquad J_{C2\zeta}\dot{\omega}_{C2\zeta} = -F_{k2}r$$

Iz ovih jednačina nije teško zaključiti da je pritisak na tlo točkova suporta:

$$F_{N1T} = \frac{1}{\ell}\left\{ Mg\frac{\ell}{2} - M\ddot{x}y_C - F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi \right) \right] \right\}$$

$$F_{N2T} = \frac{Mg}{2} + F_N\sin\varphi + \frac{1}{\ell}\left\{ M\ddot{x}y_C + F_N(\varphi)\left[\cos\varphi(H - R\sin\varphi) + F\sin\varphi\left(\frac{\ell}{2} - R\cos\varphi \right) \right] \right\}$$