DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA – KINETIKA

Mehanika III - Dinamika - Kinetika

Tekst zadatka. Homogeni kružni disk mase M, poluprećnika r, kotrlja se bez klizanjnja niz glatku strmu ravan dužine ℓ, nagibnog ugla α, koja prelazi u idealno glatku cilindrično polukružnu površ poluprečnika R, kao što je prikazano na slici. Za vreme kretanja disk ne napušta vertikalnu ravan, koja je prikazana na slici i sadrži presek sa strmom ravni i cilindrično polučružnom površi.
U početku kretanja, kada je disk bio na gornjem kraju strme ravni, centar diska je dobio početnu brzinu v_0 paralelnu strmoj ravni. Odrediti:

a* Ubrzanje i brzinu centra diska u proizvoljnom položaju na strmoj ravni, kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar;

b* Silu otpora kotrljanja diska po strmoj ravni kao i silu pritiska na ravan u proizvoljnom položaju;

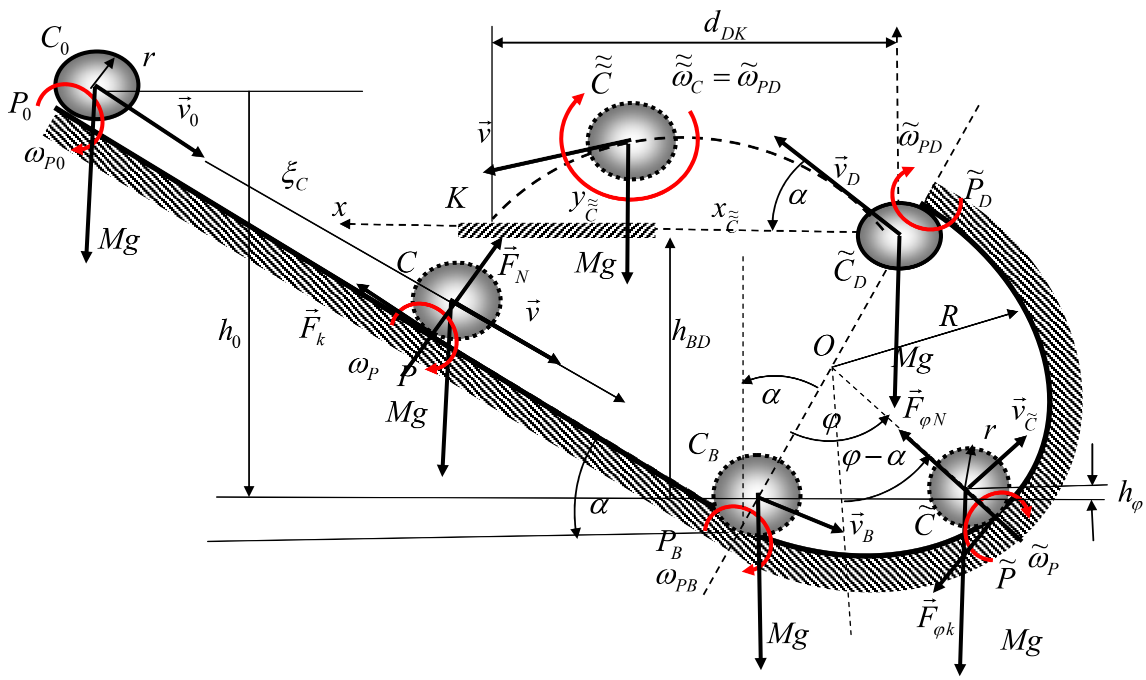
c* Brzinu centra diska u položaju prelaska sa strme ravni na polukružnu površ , kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar u tom položaju;

d* Brzinu centra diska u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi, kao i ugaonu brzinu sopstvenog obrtanja diska oko ose kroz njegov centar u tom položaju;

e* Silu otpora kotrljanja diska u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi, kao i silu pritiska na tu površ.

f* Koje uslove treba da zadovolje kinetički i geometrijski parametri sistema, te da disk može da dospe u najvišu tačku D kotrljajući se po polukružno cilindičkoj površi?

g* Jednačinu putanje i zakone kretanja diska po napuštanju površi, kao u domet u pravcu horizontale na nivou položaja napuštanja polukružno cilindričke površi.



Diferencijalnu jednačinu dinamike –ravanskog kretanja diska niz strumu ravan možemo predstaviti kao kotrljanje bez klizanja po strmoj ravni i to rotacijom oko trenutnog pola P u dodiru diska i strme ravni. Ta tačka P je trenutni pol i pomera se niz strum ravan isto toliko koliko i centar diska, ali s obzirom na simetriju diska aksijalni moment inercije diska za trenutnu osu roracije upravnu na disk i kroz trenutni pol rotacije je uvek jednak i iznosi:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta} = \mathbf{J}_{\mathbf{C}\zeta} + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

Kotrljanje diska po strmoj ravni predstavlja ravansko kretanje tela pod dejstvom aktivne sile sopstvene težine diska i pod dejstvom veza (strama rava u prvom delu puta, polukružna površ u drugom delu puta i slobodno od veza ravansko kretanje diska u trećem delu puta), pa sistem u prva dva dela puta ima jedan stepen slobode kretanja, dok kada napusti veze ima dva stepena slobode kretanja. Zato za prvi deo puta kada se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni za generalisanu koordinatu na tom delu puta usvojimo koordinatu ξ_C kretanja centra diska C paralelno strmoj ravni na odstojanju r od nje, kao što je to naznačeno na slici. Od aktivnih sila dejstvuje sila težine Mg, a od pasivnih reaktivnih se javlja normalna komponeta otpora $\overline{F}_N$ strme ravni kao idealne veze i jedna tangencijalna komponenta koja predstavlja silu otpora kotrljanja $\vec{F}_k$. Obe ove komponente prolaze kroz trenutni pol P i moment tih sila za trenutnu osu rotacije diska kroz pol P je jednak nuli. Na osnovu teoreme o promeni momenta impulsa kretanja za trenutnu osu rotacije kroz pol P je:

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}_P^{\vec{G}}$$

odnosno

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}\dot{\omega}_P = Mgr\sin\alpha$$

gde smo sa ω_P označili ugaonu brzinu obrtanja diska oko trenutne ose rotacije, a kako je brzina centra diska

$$v_C = \dot{\xi}_C = r\omega_P$$

to diferencijalnu jednačinu kretanja dobijamo u obliku:

$$\frac{3}{2}Mr^2\frac{\ddot{\xi}_C}{r} = Mgr\sin\alpha$$

odnosno

$$\ddot{\xi}_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Integraljenjem prethodne jednačine dobijamo jednačinu promene brzina i jednačinu puta u sledećem obliku:

$$v_C = \dot{\xi}_C = \frac{2}{3}gt\sin\alpha + v_0$$

gde je v_0 početna brzina kretanja centra diska, a t vreme.

$$\xi_C = \frac{1}{3}gt^2\sin\alpha + v_0 t$$

Neka je dužina strme ravni $x_{0B} = \ell$ onda je lako odrediti vreme za koje će se disk dokotrljati do položaja B.

$$t^2 + \frac{3v_0}{g\sin\alpha}t - \frac{3\ell}{g\sin\alpha} = 0$$

čiji su koreni

$$t_{B1,2} = -\frac{3v_0}{2g\sin\alpha} \mp \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2 + \frac{3\ell}{g\sin\alpha}}$$

Rešenje prethodne jednačine sa znakom minus ne zadovoljava jer vreme mora da teče unapred, tj. da je pozitivno, te je rešenje:

$$t_B = \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2 + \frac{3\ell}{g\sin\alpha}} - \frac{3v_0}{2g\sin\alpha}$$

te je brzina v_B centra diska kojom on dospeva u položaj B

$$v_{CB}=\dot{\xi}_{CB}=\frac{2}{3}g\sin\alpha\left(\sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2+\frac{3\ell}{g\sin\alpha}}-\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)+v_0$$

$$v_{CB}=\dot{\xi}_{CB}=\frac{2}{3}g\sin\alpha\left(\sqrt{\left(\frac{3v_0}{2g\sin\alpha}\right)^2+\frac{12\ell g\sin\alpha}{(2g\sin\alpha)^2}}\right)$$

Znači da je brzina kojom disk, koji se dokotrljao do polukružne površi, u istu, ulazi sa brzinom centra jednakoj vrednosti:

$$v_{CB}=\dot{\xi}_{CB}=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha}$$

To je i početna brzina kretanja centra diska za kotrjanje po polukružnoj površi.

Sledeća faza kotrljanja diska po polukružnoj površi je takodje ravansko kretanje krutog tela pod dejstvom veza pa sistem ima jedan stepen slobode kretanja, jer se to kretanje, kao i po strmoj ravni može predstaviti obrtanjem oko trenutne ose rotacije, koja uvek prolazi kroz dodirnu tačku P diska i polukružne površi, a iako se ta tačka pomera, aksijalni moment inercije za tu osu diska je isti kao i u prethodnom slučaju, te je

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}=\mathbf{J}_{\mathbf{C}\zeta}+Mr^2=\frac{3}{2}Mr^2$$

Sada za generalisanu koordinatu kretanja pogodno je uzeti ugao φ koji zaklapa poteg $O\widetilde{C}$ povučen kroz centar diska $\widetilde{C}$ i centar polukružne površi O, a koji merimo od potega OB - centar polukružne površi položaj diska B ulaska u isti.

Kako se brzina $\vec{v}_{\widetilde{C}}$ centra diska $\widetilde{C}$ može posmatrati kao periferijska brzina pri obrtanju oko centara polukružne površi O, ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$ na rastojanju $R-r$, kao i rotacija ugaonom brzinom $\widetilde{\omega}_P$ oko trenutne ose kroz dodirnu tačku $\widetilde{P}$ diska i polukružne površi na rastojanju r jednakom poluprečniku diska to pišemo:

$$\vec{v}_{\widetilde{C}}=(R-r)\dot{\varphi}=r\widetilde{\omega}_P$$

te je

$$\widetilde{\omega}_P=\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}$$

Od aktivnih sila na disk i na ovom delu puta dejstvuje sila težine Mg, a od pasivnih reaktivnih se javlja normalna komponeta otpora $\vec{F}_{\varphi N}$ strme ravni kao idealne veze i jedna tangencijalna komponenta koja predstavlja silu otpora kotrljanja $\vec{F}_{\varphi k}$. Obe ove komponente prolaze kroz trenutni pol P i moment tih sila za trenutnu osu rotacije diska kroz pol $\widetilde{P}$ je jednak nuli. Na osnovu ***teoreme o promeni momenta impulsa kretanja za trenutnu osu rotacije kroz pol*** $\widetilde{P}$ je:

$$\frac{d\vec{L}_{\widetilde{P}}}{dt}=\vec{M}_{\widetilde{P}}^{\vec{G}}$$

odnosno

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}\zeta}\dot{\widetilde{\omega}}_P=-Mgr\sin(\varphi-\alpha)$$

$$\frac{3}{2}Mr^2\frac{R-r}{r}\ddot{\varphi}=-Mgr\sin(\varphi-\alpha)$$

Sad diferencijalnu jednačinu kretanja - kotrljanja diska možemo da napišemo u obliku:

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha)=0$$

i to je nelinearna diferencijalna jednačina. Istu možemo da integralimo tako što ćemo je prvo pomnožiti sa $2\dot{\varphi}dt=2d\varphi$, što daje:

$$2\dot{\varphi}dt\frac{d\dot{\varphi}}{dt}+\frac{4g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha)d\varphi=0$$

Posle integraljenja u granicama brzina centra diska od položaja B, u kome je $\varphi=0$ i brzina v_B, koju smo odredili na delu kotrljanja diska po strmoj ravni, pa do položaja odredjenog uglom φ, možemo da pišemo:

$$\dot{\varphi}^2=\dot{\varphi}_B^2+\frac{4g}{3(R-r)}\left[\cos(\varphi-\alpha)-\cos\alpha\right]$$

a kako je

$$\omega_{PB}=\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}_B=\frac{v_B}{r}=\frac{\dot{\xi}_{CB}}{r}=\frac{1}{r}\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha}$$

to sledi da je:

$$v_{\tilde{C}}^2=(R-r)^2\dot{\varphi}^2=v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha+\frac{4g(R-r)}{3}\left[\cos(\varphi-\alpha)-\cos\alpha\right]$$

Kada je disk pri kotrljanju u proizvoljnom položaju na polukružnoj površi.

Kada disk dospe u položaj D, u kome je $\varphi=\pi$ njegova brzina je odredjena sledećim izrazom:

$$v_{\tilde{C}D}^2=v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha$$

Da bi disk dospeo u taj položaj, potrebno je da početna brzina centra diska bude takva da u tom položaju sila pritiska diska na polukružnu površ ne bude jednaka nuli pre tog položaja. Zato je potrebno odrediti silu protiska na jednostranu vezu koja dejstvuje na disk – na polukružnu površ.

Da bi smo odredili tu silu veze, odnosno silu pritiska potrebno je da napišemo jednačine dinamičke ravnoteže diska u stanju kotrljanja po polukružnoj površi, koristeći jednačine ravanskog kretanja krutog tela, preko kretanja centra masa i relativnog kretanja oko centra masa i to u sistemu prirodnih koordinata kretanja diska :

* za tangencijalni pravac na putanju kretanja centra diska

$$M\frac{dv_{\tilde{C}}}{dt}=-F_{\varphi k}-Mg\sin(\varphi-\alpha)$$

* za radijalni pravac na putanju kretanja centra diska

$$M\frac{v_{\tilde{C}}^2}{R-r}=F_{\varphi N}-Mg\cos(\varphi-\alpha)$$

* za relativno kretanje diska oko centra masa:

$$\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\dot{\tilde{\omega}}_{\tilde{C}}=F_{\varphi k}r$$

I poslednje odredjujemo silu otpora kotrljanja diska po polukružnoj površi u obliku:

$$F_{\varphi k}=\frac{\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\dot{\tilde{\omega}}_{\tilde{C}}}{r}=\frac{Mr^2}{2r}\frac{R-r}{r}\ddot{\varphi}=\frac{M}{2}(R-r)\ddot{\varphi}$$

jer je

$$\tilde{\omega}_{\tilde{C}}=\tilde{\omega}_P=\frac{R-r}{r}\dot{\varphi},$$

Unošenjem sile otpora kotrljanja u prvu jednačinu, kao imajući u obzir da je $v_{\tilde{C}}=(R-r)\dot{\varphi}$ dobijamo:

$$M(R-r)\ddot{\varphi}=-\frac{M}{2}(R-r)\ddot{\varphi}-Mg\sin(\varphi-\alpha)$$

odakle sledi:

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin(\varphi-\alpha)=0$$

Ova jednačina je identična sa onom koju smo dobili pišući jednačinu kotrljanja diska oko trenutne ose rotacije i iz koje smo odredili brzinu u obliku:

$$v_{\tilde{C}}^2 = (R-r)^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha + \frac{4g(R-r)}{3}\left[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha\right]$$

Sada nije teško odrediti silu otpora polukružne površi, niti pak silu kotrljanja diska po polukružnoj površi.

$$F_{\varphi N} = Mg\cos(\varphi-\alpha) + M\frac{v_{\tilde{C}}^2}{R-r}$$

$$F_{\varphi N} = M\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{Mg}{3}\left[7\cos(\varphi-\alpha) + \frac{4\ell}{R-r}\sin\alpha - 4\cos\alpha\right]$$

$$F_{\varphi k} = -\frac{Mg}{3}\sin(\varphi-\alpha)$$

Kada disk dospe u položaj D, u kome je $\varphi = \pi$ njegova brzina je odredjena na sledeći način:

$$v_{\tilde{C}D}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha - \frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha$$

Dok je u tom položaju D sila uzajamnog pritiska veze i diska:

$$F_{\varphi ND} = M\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{Mg}{3}\left[-11\cos\alpha + \frac{4\ell}{R-r}\sin\alpha\right] > 0$$

$$M\frac{v_0^2}{R-r} + \frac{4Mg\ell}{3(R-r)}\sin\alpha > \frac{11Mg}{3}\cos\alpha$$

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha > 11g(R-r)\cos\alpha$$

Na granici D kada je sila pritiska jednaka nuli, minimalna brzina s kojom disk dolazi do položaja D, a da se ne odvoji od jednostrano zadržavajuće veze je:

$$v_{\tilde{C}DMIN}^2 = g(R-r)\cos\alpha$$

a to ostvarljivo za odnos kinetičko.geometrijskih parametara u obliku:

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha = 11g(R-r)\cos\alpha$$

Ako je odnos kinetičkih parametara

$$3v_0^2 + 4g\ell\sin\alpha < 11g(R-r)\cos\alpha$$

tada ce disk napustiti nezadržavajuću vezu, kružno cilindričku površ i neće dospeti u položaj D.

Ako je zadovoljen uslov, da disk dospe u položaj D, onda on započinje treću etapu svog kretanja, kao slobodno telo koje vrši ravansko kretanje i ima tri stepeni slobode kretanja, dve translacije u ravni kretanja i jednu rotaciju oko ose upravne na ravan diska kroz njegov centar masa. Znači da sada kao slobodno telo koje vrši ravansko kretanje ima tri stepeni slobode kretanja i izabraćemo za tri generalisane koordinate koordinate njegovog centra $x_{\tilde{\tilde{C}}}$ i $y_{\tilde{\tilde{C}}}$ i ugao $\vartheta_{\tilde{\tilde{C}}}$ relativnog kretanja - obrtanja oko njegovog centra. Imajući u vidu da se sada disk kreće samo pod dejstvom sile sopstvene težine Mg i početnih uslova, koji su početna brzina njegovog centra masa i ugaona brzina obrtanja oko centra masa jednaki onima koje je dobio u položaju D kada je napustio jednostrano zadržavajuću vezu – polukružnu površ. Analizirajući, kvalitativno, kretanje u ovoj trećoj etapi slobodnog ravanskog kretanja diska njegov centar će izvoditi kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, i jednu sopstvenu rotaciju. Koristeći jednačine ravanskog kretanja pišemo sledeće tri diferencijalne jednačine:

$$M\ddot{x}_{\tilde{\tilde{C}}} = 0$$

$$M\ddot{y}_{\tilde{\tilde{C}}} = -Mg$$

$$\mathbf{J}_{0\zeta}\ddot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}} = 0$$

Sa početnim uslovima: Brzinom lansiranja

$$v_{\tilde{C}D}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g\sin\alpha - \frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha = v_{\tilde{\tilde{C}}}^2(t_2 = 0) \text{ pod uglom } \alpha$$

i jednom ugaonom brzinom sopstvenog obrtanja.

Pa su komponente početne brzine u pravcima horizontale i vertikale::

$$\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\cos\alpha$$

$$\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha$$

dok je početna ugaona brzina sopstvenog obrtanja:

$$\omega_{\tilde{C}D}=\sqrt{\frac{v_{\tilde{C}D}^2}{r}}=\sqrt{\frac{v_0^2}{r}+\frac{4}{3}\frac{\ell}{r}g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3r}\cos\alpha}=\tilde{\omega}_{\tilde{\tilde{C}}}=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t_2-0)$$

Konačne jednačine kretanja u ovoj trećoj deonici puta diska su:

$$\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=const$$

$$\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-gt+\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)$$

$$\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)=const$$

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{x}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+\dot{y}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

$$\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=\dot{\vartheta}_{\tilde{\tilde{C}}}(0)t$$

I konačno jednačine kretanja diska po napuštanju jednostrano zadržavajuće veze za zadate početne uslove:

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\cos\alpha$$

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha$$

$$\vartheta_{\tilde{\tilde{C}}}=t\sqrt{\frac{v_0^2}{r}+\frac{4}{3}\frac{\ell}{r}g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3r}\cos\alpha}$$

Najveći domet je kada sentar diska dospe u tačku K, a to je kada je:

$$y_{\tilde{\tilde{C}}}(t)=-g\frac{t^2}{2}+t\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha=0$$

odakle sledi da je:

$$t_K=\frac{2}{g}\sqrt{v_0^2+\frac{4}{3}\ell g\sin\alpha-\frac{8g(R-r)}{3}\cos\alpha}\,\sin\alpha=0$$

pa je:

$$x_{\tilde{\tilde{C}}}(t_K)=2\left[\frac{v_0^2}{g}+\frac{4}{3}\ell\sin\alpha-\frac{8(R-r)}{3}\cos\alpha\right]\cos\alpha\sin\alpha$$

Drugi način rešavanja delova zadatka. Ako se traže samo brzine u naznačenim položajima, a ne i sile otpora veza, može se koristiti *teorema o održanju ukupne energije sistema*, jer je kretanje – kotrljanje diska pod dejstvom sile težine konzervativni sistem, jer u kretanju ne dejstvuju nekonzervativne sile, te je ukupna energija sistema u svakom trenutnu kretanja diska konstantna i jednaka onoj na početku kretanja.

$$E_k(t)+E_p(t)=E_{k0}+E_{p0}=const$$

Kako disk po strmoj ravni izvodi ravansko kretanje njegova kinetička energija po Koenig-ovoj teoremi jednaka je zbiru kinetičke energije translatornog kretanja brzinom centra masa i kinetičke energije relativnog kretanja oko ose kroz centar masa (rotacije). Na osnovu toga i pethodno izabranih generalisanih koordinata za svaki od delova puta, možemo napisati:

Izrazi za kinetičke energije diska, koji se kotrlja po strmoj ravni:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C\zeta}\omega_C^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P\zeta}\omega_P^2 = \frac{3}{4}M\dot{\xi}_C^2$$

$$E_{k0} = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

Promena potencijalne energije diska, koji se kotrlja po strmoj ravni je rezultat promena po visini položaja centra mase diska:

$$E_{p0} = 0$$

$$E_p = -Mgx_C \sin\alpha$$

Na osnovu teoreme o održanju ukupne energije konzervativnog sistema pri kotrljanju diska po strmoj ravni sledi

$$E_k + E_p = \frac{3}{4}M\dot{\xi}_C^2 - Mgx_C \sin\alpha = \frac{3}{4}Mv_0^2 = \cos nt$$

te je:

$$v_C^2 = \dot{\xi}_C^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}gx_C \sin\alpha$$

Iz prethodnog je lako odrediti brzinu centra diska u pložaju napuštanja strme ravbi i prelaska na cilindričnu polukružnu površ zamenom $\xi_C = \ell$:

$$v_{CB} = \dot{\xi}_{CB} = \sqrt{v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha}$$

Za deo kretanja kotrljanja, bez klizanja diska po polukružno-cilindričnoj površi važi teorema održanju ukupne energije sistema. Kinetičke energije u položaju prelaska diska sa strme ravni na polukružno-cilindričnu površ, i u proizvoljnom položaju na njoj su:

$$E_{kB} = \frac{1}{2}Mv_{CB}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{C\zeta}\omega_{CB}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{P\zeta}\omega_P^2 = \frac{3}{4}Mr^2\frac{1}{r^2}\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha\right) = \frac{3}{4}M\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha\right)$$

$$E_{k\tilde{C}} = \frac{1}{2}Mv_{\tilde{C}}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{J}_{\tilde{C}\zeta}\omega_{\tilde{C}}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_{\tilde{P}\zeta}\omega_{\tilde{P}}^2 = \frac{3}{4}Mr^2\left(\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Umesto izraza za potencijalne energije, možemo uzeti u račun ***promenu potencijalne energije*** pri prelasku od položaja prelaska diska sa strme ravni na polukružno-cilindričnu površ, do proizvoljnog položaja na njoj, jer se potencijali odredjuju sa tačnošću do jedne aditivne konstante i uvek možemo jedan nivo proglasiti za nulti, te je:

$$\Delta_{CB/\tilde{C}}E_p = E_{p\tilde{C}} - E_{pB} = -Mg(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha]$$

Sada je za taj deo puta kotrljanja diska po polukružno-cičimdričkoj površi:

$$F_{k\tilde{C}} + E_{p\tilde{C}} = F_{k\tilde{C}} + \Delta_{CB/\tilde{C}}E_p + E_{pB} = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - Mg(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha] + E_{pB} =$$

$$= E_{kB} + F_{pB} = \frac{3}{4}M\left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha\right) + E_{pB}$$

odakle sledi da je:

$$(R-r)^2\dot{\varphi}^2 = \left(v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha\right) + \frac{4}{3}g(R-r)[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha]$$

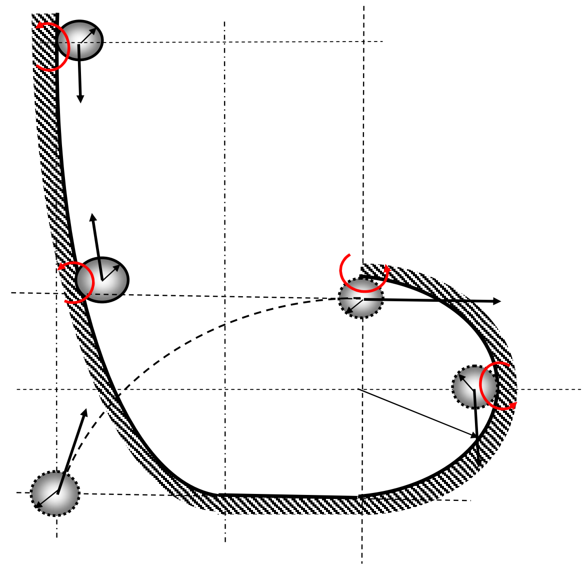
a to predstavlja isti izraz koji smo već dobili prethodnim postupkom:

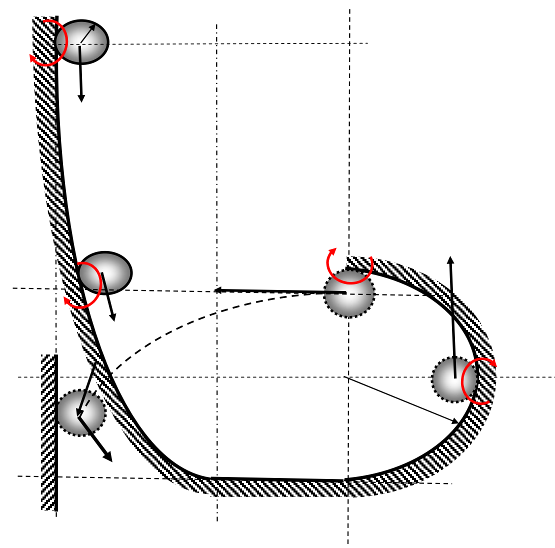
$$v_{\tilde{C}}^2 = (R-r)^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}\ell g \sin\alpha + \frac{4g(R-r)}{3}[\cos(\varphi-\alpha) - \cos\alpha].$$

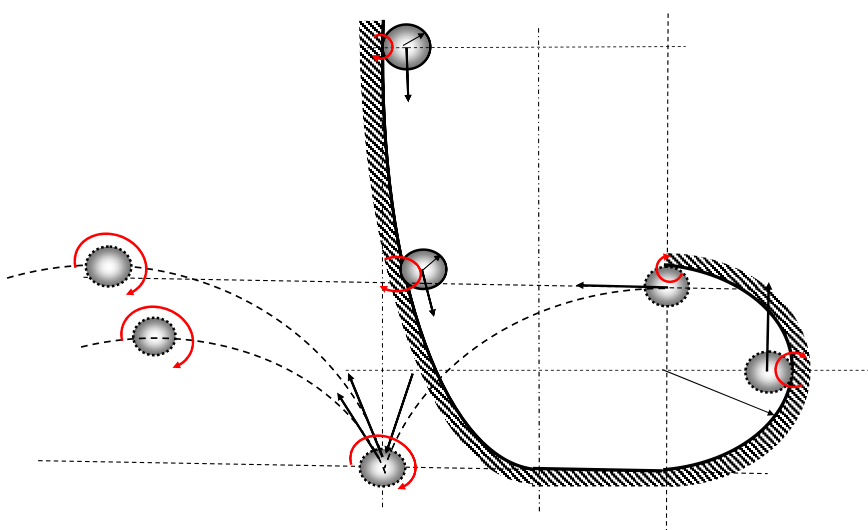
Sastavi ispitni zadatak

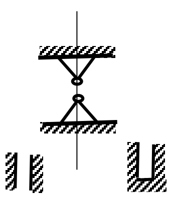
Koristeći slike materijalnih sistema sastavi mogući ispitni zadatak, reši i pregloži profesoru! Možda će profesor prihvatiti definisani tekst i rešenje zadatka, ako je zadatak originalan, elegantan i rešenje prikazano u opštim brojevima, a kinetičko-geometrijski parametri izabrani tako da je rešenje jednostavan izraz ili celobrijan u odnsu na opšte brojeve! (Student zadržava trajno koautorstvo nad tekstom zadatka i rešenjem koje će biti publikovano, ako profesor oceni da su i formulacija teksta i rešenja originalna.)

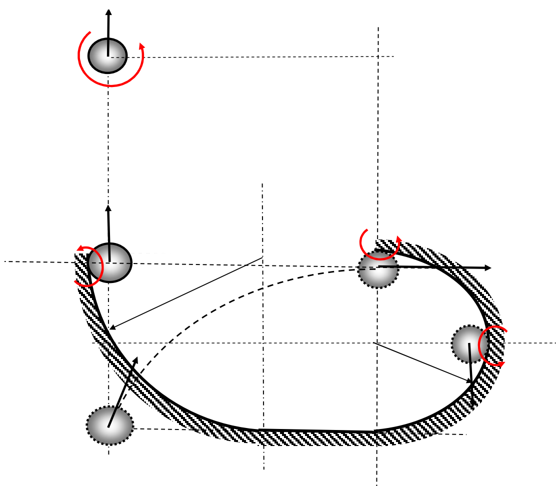
Rešenje postavljenog zadatka treba da sadrži više pristupa rešavanju postavljenog zadatka korišćenjem različitih principa i zakona mehanike, kao i različitih teorema dinamike.

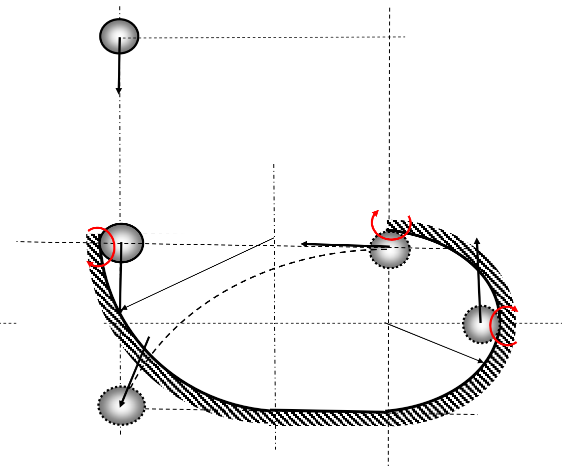


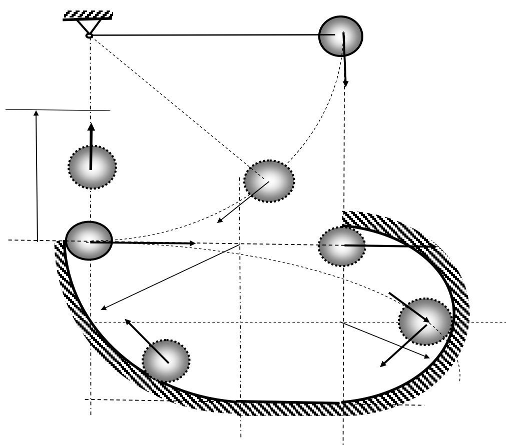


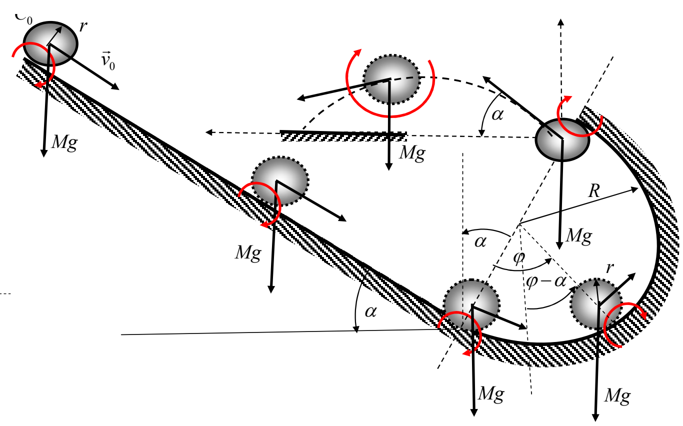











r
$\vec{v}_0$
Mg
Mg
Mg
α
α
α
R
Mg
φ
φ−α
r
α
Mg
Mg

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950

Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:
Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche.
Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Ẻléments de statique. Paris 1804.

C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.
Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.
Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):
P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.