DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

Analiza izabranih zadataka

Oscilatori, prinudne oscilacije i rezonancija

Obrtanje krutog tela oko nepomične tačke

Euler-ovo rešenje
Lagrange-ovo rešenje.
Rešenje Sofije Kovaljevske

Primeri mogućih ispitnih zadataka

I Četiri složena zadatka koji sadrže veći broj mogućih ispitnih zadataka.*

Za ***materijalne sisteme*** prikazane na sledećim slikama na kojima su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** odrediti:

a* Broj stepeni slobode kretanja sistem i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Napisati integral energije sistema; Da li je sistem konzervativan? Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste:

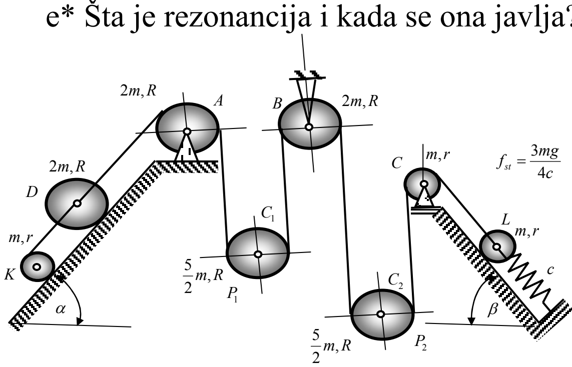
e* Podsisteme proučavanog materijalnog sistema vezanih krutih tela dekompozicijom istog na sastavne delove i načiniti analizu sila interakcije (medjudejstva medju njima);

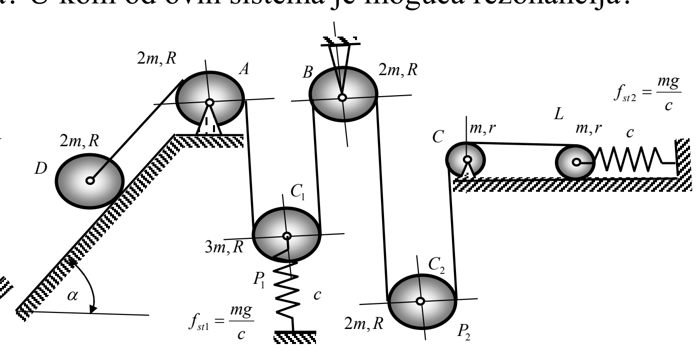
f* Sile u delovima užadi koristeći princip dinamičke ravnoteže (Lagrage-D'Alambert-ov princip) za svaki od dekomponovanih podsistema;

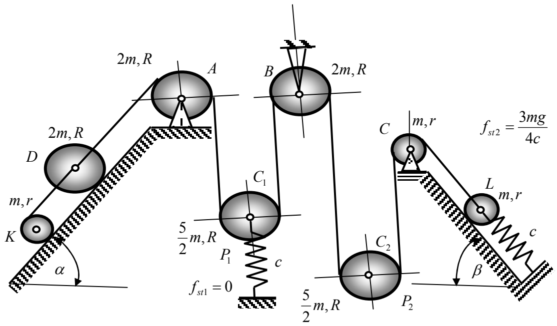
g* Ubrzanja, translatornih kretanja elemenata, kao i ugaona ubrzanja koturova;

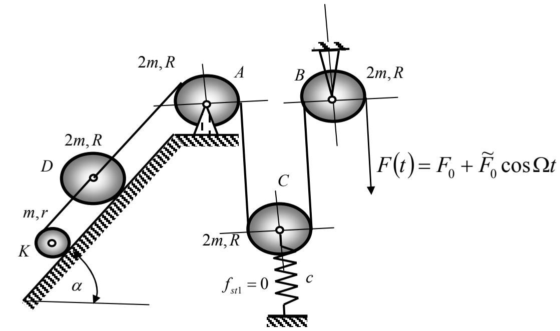
h* Sile kotrljanja diskova po kosim ravnima.

e* Šta je rezonancija i kada se ona javlja? U kom od ovih sistema je moguća rezonancija?









II Šest složenih zadataka koji sadrže veći broj mogućih ispitnih zadataka.*

Za ***materijalne sisteme*** prikazane na sledećim slikama na kojima su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** odrediti:

a* Broj stepeni slobode kretanja sistem i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Napisati integral energije sistema; Da li je sistem konzervativan?

d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste:

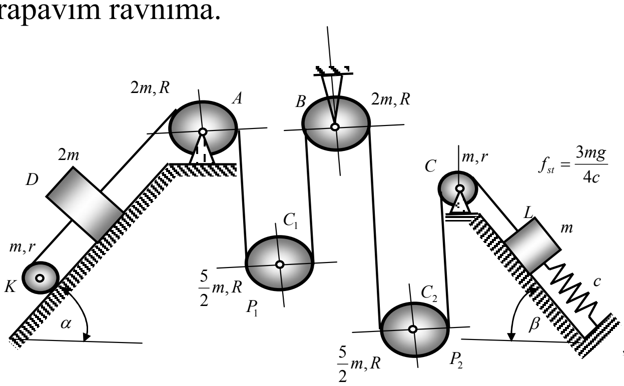
e* Podsisteme proučavanog materijalnog sistema vezanih krutih tela dekompozicijom istog na sastavne delove i načiniti analizu sila interakcije (medjudejstva medju njima);

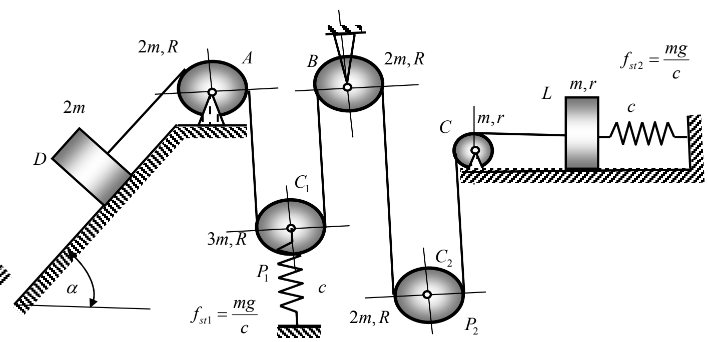
f* Sile u delovima užadi koristeći princip dinamičke ravnoteže (Lagrage-D'Alambert-ov princip) za svaki od dekomponovanih podsistema;

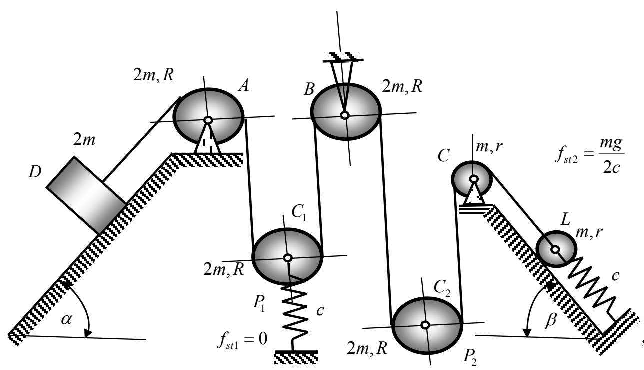
g* Ubrzanja, translatornih kretanja elemenata, kao i ugaona ubrzanja koturova;

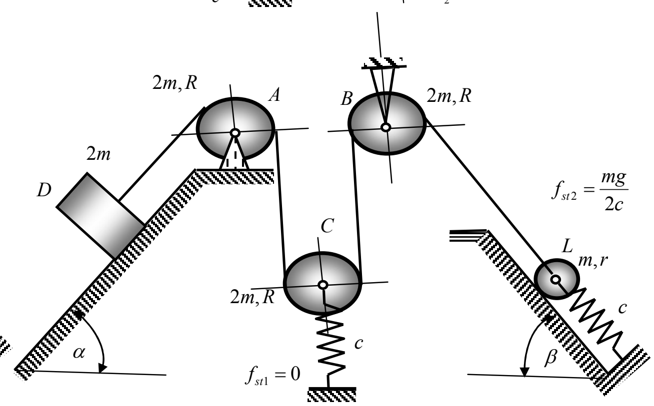
h* Sile kotrljanja diskova po kosim ravnima;

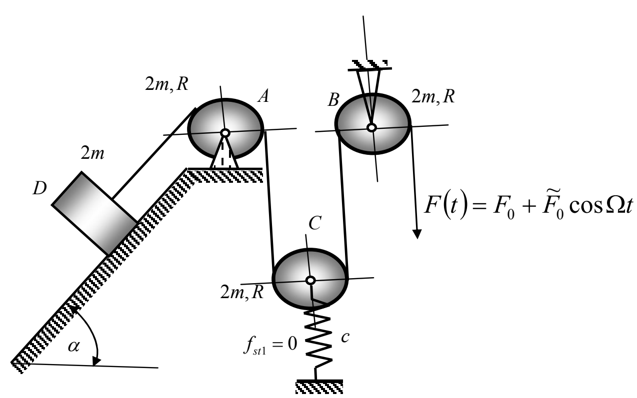
m* Ako veze nisu idealne odrediti sile trenja klizanja tegova po kosim (ili horizontalnim) hrapavim ravnima.

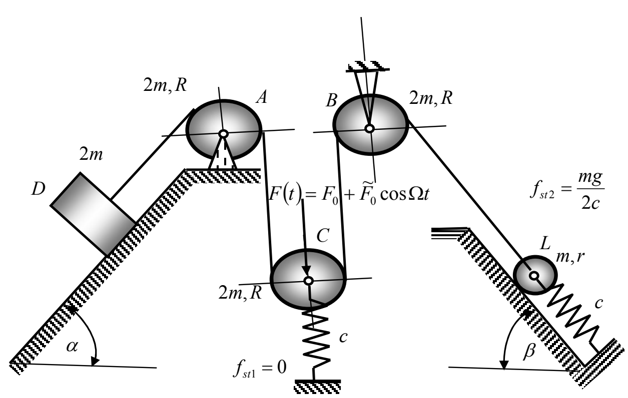












III* Primeri materijalnih sistema sa jednim ili više stepeni slobode kretanja.

Za ***materijalne sisteme*** prikazane na sledećim slikama na kojima su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** odrediti:

a* Broj stepeni slobode kretanja sistem i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***, kao i ***funkciju rasipanja***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan? Koristeći teoremu o promeni energije sistema mapisati vezu izmedju ukupne energije sistema i funkcije rasipanja; Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste:

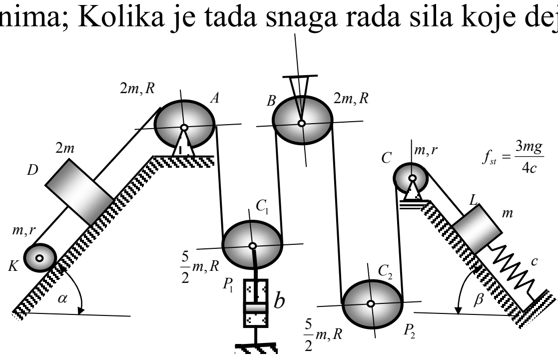
e* Podsisteme proučavanog materijalnog sistema vezanih krutih tela dekompozicijom istog na sastavne delove i načiniti analizu sila interakcije (medjudejstva medju njima);

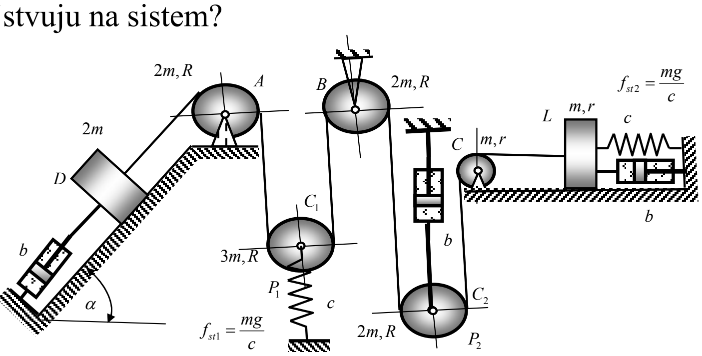
f* Sile u delovima užadi koristeći princip dinamičke ravnoteže (Lagrage-D'Alambert-ov princip) za svaki od dekomponovanih podsistema;

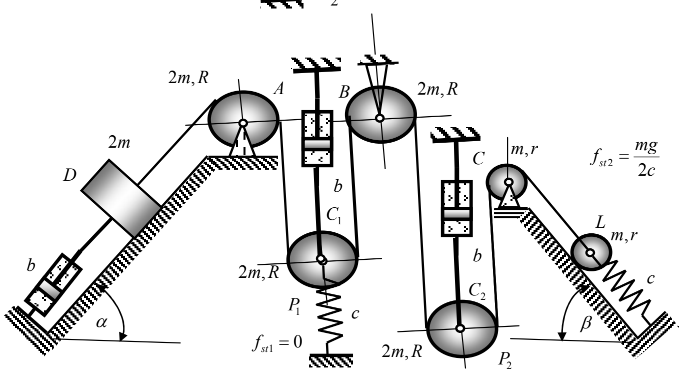
g* Ubrzanja, translatornih kretanja elemenata, kao i ugaona ubrzanja koturova;

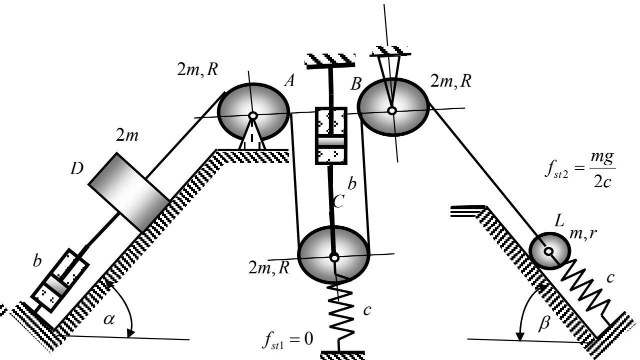
h* Sile kotrljanja diskova po kosim ravnima;

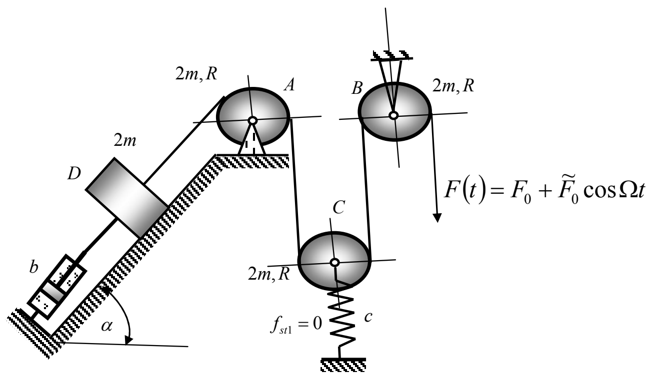
m* Ako veze nisu idealne odrediti sile trenja klizanja tegova po kosim (ili horizontalnim) hrapavim ravnima; Kolika je tada snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

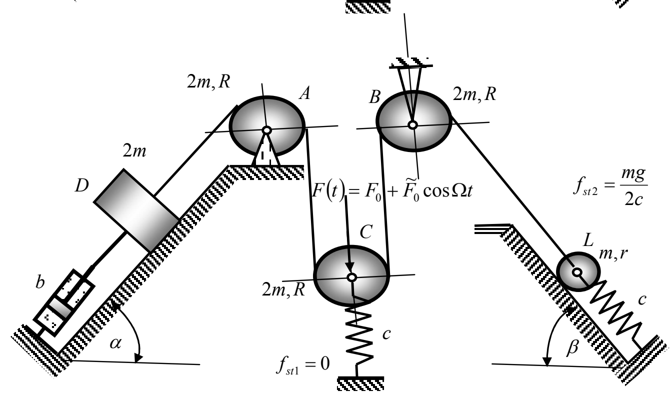












IV* Primeri materijalnih sistema sa jednim ili više stepeni slobode kretanja.

Za ***materijalne sisteme*** prikazane ne sledećim slikama na kojima su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** odrediti:

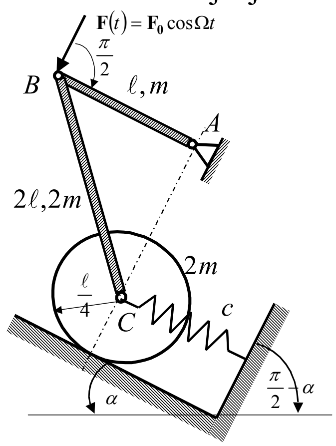
a* Broj stepeni slobode kretanja sistem i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

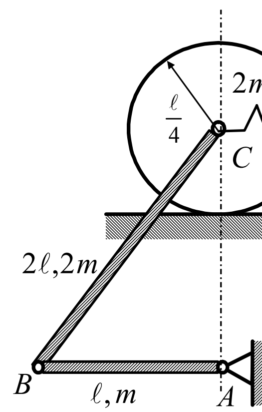
b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

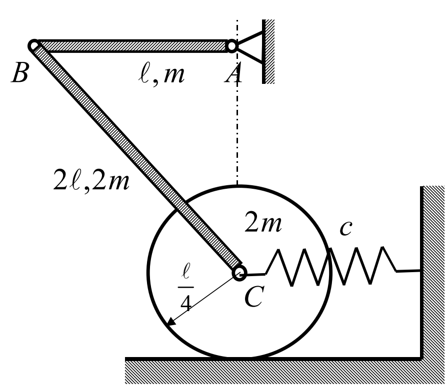
c* Izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Da li je sistem konzervativan? Koristeći teoremu o promeni energije sistema mapisati odgovarajuću relaciju za promenu energije sistema; Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

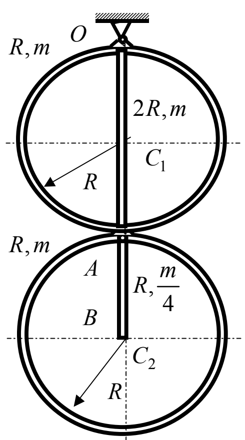
d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste:

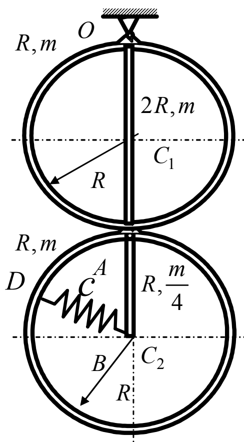
h* Sile kotrljanja diskova po ravnima;

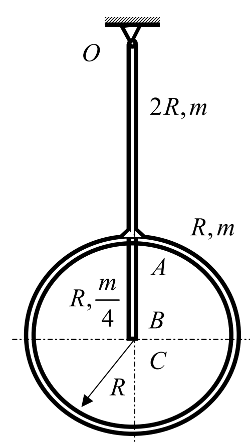


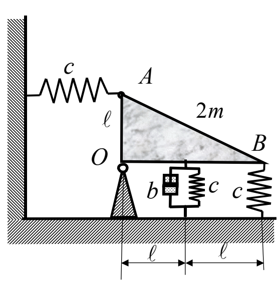


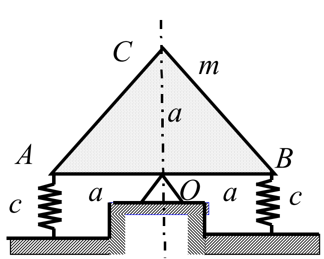


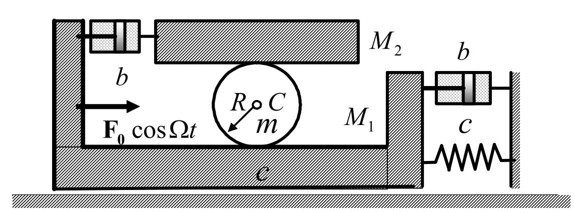


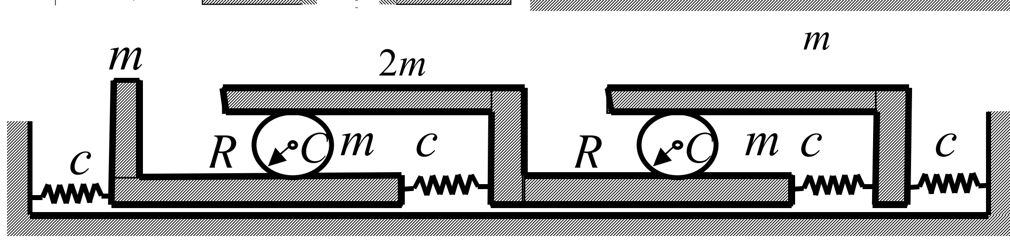












V Izabrani primeri – mogući ispitni zadaci*

Zadatak 1: Vektor položaja $\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(\rho,\varphi,\psi)$, mase m, *slika 2*, zadat je pomoću vektora položaja:

$$\vec{\rho}(\rho,\varphi,\psi)=\rho\vec{\rho}_0$$

Pri čemu je intenzitet vektora položaja materijalne tačke funkcija vremena određena sa :

$$\rho(t)=a_0\frac{t^2}{2}+v_0t+\ell_0$$

dok jedinični vector $\vec{\rho}_0$ orjentacije vektora položaja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω_0 oko ose z, zaklapajući sa xOy .koordinatnom ravni ugao $\psi(t)=\omega_0 t$.

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njene komponente u sfernom sistemu koordinata i Descartes-ovom sistemu koordinata.

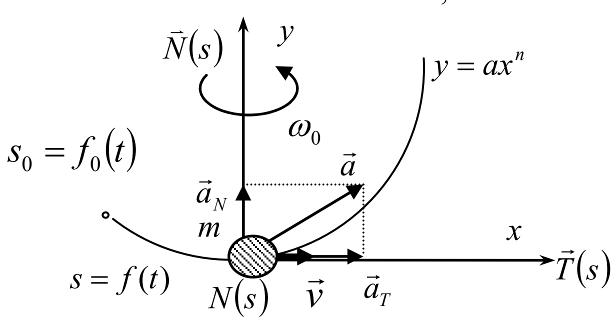
Zadatak 2: Materijalna tačka mase m, *slika 2*, kreće se po paraboli jadnačine $y=ax^n$, gde je n ceo broj prelateći po paraboli put $s=f(t)$. (Posebni slučajevi $s(t)=v_0t$ i $s(t)=bt^n+ct^{n-1}$).

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;



Slika 2

Zadatak 3: Materijalna tačka mase m, *slika 2*, kreće se po paraboli jadnačine $y=ax^n$, gde je n ceo broj, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko ose y, prelateći po pokretnoj paraboli put $s=f(t)$. (Posebni slučajevi $s(t)=v_0t$ *i* $s(t)=bt^n+ct^{n-1}$).

Odrediti:

a* Brznu i ubrzanje materijalne tačke, kao i njihove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

b* Impuls kretanja materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

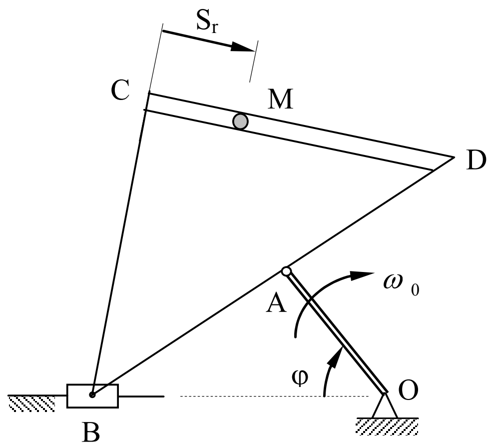
c* Silu inercije materijalne tačke, kao i njegove komponente u prirodnom sistemu koordinata, kao i u Descartes-ovom sistemu koordinata;

Zadatak 4: Po kateti $\overline{CD} = R$ jednakokrakog pravouglog trougla BCD, *slika 4*, kreće se jednakoubrzano materijalna tačka M, mase m, relativnim ubrzanjem $a_r = 2R\omega_0^2$. Na sredini stranice $\overline{BD}$ trougao je zglobno vezan za tačku A krivaje $\overline{OA} = R/2$, a u tački B za klizač koji se kreće po horizontalnim pravoliniskim vođicama čija osa prolazi kroz tačku O. Krivaja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko nepokretne horizontalne ose. U početnom trenutku tačka je bila u položaju C bez početne relativne brzine, a krivaja je zaklapala ugao $\varphi_0 = \dfrac{\pi - 1}{2}(\text{rad})$. Odrediti:

a* apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$;

b* Impuls kretanja materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njegove komponente;

c* Silu inercije materijalne tačke M u trenutku $t = 1/2\omega_0$, kao i njene komponente .



Slika 4.

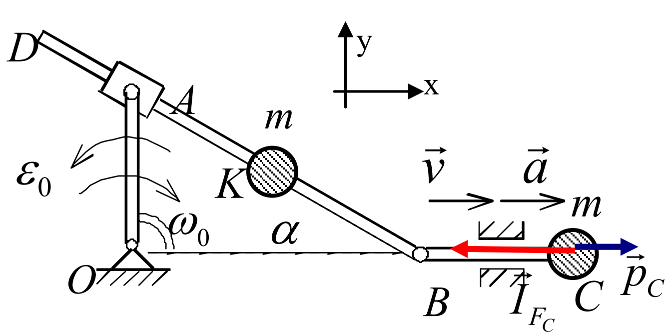
Zadatak 5: Laki mehanizam prikazan na *slici 5.* sastoji se od krivaje OA, dužine R, za čiji kraj A je zglobno vezan klizač kroz koji je provučen štap BD. Za kraj B štapa vezana je laka poluga BC, zanemarljive mase, koja se kreće translatorno pravolinijski. Tačke O, B i C leže na istoj pravoj. U trenutku kada je krivaja vertikalna, njena ugaona brzina je ω_0, ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \dot{\omega}_0 = \sqrt{3}\,\omega_0^2$, štap BD zaklapa ugao $\alpha = 30^\circ$ sa horizontalom, a poluga ima brzinu $v = 2R\omega_o$ i ubrzanje $a = \sqrt{3}Rr\omega_o^2/16$. Smerovi datih veličina prikazani su na *slici 8*. Laki mehanizam na kraju C poluge nosi materijalnu tačku mase m, kao i jednu iste mase na sredini izmedju tačaka A i B na štapu BD. U zadatom položaju odrediti:

a* ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa BD;

b* brzine i ubrzanja materijalnih tačaka u naznačenim položajima lakog mehanizma;

c* impuls kretanja svake od materijalnih tačaka u naznačenim položajima lakog mehanizma;

d* Intenzitete sila inercije, kao i komponente svake od njih za materijalne tačake u naznačenim položajima lakog mehanizma.

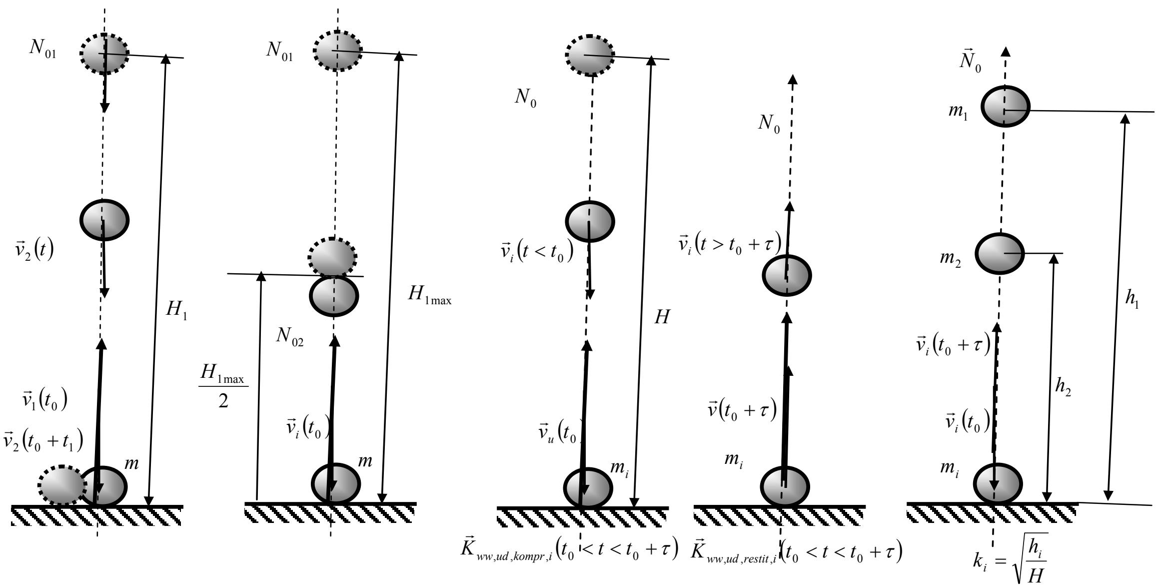


Slika 5

. ***Zadatak 6.*** ***a**** Materijalna tačka mase m_1, izbačena je, u polju Zemljine teže, iz tačke O početnom brzinom v_{01} vertikalno uvis. U trenutku kada je ona dostigla svoju maksimalnu visinu penjanja H_1, iz njene polazne tačke O izbačena je druga materijalna tačka mase m_2 brzinom v_{02}. Odrediti njenu početnu brzinu lansiranja (izbačaja) pa da ona u istom trenutku udari o tlo kada i prethodno lansirana materijalna tačka?

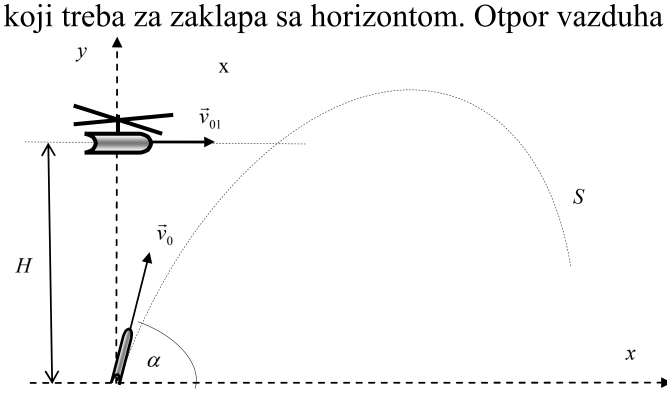
b* Odrediti odnos početnih brzina jednovremenog lansiranja u vertukalnom pravcu tih materijalnih tačaka da bi se one jedniovremeno našle na polovini maksimalne visine koju dostigne brže krećuća se materijalna tačka. Da li postoji samo jedno rešenje?

c* Ako su materijalne tačke od različitih materijala, te se puste, bez početnih brzina i sa iste visine H da udare u pod, na osnovu njihovog odskoka h_1 i h_2 odrediti njihove dolazne i odlazne brzine sudara sa podom, kao i odgovarajuće koeficijente sudara i odnos tih koeficijenata sudara.,



Zadatak 7. Sa površine zemlje bačene su vertikalno uvis dve materijalne tačke, masa m_1 i m_2, početnim brzinama v_{01} i v_{02}. Ako je sila otpora vazduha proporcionalna kvadratu brzine materijalne tačke $R_i = km_i v_{0i}^2$, $i=1{,}2$ gde je k konstanta, odrediti brzinu $v_{ki}, i=1{,}2$ kojom će odgovarajuća materijalna tačka udariti u zemlju, kao i odnose tih brzina.

Zadatak 7. Helikopter leti horizontalno na visini H od Zemlje brzinom $\vec{v}_{01}$. Alika 7, i u trenutku kada se nalazi na istoj vertikali sa lansirnom rampom ispali se iz projektil u pravcu koji sa horizontom zaklapa ugao α početnom brzinom $\vec{v}_0$. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za pokretni projektil i odrediti uslov koji treba da zadovolji njegova početna brzina $\vec{v}_0$ lansiranja, da bi on udario u letilicu, kao i ugao α koji treba za zaklapa sa horizontom. Otpor vazduha zanemariti.



Slika 7.

Zadatak 8. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u vertikalnoj ravni u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini, $\vec{F} = -km\vec{v}$, $(k \succ 0)$. U početnom trenutku kretanja materijalna tačka je imala brzinu $\vec{v}_0$ usmerenu po horizontu, a koordinatni sistem je postavljen tako da se koordinatni početak poklapa sa početnim položajem tačke. Smatrajući silu zemljine teže konstantnom, koristeći princip dinamičke ravnoteže, odrediti:

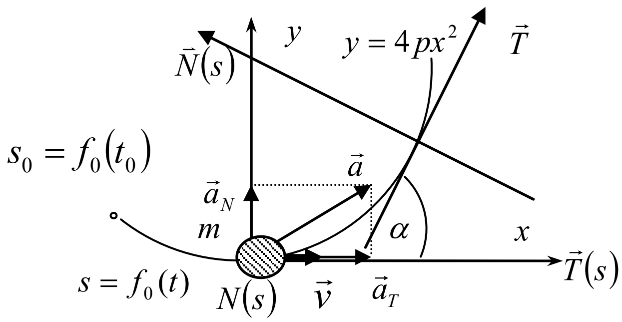
- diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke;
- konačne jednačine kretanja materijalne tačke i njenu putanju za zadate početne uslove;
- teorijski horizontalni domet materijalne tačke .

Zadatak 9. Materijalna tačka se kreće po cikloidi jednačine $x = R(\varphi - \sin\varphi)$; $y = R(1 - \cos\varphi)$ pod uticajem sile $\vec{F} = c\left[(2R - y)\vec{i} + (y - R)\vec{j}\right]$. Odredi rad koji izvrši sila koja dejstvuje na materijalnu tačku, pri njenom kretanju po jednom luku cikloide.

Zadatak 10. Materijalna tačka se kreće po zavojnici na površi kružnog valjka (cilindra) parametarskih koordinata u obliku $x = R\cos\varphi$; $y = R\sin\varphi$; $z = h\varphi/2\pi$; gde je $\varphi = \omega t$, a pod pod uticajem sile čije su Descates-ove koordinate $X = cyz$, $Y = cz\left(R^2 - y^2\right)^{1/2}$, $Z = cxy$. Odrediti rad koji izvrši aktivna sila, dok materijalna tačka iz položaja $N_0(R,0,0)$ pređe jedan hod po zavojnici – zavojnoj putanji?

Zadatak 11. Odrediti Newton-ovu gravitacionu silu između materijalne tačke mase m i homogenog štapa mase M (homogene nžmaterijalne linie), dužine l, ako je p normalno rastojanje materijalne tačke od štapa. Koliki je Newton-ov potencijal?

Zadatak 12. Materijalna tačka mase $m = 2[kg]$ kreće se pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli jednačine $y = 4px^2$, gde je $p\left[m^{-1}\right]$ parametar dimenzione saglasnosti, iz početnog položaja $N_0(y_0 = 10\,cm)$ bez početne brzine. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže posmatrane pokretne materijalne tačke pri njenom kretanju duž te parabole, ako se zna da se parabola nalazi u vertikalnoj ravni. Koliki je otpor veze koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku - linije parabole u proizvoljnom položaju materijalne tačke na paraboli, a koliki u položaju na temenu te parabole?



Zadatak 13. Odrediti u vertikalnoj ravni Oxy jednačinu glatke linije - putanje teške tačke – pod uslovom da je otpor veze (normalni otpor) koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku obrnuto srazmeran krivini putanje $F_N = mgk/R$; $R = R_k$.

Zadatak14. Po idealno glatkoj horizontalnoj ploči klizi kuglica mase m učvršćena za jedan kraj nerastegljivog konca. Konac je provučen kroz rupicu u ploči i uvlači se u nju konstantnom brzinom v. U početnom trenutku konc je zategnut duž prave linije, rastojanje kuglice od rupice je bilo R, a početna brzina kiglice je v_0 i upravna je na pravac konca, vidi sliku. Odrediti konačne jednačine kretanja kuglice i silu u koncu, pretpostavljaju'i da je kuglica materijala tačka.

Zadatak 15. Dekartove koordinate sile $\vec{F}$ su

$$X = c\frac{x-y}{\left(x^2+y^2\right)^n}; \qquad Y = c\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^n};$$

a* Odrediti eksponent n pod uslovom da sila $\vec{F}$ bude konverzativna.
b* Za taj slučaj odrediti funkciju sile i izračunati rad sile pri prelasku materijalne tačke iz položaja $N_1\left(2,\sqrt{2}\right)$ u $N_2\left(3,\sqrt{3}\right)$ ako je $c = 100\ [Nm]$ duž putanje kretanja. Da li taj rad zavisi od putanje kretanja materijalne tačke?
c* Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile.
d* Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje, kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Zadatak 16. Na pokretnu materijalnu tačku dejstvuje sila $\vec{F}$ **:**

$$\vec{F} = \frac{c}{xz+y^2}\left(\frac{y^2}{x}\vec{i} + \frac{xz-y^2}{y}\vec{j} - x\vec{k}\right),$$

gde je $c[Nm]$-konstanta.

a* Dokazati da je sila $\vec{F}$ konzervativna i odrediti funkciju sile.
b* Izračunati rad sile pri kretanju materijalne tačke po krivoj putanji, koja se odbija presekom površi: $\left(x-6\right)^2 + \left(y-8\right)^2 + z^2 = 10z$ i ravni $z = 8$. Da li taj rad zavisi od putanje kretanja materijalne tačke?
.c* Ispitati ekstremne vrednosti funkcije sile i moguće položaje ravnoteže materijalne tačke pri kretanju pod dejstvom te sile. Ispitati stabilnost mogućih položaja ravnoteže, ako oni postoje kao i kretanja pod dejstvom te sile.

Zadatak 17. Pomoču integrala „žive sile“ odrediti putanju kosog hica u bezvazdušnom prostoru.

Zadatak18. Na vratilu OB, zanemarljive mase, sa nepokretnim osloncem u O i kliznim u B, a u pravcu ose orjentisane ortom $\vec{n}$, na lakom prepustu PN, zanemarljive mase i na rastojanju ℓ nasadjena je materijalna tačka mase m, koja rotira zajedno sa vratilom promenljivom ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}$.

a* Napraviti analizu veza i na osnovu toga odrediti koliko stepeni slobode kretanja ima materijalna tačka?
b* Napraviti analizu sila koje dejstvuju na materijalnu tačku i grafički ih predstaviti.
c* Odrediti kinetičke pritiske u ležištima vratila oko koga se sistem okreče, koristeći teoremu o promeni momenta impulsa kretanja materijalne tačke i vektor momenta inercije materijalne tačke.
d* Odrediti koordinate centra udara.

Zadatak 19. Glatka putanja po kojoj se kreće teška tačka M prelazi u tački B u glatki krug poluprečnika R. Ako je kuglica puštena sa visine $h = \frac{3\sqrt{3}-4}{4}R$ bez početne brzine, odrediti:

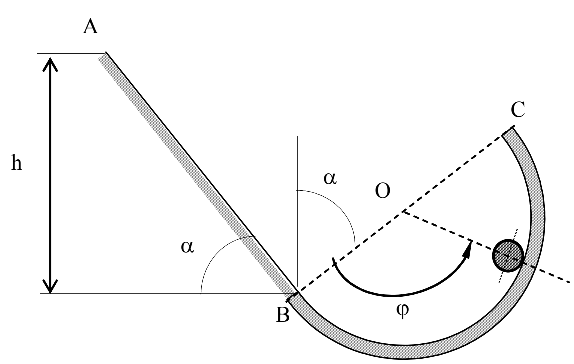
a) Ugao φ koji određuje položaj tačke C u kojoj kuglica napušta vezu, i
b) Položaj tačke D u koju će kuglica da padne nakon napuštanja veze.

Zadatak 20. Materijalna tačka mase m, puštena je iz položaja $A\left(x_A = -R, y_A = ?\right)$ bez početne brzine niz glatku parabolu n-tog reda sa temenom u koordinatnom početku, tačka ulazi u glatku kružnicu poluprečnika R, a napušta je u položaju B, koji je odredjen uglom $\alpha = 60^0$. Ako je pritisak materijalne tačke na kružnicu u položaju B jednak nuli odrediti u koju će tačku parabole n-tog reda udariti posle napuštanja kružnice. Koje i kakve veze dejstvuju na materijalnu tačku pri kretanju? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku? Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni?

Zadatak 21. Teška materijalna tačka mase m kreće se po putanji koju čine četvrtina kružnice poluprečnika $3R$, i polovina druge kružnice poluprečnika R, koje se nadovezuju jedna na drugu. Tačka je puštena iz položaja A, na početku četvrtine kružnice, početnom brzinom v_0 . Kojom brzinom v_B, napušta putanju u tački B? Ako se posle napuštanja putanje tačka kreće bez dejstva sile otpora sredine odrediti položaj tačke C u kome tačka udara u tle i brzinu kojim udara o tle. Koje i kakve veze dejstvuju na materijalnu tačku pri kretanju? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku? Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni?

Zadatak 22. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u polju privlačne centralne sile čiji je intenzitet obtnuto proporcionalan trećem stepenu rastojanja od pokretne tačke do centra privlačenja O, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti $mv_0^2r_0^2$ gde je r_0 početno rastojanje tačke M od centra O, v_0 početna vrzina tačke koja sa pravcem OM_0 zaklapa ugao $\alpha = arctg\left(\frac{1}{k}\right)$. Odrediti putanju tačke i konačne jednačine kretanja. Koje i kakve veze dejstvuju na materijalnu tačku pri kretanju? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku? Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni? Da li postoji funkcija sile koja dejstvuje na materijalnu tačku?

Zadatak 23. Kojom početnom brzinom treba pustiti tešku materijalnu tačku mase m iz vrha hrapave strme ravni AB, koeficijenta trenja klizanja $\mu = 0.1$, visine $h = 5[m]$, nagibnog ugla $\alpha = 60^0$, da bi stigla u tačku C idealno glatkog kružnog luka, središnjeg ugla 3α, poluprečnika $R = h$, pod pretpostavkom da se kreće u vertikalnoj ravni? (Slika 23.) Koje i kakve veze dejstvuju na materijalnu tačku pri kretanju? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku? Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni? Da li postoji funkcija neke od sila koje dejstvuju na pokretnu materijalnu tačku? Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajuću relaciju. Kolika je snaga rada sila sistema i da li je pozitivna?



Slika 23.

Zadatak 24. Pod dejstvom centralne sile F materijalna tačka mase m se kreće po leminskati, čija je jednačina u polarnom sistemu koordinata r i φ: $r^2 = a\cos(2\varphi)$, gde je a-konstanta, r- rastojanje pokretne materijalne tačke od centra sile. U početnom trenutku $t = 0$, materijalna tačka je bila udaljena za $r = r_0$ centra sile, a dobila je brzinu jednaku v_0, tako da vektor brzine zaklapa sa pravom što spaja tačku sa centrom sile ugao α. Odrediti aktivnu silu F koja dejstvom materijalnu tačku prinudjuje da se kreće po lemniskati. pod pretpostavkom da zavisi samo od rastojanja r. Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni? Da li postoji funkcija sile pod čijim se dejstvom materijalna tačka kreće? Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajuću relaciju. Kolika je snaga rada sile koja dejstvuje na materijalnu tačku? Napisati izraz za sektorsku brzinu pri kretanju ove materijalne tačke pod dejstvom sile po gore definisanoj lemniskati.

Zadatak 25. O najvišu tačku nepokretnog kružnog obruča poluprečnika R, koji je u vertikalnoj ravni, obešen je pomoću opruge krutosti $c = \dfrac{10}{7}\dfrac{mg}{R}$ teret M, mase m, u vidu malih dimenzija prstena - materijalne tačke, koji može da klizi po glatkom obruču. Odrediti pritisak i brzinu tereta u najnižoj tački B obruča. U početnom položaju tereta M poznato je rastojanje $AM_0 = R$, pri čemu je opruga izdužena, a njena dužina je dva puta veća od dužine u nenapregnutom stanju, dok je početna brzina tereta jednaka nuli.

Zadatak 26. Dve jednake materijalne tačke masa po m lansirane su, u polju Zemljine teže i u vertikalnoj ravni i bezvazdušnom prostoru, iz zajedničke tačke O različitim brzinama $\vec{v}_{01}$ i $\vec{v}_{02}$ pod uglom α_1, odnosno α_2 prema horizontu, slika 26.

a* Odrediti vreme kada će dospeti u položaj koji je udaljen za a od tačke lansiranja i na višoj poziciji od nje za b, kao i brzine prolaska kroz taj položaj. Da li se mogu i pod kojim uslovom sudariti (susresti) u tom položaju?

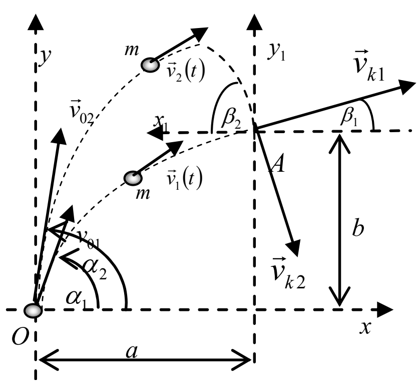
b* Odrediti domete i položaj u koji će dospeti te materijalne tačake po pnovnom dospeću na visinu njihovog lansiranja. Pod kojim uslovima će im dometi biti jednaki? Po kojim putanjama su se kretale?

c* Ako na udaljenu a od njihovog položaja lansiranja postavimo vertikalni zid u koju tačku će one udariti i kojim brzinama?

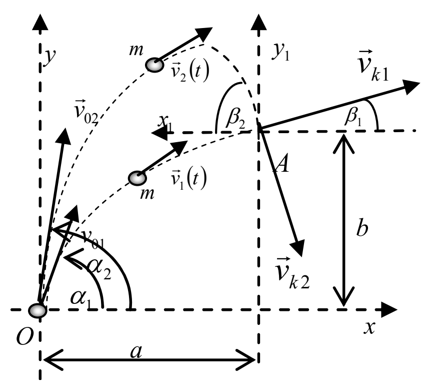
d* Ako je poznat koeficijent sudara (restitucije) materijalnih tačaka sa zidom odrediti njihove odlazne brzine. Koliki je gubitak kinetičke energije pri sudaru jedne, odnosno druge materijalne tačke?

e* Koje uslove preba da zadovolje piočetne brzine materijalnih tačaka, pa da se one posle sudara sa zidom i odvijanja od zida susretnu u položaju njihovog lansiranja?

f* Napraviti anlizu tipova sila koje dejstvuju na materijalne tačke u slučaju bez i sa udarom u zid? Da li postoji funcija neke od sila i koje i odredi njen izraz? Da li je sistem kretanja materijalnih tačaka konzervativan ili nekonzervativan? Obrazloži odgovor.



Slika 26.



Slika 27.

Zadatak 27. Dve jednake materijalne tačke masa po m lansirane su, u polju Zemljine teže i u vertikalnoj ravni i u prisustvu sile otpora proporcionalnih njihovim brzinama, $\vec{F}_{w,i} = -km\vec{v}_i$, $(k \succ 0)$m $i = 1{,}2$, iz zajedničke tačke O različitim brzinama $\vec{v}_{01}$ i $\vec{v}_{02}$ pod uglom α_1, odnosno α_2 prema horizontu, slika 27.

a* Odrediti jednačine njihovih putanja;

b* Odrediti relacije kinetičkih parametara kretanja tih materijalnih tačaka pod uslovom da pojedinačno dospeju u položaj koji je udaljen za a od tačke lansiranja i na višoj poziciji od nje za b, kao i vreme i brzine prolaska kroz taj položaj. Da li se mogu i pod kojim uslovom sudariti (susresti) u tom položaju? Odrediti relacije kinetičkih parametara kretanja tih materijalnih tačaka pod uslovom da jednovremeno dospeju u taj položaj (a,b).

c* Odrediti domete i položaj u koji će dospeti te materijalne tačake po ponovnom dospeću na visinu njihovog lansiranja. Pod kojim uslovima će im dometi biti jednaki? Po kojim putanjama su se kretale?

d* Ako na udaljenu a od njihovog položaja lansiranja postavimo vertikalni zid u koju tačku će one udariti i kojim brzinama?

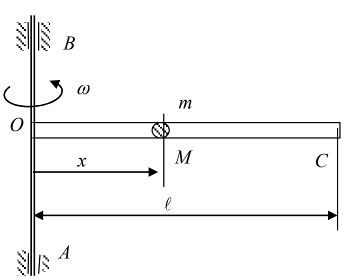
e* Ako je poznat koeficijent sudara (restitucije) materijalnih tačaka sa zidom odrediti njihove odlazne brzine. Koliki je gubitak kinetičke energije pri sudaru jedne, odnosno druge materijalne tačke?

e* Koje uslove preba da zadovolje početne brzine materijalnih tačaka, pa da se one posle sudara sa zidom i odvijanja od zida susretnu u položaju njihovog lansiranja? Da li je to moguće realizovati i pod kojim uslovima?

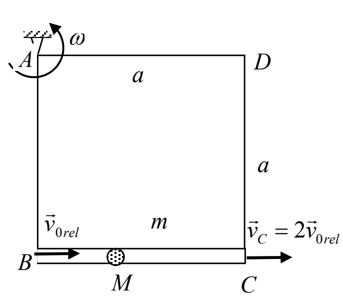
f* Napraviti anlizu tipova sila koje dejstvuju na materijalne tačke u slučaju bez i sa udarom u zid? Da li postoji funcija neke od sila i koje i odredi njen izraz? Da li je sistem kretanja materijalnih tačaka konzervativan ili nekonzervativan? Da li postoji funkcija rasipanja neke od sila i koje? Obrazloži odgovor.

Zadatak 28. Koliku početnu vertikalnu brzinu v_0 treba saopštiti teškoj materijalnoj tački M, mase m, u položaju D, kada je $\overline{OD} = \ell$ horiyontalno, obešenoj u tački O pomoću nerastegljivog konca dužine ℓ, pa da se konac prekine u trenutku kada je vertikalan, ako se on kida pri sili $F_{\max} = 7G$? Koliko mora biti koeficijent trenja hrapave horizontalne ravni AB, $s = 9\ell$ dužine , po kojoj se tačka kreće dalje, pod pretpostavkom da se ne odvaja od nje, pa da odnos brzina tačke M u položajima B i A bude $\frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{2}$. r. Koje i kakve veze dejstvuju na materijalnu tačku u toku celokupnog perioda posmatranog kretanja? Kakav je to materijalni sistem, konzervativni ili nekonzervativni? Da li postoji funkcija neke od sila pod čijim se dejstvom materijalna tačka kreće? Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije sistema napisati odgovarajuću relaciju za svaki od perioda kretanja. Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na materijalnu tačku?

Zadatak 29. Horizontalna cev OC dužine ℓ obrće se oko nepokretne ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω, dok se u cevi nalazi materijalna tačka M, mase m, na koju dejstvuje otporna sila $\vec{F} = -k\vec{v}_{rel}$, gde je k konstanta, a $\vec{v}_{rel}$ relativna brzina tačke u odnosu na cev. Ako je $\frac{k}{m} = \frac{3}{2}\omega$ odrediti zakon kretanja materijalne tačke u cevi. U početnom trenutku materijalna tačka je bila na rastojanju $OM_0 = \frac{\ell}{5}$ i imala je početnu brzinu $v_0 = \frac{\ell\omega}{10}$ u odnosu na cev. Posle kog vremena će pokretna materijalna tačka napustiti cev? (Slika 27). Kojim vezama je podvrgnuta materjalna tačka? Kakav je otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku i da li se mogu odrediti funkcije sila i kojih? Da li je posmatrani materijalni sistem koji čini materijalna tačka konzervativni ili nekonzervativni? Da li se ukupna energija materijalne tačke menja u toku njenog kretanja? Kolika je snaga rada pojedinih sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku? Kolika je ukupna snaga rada svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku koja se kreće po ovoj paraboli prema definisanim uslovima njenog kretanja?



Slika 27.



Slika 28

Zadatak 30. Kvadratna pločica $ABCD$,Slika 28., zanemarljive mase, stranice a, obrće se oko vertikalne ose kroz tačku A konstantnom ugaonom brzinom ω. Duž stranice BC kreće se materijalna tačka M, mase m. U početnom trenutku materijalna tačka M je bila u položaju B i imala je relativnu brzinu v_{0rel}. Odrediti:

a) Zakon relativnog kretanja materijalne tačke M po suportu,
b) Veličinu ugaone brzine ω prenosnog kretanja suporta da bi relativna brzina tačke M u položju C bila $2v_{0rel}$,
c) Komponente reakcije veze.

Kojim vezama je podvrgnuta materjalna tačka? Kakav je otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku i da li se mogu odrediti funkcije sila i kojih? Da li je posmatrani materijalni sistem koji čini materijalna tačka konzervativni ili nekonzervativni? Da li se ukupna energija materijalne tačke menja u toku njenog kretanja? Kolika je snaga rada pojedinih sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku? Kolika je ukupna snaga rada svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku koja se kreće po ovoj paraboli prema definisanim uslovima njenog kretanja?

Zadatak 31. Glatka žica savijena u obliku parabole, čija je jednačina $y^2 = 2px$, obrće se oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω. Na žicu je nametnut prsten koji može da se kreće po glatkoj žici.

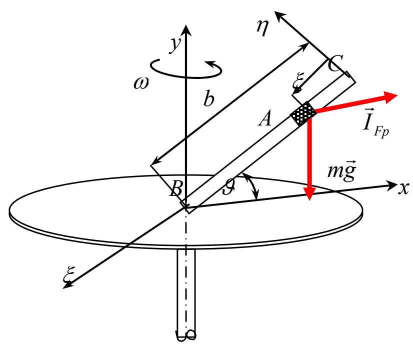
Odrediti:

a* brzinu prstena u odnosu na žicu ako se on u početnom trenutku nalazio u miru u položaju M_0 sa apscisom x_0.

b* do koje će se tačke podići prsten ako se u početnom trenutku nalazio u koordinatnom početku i ako mu je saopštena početna brizna v_0 usmerena po horizontali udesno.

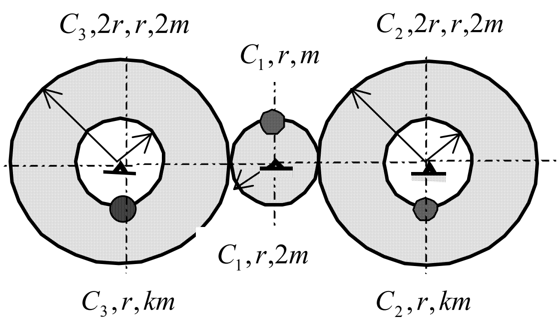
Kojim vezama je podvrgnut prsten? Kakav je otpor veze koja dejstvuje na prsten? Koje sile dejstvuju na prsten i da li se mogu odrediti funkcije sila i kojih? Da li je posmatrani materijalni sistem koji čini materijalna tačka konzervativni ili nekonzervativni? Da li se ukupna energija materijalne tačke menja u toku njenog kretanja? Kolika je snaga rada pojedinih sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku? Kolika je ukupna snaga rada svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku koja se kreće po ovoj paraboli prema definisanim uslovima njenog kretanja?

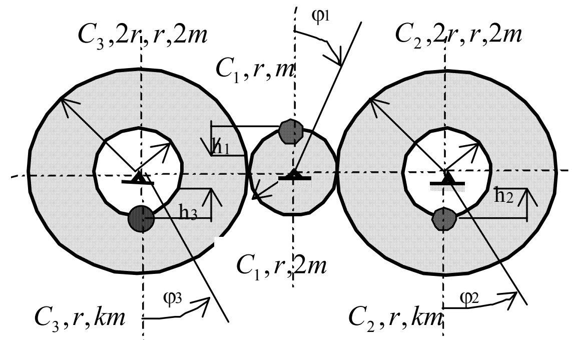
Zadatak 32. Matrijalna tačka A, mase m, puštena je iz mira (relativno u odnosu na disk) iz položaja C i klizi bez trenja niz nagnutu cev, pod uglom ϑ u odnosu na disk, dok se disk zajedno sa cevi okreće oko vertikalne ose, konstantnom ugaonom brzinom ω, slika 30. Naći vreme za koje će tačka preći put od tačke C do tačke B.



Slika 30

Zadatak 33. Na *slici 31.* prikazan je sistem, koji leži u vertikalnoj ravni, i koji se sastoji od tri teška zupčanika, dva u obliku kružno-prstenastih homogenih diskova, poluprečnika r i $2r$, masa po $2m$, koji mogu u zahvatu da se okreću oko osa kroz C_2, odnosno C_3, a nose na rastojanjima r od osa obrtanja zavarene materijalne tačke masa po $m_2 = km$ i zupčanika u obliku homogenog diska, poluprečnika r, mase $2m$, koji nosi materijalnu tačku mase m na rastojanju r od centra i koji može da se obrće oko ose kroz njegov centar masa C_1, i koji je u zahvatu sa prethodna dva zupčanika. Jedan od položaja ravnoteže sistema je prikazan na slici. Odrediti sve moguće položaje ravnoteže sistema, kao i sve moguće stabilne položaje ravnoteže. Za slućaj da parametar $k \in N$ pripada skupu celih brojeva odrediti sopstvene kružne frekvencije malih oscilacija sistema oko položaja stabilne ravnoteže za najmanju vrednost tog parametra. Koja je najmanja vrednost parametra $k \in N$ za koji je naznačeni na *slici 31.* položaj ravnoteže stabilan, a koja za drugi mogući stabilan položaj ravnoteže, različit od položaja koji je prikazan na *slici 31*? Za oba slučaja odredi sopstvene kružne frekvencije malih oscilacija sistema.





Slika 31.

Zadatak 34. Izračunati aksijalne momente inercije masa za ose x, y i z i odgovarajuće centrifugalne momente masa, a zatim sastaviti vektore momenata masa za pol u koordinatnom početku i koordinatne ose pojedinačno za:

a* štap mase m dužine ℓ, ako je postavljen u pravcu: a1* ose x i a2* u pravcu pod uglom od $\frac{\pi}{4}$ u odnosu na ose x i y;

b* homogenu tanku pravougaonu pločicu mase m osnovnih ivica a i ka ako je postavljena tako da joj dve upravne stranice leže na koordinatnim osama x i y;

c* homogenu tanku kružnu pločicu mase m pulupričnika r ako je postavljena tako da leđi u ravni koju čine koordinatne ose x i y, a one su istovremeno i tangente na njenu kružnu konturu;

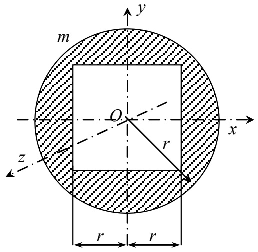
d* homogeni kružni cilinar, mase m, visine h, poluprečnika osnove r;

e* homogeni kružni konus, mase m, visine h, poluprečnika osnove r;

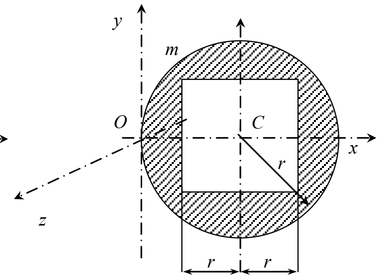
f* homogenu sferu, mase m, poluprečnika r koja je u položaju da dodiruje sve tri koordinatne površi;

g* tanku homogenu kružnu pločicu, mase m poluprečnika r, iz koje je izrezan kvadrat stranice r, tako da se centri kvadrata i kruga poklapaju, kada pločica leži u ravni koju ćine ose x i y; kao i za slučaj kada se pločica zarotira oko ose z za ugao φ. Slika 34. g1* i g1*

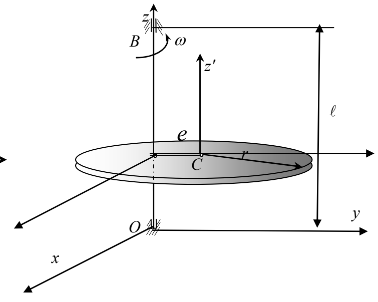
e* tanki homogeni disk mase m, u obliku tanke pločice, poluprečnika r, ekscentriciteta e, ekscentrično nasadjenog na vratilo čija se osa poklapa sa osom Oz .(slika 34. e*) i na visini $\frac{\ell}{2}$ od koordinatnog početka O;



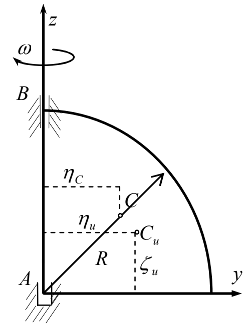
Slika 34. g1*



Slika 34. g1*



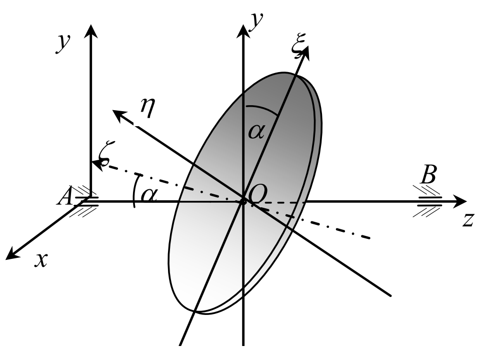
Slika 34. e*

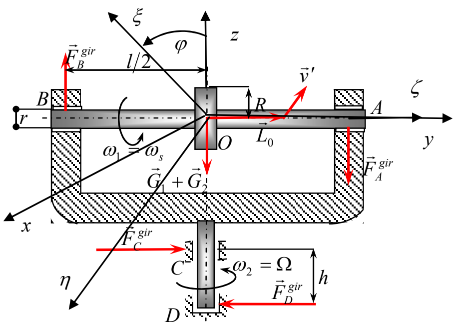


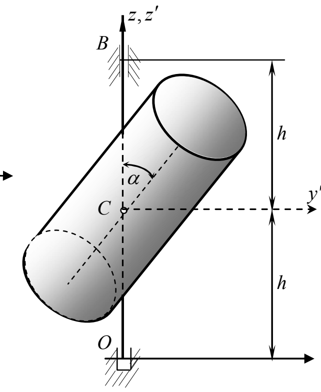
Slika 34. h*

h* tanku homogenu pločicu mase m oblika četvrtine kruga poluprečnika R, koja leži u ravni Oyz;

m* tanki homogeni disk mase m, u obliku tanke pločice, poluprečnika r, koso pod uglom α nasadjenim na vratilo čija se osa poklapa sa osom Oz .(slika 34. m*) i na udaljenju $\frac{\ell}{2}$ od koordinatnog početka O;


Slika 34. m*


Slika 34. n*

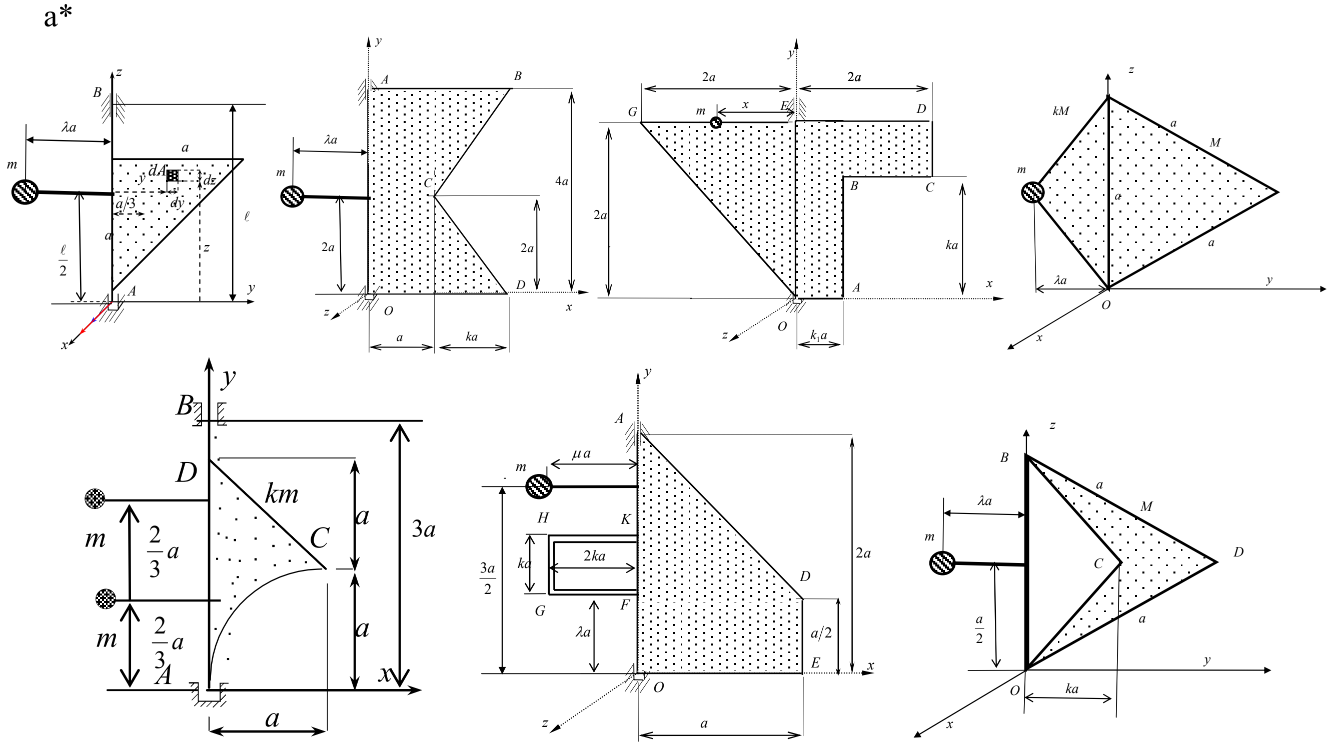

Slika 34. k*

n* sklop koji se sastoji od tankog homogenog diska mase m, u obliku tanke kružne pločice, poluprečnika R, koji je nasadjen na vratilo, oblika homogenog cilindra mase m_0, dužine ℓ, kružnog poprečnog preseka poluprečnika r čija se osa poklapa sa osom $O\zeta$.(slika 34. n*) i na udaljenju $\frac{\ell}{2}$ od koordinatnog početka O;

k* homodeni valjak mase m, visine h, poluprečnika osnove r, koso pod uglom α, nasadjenim na lako vratilo sa osom u pravcu Oz ose koordinatnog sistema na udaljenju $\frac{h}{2}$ od koordinatnog početka.

Zadatak 35. Izračunati aksijalne momente inercije masa za ose x, y i z i odgovarajuće centrifugalne momente masa, a zatim sastaviti vektore momenata masa za pol u koordinatnom početku i koordinatne ose pojedinačno za pločice prikazane na slici 35.

a*

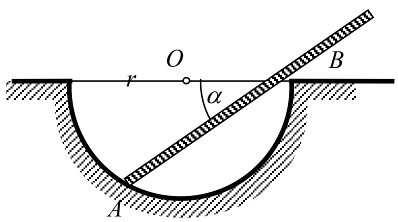


Dusjutuj rešenja, i slučajeve kada je odnos parametara takav da se centri masa pčoćica sa dodatim materijalnim tačkama nalaze na osi koordinatnog sistema.

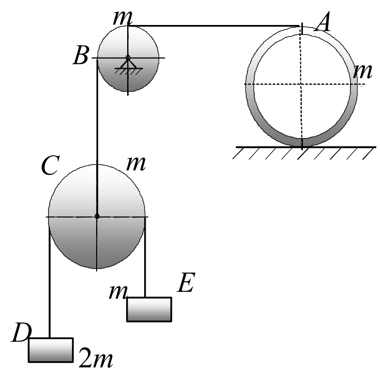
Za svaku od pločica odrediti centre udara, kao i kinetičke pritiske na ležišta, ako se pločica obrće konstantnom ugaonom brzinom oko ose koordinatnog sistema.

Da li je centralna osa pločice istovremeno i glavna osa inercije masa ili ne?

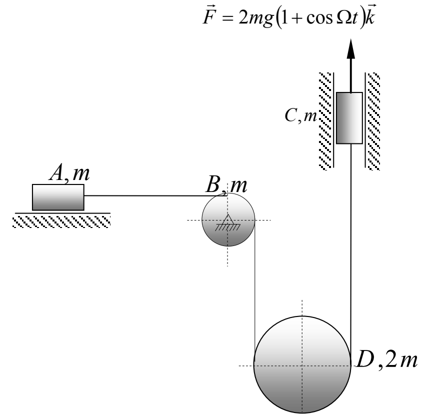
Zadatak 36. Homogeni prizmatični štap AD, težine G, dužine $2l$, oslanjase krajem A na glatku podlogu oblika polikruga polipriečnika r a u tački B naleže na njen obod, slika 36. Odrediti ugao α koji gradi štap sa horizontalnim polupreČnikom OB u ravnotežnom položaju i otpore oslonaca. ($r = \sqrt{3}\ [m]$, $2l = 4\ [m]$). Napisati jednačinu kretanja homogenog prizmatičnog štapa oko tog ravnoteđnog položaja, mereći generalisanu koordinatu od tog položaja ravnoteže.



Slija 36.



Slika 37.



Slika 38

Zadatak 37. Sistem prikazan na *slici 37* sastoji se od obruča A, mase m, diskova B i C, masa po m i tereta D i E, masa $2m$ i m. Obruč A se kotrlja bez klizanja po horizontalnom putu, a disk B se obrće oko nepokretne ose. Uže koje je jednim krajem namotano na obruč A, prebačeno je preko diska B i drugim krajem vezano je za centar diska C. Za krajeve drugog užeta koje je prebačeno preko diska C, vezani su tereti D i E. Odrediti ubrzanja tereta, sile u užadima, kao i zakon kretanja elemenata sistema.

Napisati izraze za kinetičku i potencijalnu energiju sistema. Da li je sistem konzervativan?

Zadatak 38. Sistem prikazan na *slici 38.* sastoji se od tereta A i C, masa po m, kotura B, mase m i kotura D, mase $2m$. Teret A klizi po glatkoj horizontalnoj ravni, a teret C po glatkom vertikalnom žlebu. Kotur B se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz njegov centar. Nerastegljivo uže je vezano za terete A i C, prebačeno preko kotura B i obmotano oko kotura D. Na teret C dejstvuje sila koja se sastoji od dve komponente: jedne konstantnog intrenziteta $F = 2mg$, i druge oscilatornog karaktera $\widetilde{F} = 2mg\cos\Omega t$, $\vec{F} = 2mg(1\_\cos\Omega t)\vec{k}$ u pravcu žleba, smera datog na *slici 38.* Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Odrediti:

a* ubrzanja tereta A i C i sile u svim delovima užadi. Koturove smatrati homogenim diskovima.

b* zakon kretanja elemenata sistema. Da li je moguća pojava rezonancije u sistemu?

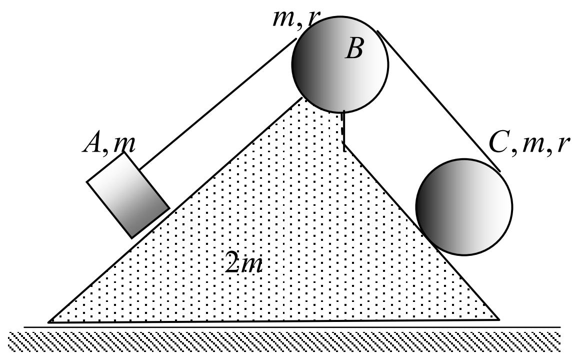
c* snagu rada sila sistema i vezu sa ukupnom energijom sistema.

d* ubrzanja tereta A i C i sile u svim delovima užadi, ako je horizontalna ravan hrapava koeficijenta trenja μ;

e* snagu rada sila sistema i vezu sa ukupnom energijom sistema za slučaj kada je horizontalna ravan hrapava koeficijenta trenja μ;

Zadatak 39. Na prizmi mase $2m$, koja može da se kreće po horizontalnoj glatkoj ravni, nalazi se disk B, poluprečnika r i mase m vezan za prizmu osovinom B. Preko diska B prebačeno je nerastegljivo uže, zanemarljive težine, koje je jednim krajem vezano za teret A, mase m, a drugim krajem je obmotano na kotur C, poluprečnika r i mase m. Kotur se kotrlja bez klizanja a teret A klizi po prizmi.

a* Zanemujući trenje između prizme i podloge, između tereta A i prizme, kao i otpor obrtanju u ležištu B i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta i rešiti iste.

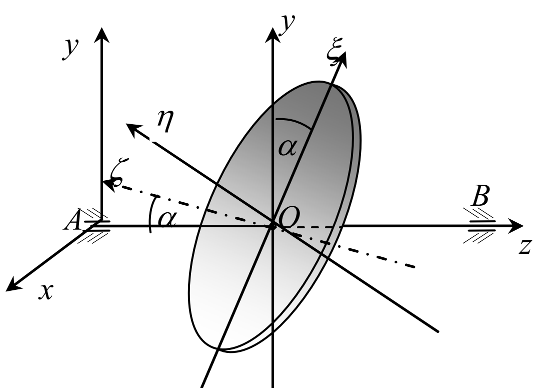


Slika 39.

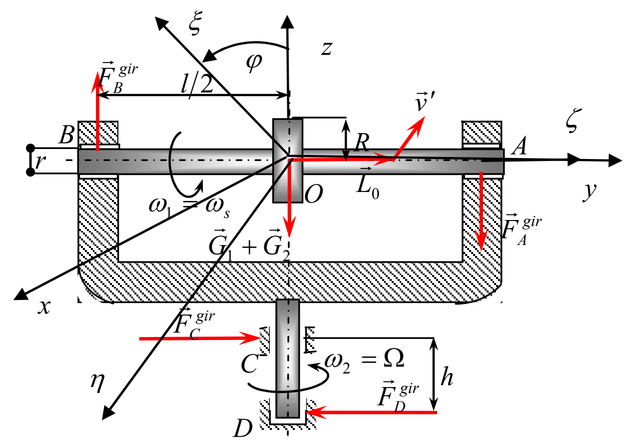
. ***b**** Zanemujući trenje između prizme i podloge, kao i otpor obrtanju u ležištu B, ali uzimajuči trenje između tereta A i prizme, kao i otpor protiv kotrljanja kotura po prizmi, napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema u vertikalnoj ravni pod dejstvom težina tereta.

U tom slučaju pretpostaviti da između tereta A i prizme postoji trenje pri čemu je koeficijen trenja μ a krak otpora kotrljanju je ε. Odrediti takođe i sile u užadima i silu u ležištu B. Koristiti relacije principa dinamičke ravnoteže (D´Alamber-ovog principa).

Zadatak 40. Homogeni tanki disk, mase m, poluprečnika r , nasadjen je na sredini lakog vratila AB dužine l, zanemarljive mase, sa kojim obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose AB, *slika 49*. Osa simetrije diska sa osom AB gradi ugao α. Odrediti kinetičke pritiske u ležištima A i B vratila i intenzitet devijacionog sprega koji dejstvuje na vratilo..



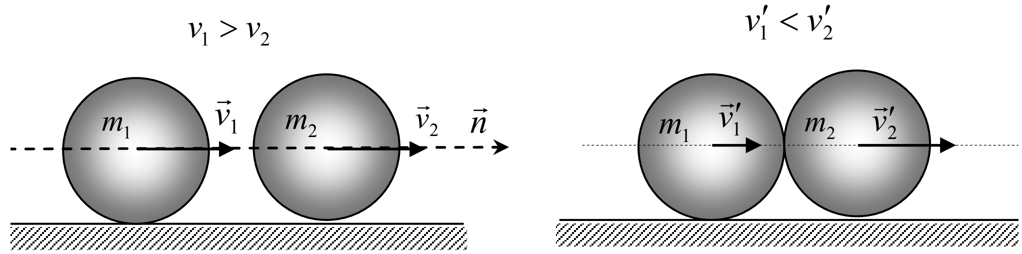
Slika 40.



Slika 41.

Zadatak 41. Materijalni sistem na *slici 41*., sastoji se od vratila AB, mase M_1, kružnog poprečnog preseka poluprečnika r, koje se obrće oko horizontalne ose AB brojem obrtaja $n_1[o/\min]$ i homogenog diska (zamajca) mase M_2 i poluprečnika R, koji je nasadjen na sredini raspona tog vratila. Ako se lak nosač ležišta A i B, zanemarljive mase, obrće oko vertikalne ose brojem obrtaja $n_2[o/\min]$, odrediti ukupne reakcije ležišta A i B, ako je rastojanje između ležišta l. Odrediti i dopunske sile (usled giroskopskog efekta) u ležištima C i D koja su na rastojanju h.

Zadatak 42. Kuglica M_1, mase m_1, kreće se pravolinijski i udari brzinom v_1 kuglicu M_2 mase m_2, koja je do udara bila u stanju mirovanja, pri tome se brzina kuglice M_1 smanji za polovinu. Pretpostavljajući da je udar upravni i centralni, odrediti masu m_2 kuglice M_2 i njenu brzina neposredno posle udara, ako je koeficijent sudara (uspostavljanja) $k = 0.5$.



Slika 42.

Zadatak 43. Kuglica mase m slobodno pada sa visine h i udari upravno o horizontalnu nepokretnu ravan i odbije se od nje.

a* Odrediti maksimalnu visinu penjanja H kuglice nakon odbijanja, ako je koeficijent sudara (uspostavljanja) k.

b* Koliki je koeficijent udara ako kugla odskoči do visine $h/2$?

c* Odrediti broj udara u podlogu posle kog neće dostici visinu $h/2^n$, gde je n ceo broj? Koliko vremena će proteći dok kuglica počne da odskaće ispod visine $h/2^n$?

Zadatak 44. Kuglica mase m bačena je iz tačke O, početnom brzinom v_0, koja sa horizontalom gradi ugao α i udari u vertikalni glatki zid A i posle odbijanja prođe kroz svoj početni položaj O.

a* Odrediti rastojanje a početnog položaja materijalne tačke od zida, ako se zna da je koeficijent sudara (uspostavljanja) k.

b* Posle sudara sa horizontalnim podom u tački O, pri čemu se može usvojiti isti koeficijent sudara i odbijanja u koju tačku vertikalnog zida će udariti? Da li je ta tačka na višem ili nižem položaju od tačke udara u prethodnom sudaru sa istim zidom?

Otpor vazduha zanemariti u oba slučaja.

Zadatak 45. Veliki broj malih kockica, čija je ukupna masa m čini materijalni sistem diskretnih materijalnih tačaka i leži na ivici stola ustanju mirovanja, kada konstantna sila F počinje da dejstvuje, na ovaj materijalni sistem, paralelno sa ravni stola, kako je na slici 1 prikazano. Odrediti brzinu kretanja ovog materijalnog sistema u funkciji koordinate x - dužine niza za slučaj:

a*da je površina stola hrapava i da je koeficijent trenja između kockica i stola μ,

b* da je površina stola idealno glatka

c* Kolika je ova brzina kada polovina svih kockica padne sa stola?

Zadatak 46. Homogeni lanac dužine l, *slika 2,* čija je masa jedinice dužine ρ', visi vertikalno zategnut pri čemu je njegov drugi kraj vezan za tačku A. Lanac se pusti da slobodno pada. Odrediti veličinu sile reakcije u tački A kao funkciju pređenog rastojanja x.

Zadatak 47. Masa skeleta prvog stepena trostepene rakete sa aparaturom je M_1, a mase drugog i trećeg stepena su $M_2 = \dfrac{M}{2}$, $M_3 = \dfrac{M}{4}$, dok je masa aparature $M_a = \dfrac{M}{8}$. Brojevi Ciolkovskiog po stepenima raklete su: $C_1 = 6$ i $C_2 = 5$. Početna brzina rakete je jednaka nuli, $v_0 = 0$, a potrebna brzina aparature je $v_3 = 9\left[\dfrac{km}{\sec}\right]$, dok je relativna brzina isticanja produkata sagorevanja iz raketnih motora jednaka za svaki stepen rakete i odgovarajuću fazu njenog kretanja $v_{rel} = 2\left[\dfrac{km}{\sec}\right]$. Odrediti ukupnu masu goriva, koeficijente stepena i brzine na kraju svakog aktivnog perioda kretanja rakete i pomoću proizvoda količnika $\frac{C_s}{k_s}$ proveriti početnu ukupnu masu rakete.

Zadatak 48. Odrediti pritisak na površ Zemlje materijalne tačke mase m koja:

a* miruje na površi Zemlje, uzimajući uticaj prenosnog kretanja Zemlje. Koliko je taj pritisak kada je materijalna tačka na polutaru, a koliki kada je na polu?žž

b* se kreće po meridijaju na površi Zemlje, uzimajući uticaj prenosnog kretanja Zemlje. Koliko je taj pritisak kada je materijalna tačka na polutaru, a koliki kada je na polu?

c* se kreće po uporedniku na površi Zemlje, uzimajući uticaj prenosnog kretanja Zemlje. Koliko je taj pritisak kada je materijalna tačka na polutaru, a koliki kada je na polu?

Zadatak 49. Po hrapavoj strmoj ravni, nagibnog ugla α kreće se telo mase m, u polju Zemljine teže i vučeno u horizontalnom pravcu paralelnom strmoj ravni, a preko konca koji uvek zadržava horizontalni pravac. Od trenutka posmatranja kretanja tela po strmoj ravni ono se kreće pravolinijski i jednoliko sa horizontalnom komponentnom brzine v_h. Odrediti:

a* komponente brzine kretanja tela niz hrapavu strmu ravan, kao i silu u koncu kojim se vuče telo, ako je koeficijent trenja izmedju tela i strme ravni μ .

b* Otpor strme ravni u posmatranom intervali vremena:

c* Napisati kinetičku i potencijalnu energiju kretanja materijalne tačke, kao i pojedinačno snagu vršenja rada sila koje dejstvuju na materijalnu tačku, kao i otpora veza?

d* Na osnovu teoreme o promeni ukupne energije materijalnog sistema napisati odgovarajući izraz za promenu ukupne energije sistema.

Zadatak 50. Materijalna tačka mase m visi o koncu dužine ℓ, koji je okačen o tačku O na vertikalnoj osi, oko koje se konstantnom ugaonom brzinom ω obrće vertikalna ravan u kojoj se kreće materijalna tačka ne napuštajući je. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže materijalne tačke i odrediti sile veza (sila u koncu i .otpor ravni koja rotira).

VI Nekoliko izabranih primera mogućih pitanja na usmenom delu ispita*

K.1 Komplet*

1* Ko je dao značajne doprinose da se utemelji naučna oblast pod imenom Dinamika? Kojim pojmovima objasniti filozofiju kretanja? Šta je zadatak Dinamike?

2. Navedi definiciju pojma zakon dinamike i nabroji osnovne zakone dinamike. Zakon veza, vrste veza i sile otpora veza.

3. Kretanje materijalne tačke u polju centralnih sila.

4. Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke. Koriolisovo ubrzanje.

5. Princip dinamičke ravnoteže u primeni na sistem materijalnih tačaka.

K.2 Komplet*

1. Definisati preprincip ili prednačelo i nabrojati osnovne preprincipe i dati objašnjenja.

2.Zakon veza i njihove klasifikacije, otpor veze, stepen slobode kretanja i generalisane koordínate.

3. Teorema o promeni kinetičke energije sistema.

4. Specijalni slučajevi relativnog kretanja materijalne tačke. Slučaj kada je prenosno kretanje obrtanje tela oko nepokretne ose

5. Teoreme mehanike – teorema o promeni impulsa kretanja i momenta impulsa kretanja u primeni na kretanje sistema materijalnih tačaka.

K.3* Komplet

1. Nabrojati osnovna odredjenja Kinetike (Dinamike) i navesti njihove definicije.

2. Kretanje materijalne tačke po površi - broj stepeni slobode kretanja, generalisane koordinate, sile koje dejstvuju na materijalnu tačku i odgovarajuće generalisane sile, Lagrange-ove jednačine prve vrste, Lagrange-ov množilac veze Lagrange-ove jednačine druge vrste.

3. Teoremu o promeni kinetičke energije pokretne materijalne tačke u konačnom intervalu vremena.

4. Relativno kretanje teške tačke po površi Zemlje.

ili alternativa 4. Dejstvo udara na telo koje se obrće oko nepokretne ose. Centar udara.

5. Kenigova teorema o kinetičkoj energiji za ravansko kretanje krutog tela. Jednačine dinamike ravanskog kretanja krutog tela

K.4* Komplet

1. Nabrojati osnovna odredjenja Kinetike (Dinamike) i navesti njihove definicije. Koja su osnovna odredjenja vektorske, a koja skalarne invarijante u odnosu na transformaciju koordinata?

2. Kretanje materijalne tačke po liniji - broj stepeni slobode kretanja, generalisane koordinate, sile koje dejstvuju na materijalnu tačku, Lagrange-ove jednačine prve vrste, Lagrange-ovi množioci veze, Lagrange-ova jednačina druge vrste.

3. Lema o promeni momenta impulsa (količine) kretanja materijalne tačke u polju centralnih sila.

4. Relativno kretanje teške tačke po površi Zemlje.

5. Obrtanje tela oko nepomične tačke. Ojlerove jednačine dinamike krutog tela oko nepomične tačke.

ili alternativa 5. Teoreme mehanike u primeni na dinamiku sudara.

K.5* Komplet

1. Nabrojati osnovna odredjenja Kinetike (Dinamike). U generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata napisati izraze za impuls kretanja materijalne tačke i silu inercije koja se javlja pri njenom kretanju.

2. Kepler-ovi zakoni o kretanju planeta.

3. Teorema o promeni ukupne energije pokretne materijalne tačke u prisustvu konzervativnih sila i neidealnih veza i otpornih sila proporcionalnih prvom stepenu njene brzine.

4. Fizičko klatno.

5. Kinetički pritisci na ležista rotora - Obrtanje tela oko nepomične tačke.

K.6* Komplet

1. Newton-ov zakon o opštoj univerzalnoj gravitaciji

2. Osnovno skalarno odredjenje – rad. Definicija. Rad sile inercije, rad sila otpora idealnih i neidealnih veza.

3. Stabilnost kretanja i mirovanja. Kriterijumi stabilnosti.

ili alternativa 3. Kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile opšte gravitacije.Veštački sateliti.

4. Osnovna odredjenja dinamike sistema materijalnih tačaka

5. Trenutne sile i udarni impulsi. Centar udara tela koje može da se obrće oko nepokretne ose.

K.7* Komplet

1. O sili uzajamnog privlačenja sva tela.

2. Konzervativne sile – rad konzervativnih sila – fuinkcija sile.

3. Cikloidno klatno. Osobine cikloidnog klatna.

4. Teorema o promeni kinetičke energije relativnog kretanja. Integral energije relativnog kretanja

5. Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog.

ili alternativa 5. Vrste sudara

K.8 Komplet*

1. Zakon reaktivnog potiska ili reaktivnog pogona.
2. Snaga - Efekat rada sile
3. Lagrange-ove jednačine prve vrste za sistem materijalnih tačaka. Lagragne-ovi mnozoioci veza. Uslovi za brzine i ubtzanja.
4. Kretanje materijalne tačke po sferi pod dejstvom Zemljine teže
5. Teoreme mehanike sistema materijalnih tačaka

K.9 Komplet*

1. Pojam principa ili načela mehanike. Nabrojiti diferencijalne i integralne principe mehanike. Princip dinamičke ravnoteže.
2. Newton-ovi aksiomi (principi) - Axiomata sive leges motus
3. Broj stepeni slobode kretanja. Generalisane koordinate sistema materijalnih tačaka. Lagrange-ove jednačine druge vrste .
4. Kretanje materijalne tačke po paraboli
5. Relativno kretanje materijalnog krutog tela u odnosu na središte sistema’.

Alternativa: 5. Udarne sile. Trenutni impuls.

K.10 Komplet*

1. Pojam principa ili načela mehanike. Nabrojiti diferencijalne i integralne principe mehanike. Princip rada.
2. Pojam teorema mehanike. Nabrojati najvažnije teoreme mehanike. Teorema o promeni impulsa (količine) kretanja jedne materijalne tačke. Lema o promeni momenta impulsa kretanja.
3. Binet-ov obrazac – Binet-ova jednačina.
4. Vektori momenata inercije masa materijalnog sistema za pol i osu. Aksijalni momenti inercije masa tela i devijacioni momenti masa. Glavne ose momenata inercije masa i ose inercione asimetrije.
5. Jednačina Ciolkovskog u primeni na višestepene rakete.

Alternativa: 5. Osnovi teorije dinamike sudara dva materijalna sistema

VII Dva primera mogućeg kompleta ispitnih zadataka na pismenom delu ispita*

Primer 1.

PISMENI DEO ISPITA IZ PREDMETA

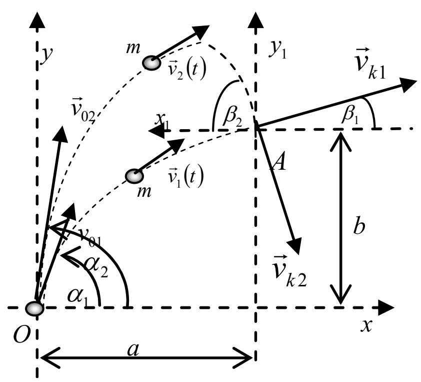
MEHANIKA III - DINAMIKA (KINETIKA)

Zadatak 1. Dve jednake materijalne tačke masa po m lansirane su, u polju Zemljine teže i u vertikalnoj ravni i bezvazdušnom prostoru, iz zajedničke tačke O različitim brzinama $\vec{v}_{01}$ i $\vec{v}_{02}$ pod uglom α_1, odnosno α_2 prema horizontu, slika 1.

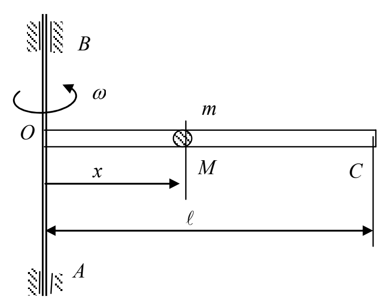
a* Odrediti vreme kada će dospeti u položaj koji je udaljen za a od tačke lansiranja i na višoj poziciji od nje za b, kao i brzine prolaska kroz taj položaj. Da li se mogu i pod kojim uslovom sudariti (susresti) u tom položaju?

b* Odrediti domete i položaj u koji će dospeti te materijalne tačake po pnovnom dospeću na visinu njihovog lansiranja. Pod kojim uslovima će im dometi biti jednaki? Po kojim putanjama su se kretale?

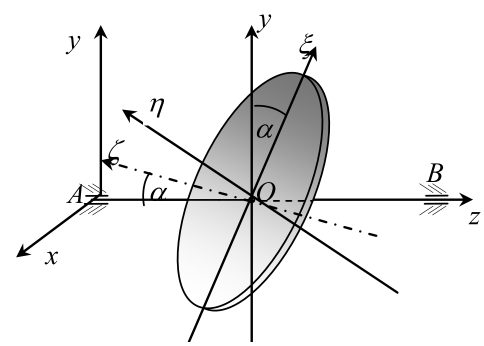
c* Ako na udaljenu a od njihovog položaja lansiranja postavimo vertikalni zid u koju tačku će one udariti i kojim brzinama?



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Zadatak 2. Horizontalna cev OC dužine ℓ obrće se oko nepokretne ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω, dok se u cevi nalazi materijalna tačka M, mase m, na koju dejstvuje otporna sila $\vec{F} = -k\vec{v}_{rel}$, gde je k konstanta, a $\vec{v}_{rel}$ relativna brzina tačke u odnosu na cev. Ako je $\dfrac{k}{m} = \dfrac{3}{2}\omega$ odrediti zakon kretanja materijalne tačke u cevi. U početnom trenutku materijalna tačka je bila na rastojanju $OM_0 = \dfrac{\ell}{5}$ i imala je početnu brzinu $v_0 = \dfrac{\ell\omega}{10}$ u odnosu na cev. Posle kog vremena će pokretna materijalna tačka napustiti cev? (Slika 2). Kojim vezama je podvrgnuta materjalna tačka? Kakav je otpor veze koja dejstvuje na materijalnu tačku? Koje sile dejstvuju na materijalnu tačku i da li se mogu odrediti funkcije sila i kojih? Da li je posmatrani materijalni sistem koji čini materijalna tačka konzervativni ili nekonzervativni? Da li se ukupna energija materijalne tačke menja u toku njenog kretanja? Kolika je snaga rada pojedinih sila koje dejstvuju na posmatranu materijalnu tačku? Kolika je ukupna snaga rada svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku koja se kreće po ovoj paraboli prema definisanim uslovima njenog kretanja?

Zadatak 3. Homogeni tanki disk, mase m, poluprečnika r, nasadjen je na sredini lakog vratila AB dužine l, zanemarljive mase, sa kojim obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose AB, *slika 3*. Osa simetrije diska sa osom AB gradi ugao α. Odrediti kinetičke pritiske u ležištima A i B vratila i intenzitet devijacionog sprega koji dejstvuje na vratilo.

Napomena. Pismeni deo isita traje četiri sata. Svaki zadatak nosi po 10 poena. Položen pismeni deo ispita je sa osvojenih 18 i više poena. Nastavnik može pozvati studenta uslovno na usmeni deo ispita sa 15 do 18 poena, a stim što na usmenom delu ispita kao kvalifikaciju za usmeni student treba da tačno uradi jedan teorijski zadatak u trajanju od pola sata. Rezltati pismenog dela ispita biće objavljeni najkasnije dva dana po održanom pismenom delu ispita. Svaki student koji nije pozvan na usmeni deo ispita može videti svoj pismeni zadatak u vreme redovnih konsultacija nastavnika ili saradnika sa studentuima i to do termina održavanja usmenog dela ispita i dobiti potrebna objašnjenja. Po početku usmenog dela ispita i kasnije smatraće se da student nije hteo da napravi uvid u svoj pismeni zadarak i time izgubio to pravo.

Svi studenti mogu koristiti redovne konsultacije nastavnika i saradnika za dobijanje stručne pomoći u razjašnjavanju nejasnih pitanja iz sadržaja predmeta Mehanika III - Dinamika – Kinetika. Ohrabruju se studenti da koriste ove konsultacije.

Primer 2.

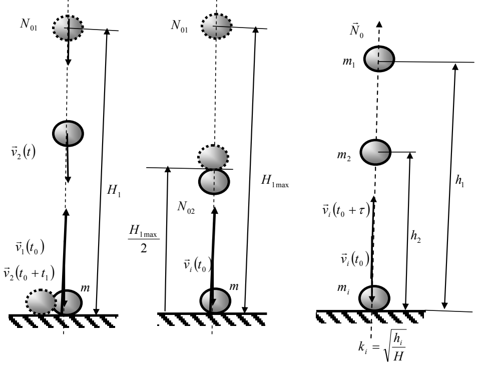
PISMENI DEO ISPITA IZ PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA (KINETIKA)

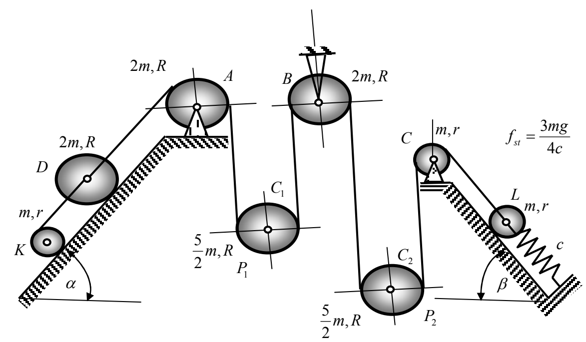
Zadatak 1. ***a**** Materijalna tačka mase m_1, izbačena je, u polju Zemljine teže, iz tačke O početnom brzinom v_{01} vertikalno uvis. U trenutku kada je ona dostigla svoju maksimalnu visinu penjanja H_1, iz njene polazne tačke O izbačena je druga materijalna tačka mase m_2 brzinom v_{02}. Odrediti njenu početnu brzinu lansiranja (izbačaja) pa da ona u istom trenutku udari o tlo kada i prethodno lansirana materijalna tačka? (Slika 1).

b* Odrediti odnos početnih brzina jednovremenog lansiranja u vertukalnom pravcu tih materijalnih tačaka da bi se one jedniovremeno našle na polovini maksimalne visine koju dostigne brže krećuća se materijalna tačka. Da li postoji samo jedno rešenje?

c* Ako su materijalne tačke od različitih materijala, te se puste, bez početnih brzina i sa iste visine H da udare u pod, na osnovu njihovog odskoka h_1 i h_2 odrediti njihove dolazne i odlazne brzine sudara sa podom, kao i odgovarajuće koeficijente sudara i odnos tih koeficijenata sudara.,



Slika 1.



Slika 2.

Zadatak 2. Za ***materijalni sistem*** prikazan na slici 2. na kojoj su naznačeni ***kinematičko-kinetički parametri*** odrediti:

a* Broj stepeni slobode kretanja sistema i načiniti izbor generalisanih koordinata sistema;

b* Sve koordinate položaja i konfiguracije sistema, kao i ugaone brzine koturova izraziti pomoću izabranih generalisanih koordinata sistema;

c* Izraze za ***kinetičku i potencijalnu energiju sistema***; Da li se energija datog sistema menja u toku vremena i toku kretanja sistema? Napisati integral energije sistema; Da li je sistem konzervativan? Kolika je snaga rada sila koje dejstvuju na sistem?

d* Diferencijalne jednačine sistema pomoću generalisanih koordinata i Lagrage-ovih jednačina druge vrste-

Zadatak 3. Masa skeleta prvog stepena trostepene rakete sa aparaturom je $M_1 = 8.10^3[kg]$, a mase drugog i trećeg stepena su $M_2 = \frac{M}{2}$, $M_3 = \frac{M}{4}$, dok je masa aparature $M_a = \frac{M}{8}$. Brojevi Ciolkovskiog po stepenima raklete su: $C_1 = 6$ i $C_2 = 5$ .Početna brzina rakete je jednaka nuli, $v_0 = 0$, a potrebna brzina aparature je $v_3 = 9\left[\frac{km}{\sec}\right]$, dok je relativna brzina isticanja produkata sagorevanja iz raketnih motora jednaka za svaki stepen rakete i odgovarajuču fazu njenog kretanja $v_{rel} = 2\left[\frac{km}{\sec}\right]$. Odrediti ukupnu masu goriva, koeficijente stepena i brzine na kraju svakog aktivnog perioda kretanja rakete i pomoću proizvoda količnika $\frac{C_s}{k_s}$ proveriti početnu ukupnu masu rakete.

Napomena. Pismeni deo isita traje četiri sata. Svaki zadatak nosi po 10 poena. Položen pismeni deo ispita je sa osvojenih 18 i više poena. Nastavnik može pozvati studenta uslovno na usmeni deo ispita sa 15 do 18 poena, a stim što na usmenom delu ispita kao kvalifikaciju za usmeni student treba da tačno uradi jedan teorijski zadatak u trajanju od pola sata. Rezltati pismenog dela ispita biće objavljeni najkasnije dva dana po održanom pismenom delu ispita. Svaki student koji nije pozvan na usmeni deo ispita može videti svoj pismeni zadatak u vreme redovnih konsultacija nastavnika ili saradnika sa studentuima i to do termina održavanja usmenog dela ispita i dobiti potrebna objašnjenja. Po početku usmenog dela ispita i kasnije smatraće se da student nije hteo da napravi uvid u svoj pismeni zadarak i time izgubio to pravo.

Svi studenti mogu koristiti redovne konsultacije nastavnika i saradnika za dobijanje stručne pomoći u razjašnjavanju nejasnih pitanja iz sadržaja predmeta Mehanika III - Dinamika – Kinetika. Ohrabruju se studenti da koriste ove konsultacije.

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950

Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:
Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Éléments de statique. Paris 1804.

C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.
Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.
Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):
P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.