DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

XI.3 TRINAESTA NEDELJA
Sudar. Centralni upravni sudar. Centar udara. Charpy-jevo klatno.
Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog. Kelijev problem. Jednačina Ciolkovskog.

Osnovi teorije dinamike sudara dva materijalna sistema (Nastavak)

Uvod

Kada se putanje dveju materijalnih tačaka susreću u nekoj tački i ako u tu zajedničku tačku njihovih putanja dospevaju ***istovremeno različitim brzinama*** i ubrzanjima tada se ostvaruje ***dinamika sudara*** tih dveju materijalnih tačaka. Uzajamno dinamičko dejstvo jedne materijalne tačke na drugu materijalnu tačku se naziva ***sudar***, a njihova dinamika u tom kratkom vremenskom intervalu ***dinamika sudara***.

Ako jedna materijalna tačka ***miruje,*** a druga se pri tome ***kreće*** i u kretanju susreće sa njom dešava se ***udar*** jedne, pokretne, materijalne tačke u drugu, nepokretnu materijalnu tačku. Kako je mirovanje specijalan slučaj dinamike materijalne tačke, onda možemo reći da je pojam ***sudara*** opštiji od pojma ***udara.***

Udar i sudar se mogu pojaviti izmedju jedne materijalne tačke i sistema materijalnih tačaka, sudarom sa jednom od materijalnih tačaka diskretnog sistema materijalnih tačaka, koji se unutrašnjim udarnim silama prenosi trenutno i na ostale materijalne tačke sistema ili tela.. Isto tako sudar materijalne tačke može se ostvariti sudarom sa materijalnim krutim ili deformabilnim telom. Takodje, sudar je moguć u raznim kombinacijama izmedju materijalni tačaka, sistema materijalnih tačaka i krutih i ili deformabilnih tela. Prema svojstvima i karakteru materijalnih sistema – učesnika u dogadjanju sudara možemo sudare podeliti u više različitih vrsta ili grupa. O tome će posebno biti reči.

Pojava sudara je veoma česta u prirodi, kao i u tehničkim sistemima, te je zato veoma značajno poznavati *fenomen i svojstvene elemente sudara, drugim rečima dinamiku sudara i njene vektorske i skalarne invarijante.* Udar se javlja u mnogim tehnološkim operacijama obrade materijala (naprimer, kovanja, prosecanja, probijanja, i slično), gde je udar deo programiranog tehnološkog procesa, ali se javlja i kao štetna pojava u mašinskim sklopovima (naprimer, pri promeni stepena prenosa u zupčastim prenosnicima menjača brzina) kada trenutne sile koje se javljaju mogu izazvati pojavu dinamičkih i udarnih napona velikog intenziteta, iako kratkovremenog trajanja, što često izaziva oštećenja i vodi lomu delova sistema u sudaru.

Karakteristično za sudar je to da dolazi do *kontakta dva sistema makar u jednoj zajedničkoj tački u koju dospevaju istovremeno po jedna materijalna tačka jednog i drugog sistema* (***kontaktna tačka sudara elementarnih masa oba sistema***) u kojoj dolazi do ***interakcije njihovih dinamika***, i time se ostvaruje trenutno, kratkovremenog trajanja dinamičko dejstvo jednog materijalnog sistema na drugi u kontaktu trenutnog (vrlo kratjkog intervala) vremena pri čemu se javlja ***pojava skokovite (diskontinualne)*** promene ***kinetičkih parametara dinamike oba sistema***. To se pre svega ispoljava u promeni ***pravca i intenziteta brzine kretanja oba materijalna sistema,*** koji su se sudarili u odnosu na intenzitete i pravce i smerove njihovih brzina pre njihovog sudara. U pojavi (dešavanju) sudara dva materiojalna sistema javljaju se ***trenutne sile velikog intenziteta*** i ***kratkotrajnog dejstva*** u kratkom vremenskom intervalu τ u kome su materijalni sistemi u kontaktu tokom dinamike sudara, a koje iščezavaju po odvajanju sistema neposredno posle sudara. Sile koje nastaju pri sudarau dva sistema i u stanju kontakta ta dva sistema nazivaju se i ***udarne sile velikog intenziteta, kratkotrajnog dejstva i konačnog impulsa.***

Pri proučavanju sudara čine se neke osnovne pretpostavke, koje omogućavaju sastavljanje modela dinamike sudara dva sistema, a pri tome se zadatak uprošćava, ali se dobijaju zadovoljavajući modeli realne dinamike sudara dva sistema.

Teorija sudara (i u specijalnom slučaju udara) se zasniva na sledećim pretpostavkama:

1* Vreme τ trajanja kontakta dva tela u sudaru je veoma kratko;

2* Udarne sile $\vec{F}^{ud}$ su promenljive i velikog intenziteta, reda veličine $\frac{1}{\tau}$, i kratkotrajnog dejstva u toku vremena τ trajanja kontakta dva tela u sudaru i u toku sudara imaju napadne tačke u tačkama kontakta dva tela u sudaru;

3* Promena momenta impulsa (količine) kretanja materijalnih sistema u toku sudara je konačna.

4* Impuls ''običnih sila'' u poredjenju sa impulsom udarnih, trenutnih sila sudara je mnogo mnogo manji te se može zanemariti.

Udarne sile. Trenutni impuls.

(Vidi: Dvanaesto predavanje)

Teoreme mehanike u primeni na dinamiku (s)udara.

(Vidi: Dvanaesto predavanje)

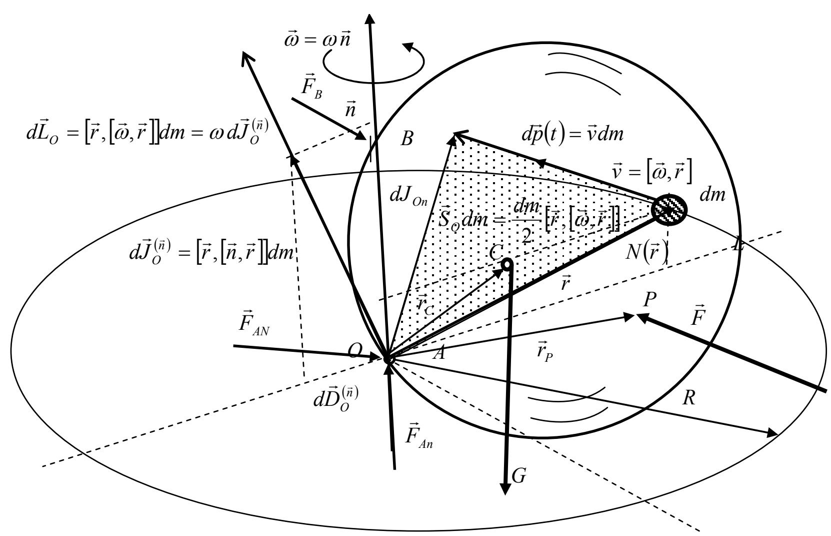
Teorema o radu impulsnih(udarnih) sila

(Vidi: Dvanaesto predavanje)

Princip rada za dinamiku udara u sistemu materijalnih tačaka

(Vidi: Dvanaesto predavanje)

Dejstvo udara na telo koje se obrće oko nepokretne ose. Centar udara.



Za telo koje se obrće oko nepokretne ose ugaonom brzinom ω i ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$, I koje ima u tački O sferno ležošte, au tački B cilindrično ležište, izveli smo na osnovu teorema o promeni impulsa kretanja i promeni momenta impulsa kretanja sledeće dve vektorske kednačine:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\mathfrak{R}_1 = \vec{F}_{AN} + \vec{F}_{An} + \vec{F}_B + \vec{F} + \vec{G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n} + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} = \left[\vec{r}_P,\vec{F}\right] + \left[\vec{r}_C,\vec{G}\right] + \left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

Znači da smo dobili dve vektorske jednačine sa nepoznatim otporima (veza) oslonaca vratila pri čemu znamo da su $\vec{F}_{AN}$ i $\vec{F}_B$ upravne na osu rotacije, dok je $\vec{F}_{An}$ u pravcu ose. Pretpostavimo sada da ne dejstvuje sila težine tela, a da na telo koje se obrće dejstvuju samo *trenutne sile konačnih impulsa i kratkovremenog dejstva, pri čemu* *je spoljašnja trenutna sila $\vec{F}_{ud}$ onda prethodne jednačine, za posmatrani slučaj dinamike udara na telokoje može da se obrće oko nepokretne ose možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}_1 = \vec{F}_{AN} + \vec{F}_{An} + \vec{F}_B + \vec{F}_{ud}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right)\vec{n} + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}} = \left[\vec{r}_P, \vec{F}_{ud}\right] + \left[\vec{r}_B, \vec{F}_B\right]$$

onda će i otpori veza koje dejstvuju na telo u osloncima biti udarnog dejstva. Zato prethodne jednačine transformižemo u oblik preko impulsa trenutnih sila i otrora veza trenutnog dejstva, a zato napišimo prethodne vektorske jednačine u diferencijalnom obliku:

$$d\vec{p}(t) = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}}_1 dt = \vec{F}_{AN} dt + \vec{F}_{An} dt + \vec{F}_B dt + \vec{F}_{ud} dt$$

$$d\vec{L}_O = \dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right)\vec{n}\, dt + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \vec{\mathfrak{R}} dt = \left[\vec{r}_P, \vec{F}_{ud}\right] dt + \left[\vec{r}_B, \vec{F}_B\right] dt$$

Posle integraljenja prethodnih vektorskih jednačina u diferencijalnom obliku dobijamo:

$$\Delta\vec{p}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{AN} dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{An} dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_B dt + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{ud} dt$$

$$\Delta\vec{L}_O = \vec{L}_O(t) - \vec{L}_O(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right)\vec{n}\, dt + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{r}_P, \vec{F}_{ud}\right] dt + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{r}_B, \vec{F}_B\right] dt$$

ili

$$\Delta\vec{p}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt = \vec{K}_{F_{AN}} + \vec{K}_{F_{An}} + \vec{K}_{F_B} + \vec{K}_{F_{ud}}$$

$$\Delta\vec{L}_O = \vec{L}_O(t) - \vec{L}_O(t_0) = (\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right)\vec{n} + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt \approx \left[\vec{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right] + \left[\vec{r}_B, \vec{K}_{F_B}\right]$$

gde je $\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$ odnosno $\vec{\mathfrak{R}}_1 = \dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1 = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01}$

te je:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt = \int_{t_0}^{t} \left[\dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w}\right] dt$$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt = \int_{t_0}^{t} \left[\dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1\right] dt$$

Postavljamo pitanje koji je uslov da ne postoje kinetički udarni reaktivni impulsi u osloncima vratila oko koga rotira kruto telo pod dejstvom impulsnih sila. U tom sličaju ćemo prvo odrediti reaktivne udarne impulse na ležišta vratila: Zato pomnožimo skalarno, a zatim i vektorski ortom orjentacije ose $\vec{n}$ oko koje se impulsno okreće materijalno telo.

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \left(\vec{n}, \vec{\mathfrak{R}}_1\right) dt = \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_{AN}}\right) + \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_{An}}\right) + \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_B}\right) + \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_{ud}}\right)$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \left(\vec{n}, \vec{\mathfrak{R}}\right) dt \approx \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right) + \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_B, \vec{K}_{F_B}\right]\right)$$

odakle sledi da je:

$$\vec{K}_{F_{An}} = \vec{n}\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \left(\vec{n}, \vec{\mathfrak{R}}_1\right) dt - \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_{ud}}\right)\vec{n}$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Ako sada vektorski pomnožimo sa leve i desne strane prethodne jednačine ortom orjentacije ose $\vec{n}$ dobijamo:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}}_1,\vec{n}\right]\right]dt=\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{AN}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{BN}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{An}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right]\right]dt\approx\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_B,\vec{K}_{F_B}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Kako dvostruki vektorski proizvod jediničnim vektorom ortom orjentacije ose $\vec{n}$ ''propušta'' samo normalnu komponentu to možemo da napišemo:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\vec{K}_{F_{AN}}+\vec{K}_{F_{BN}}+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt\approx\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]+r_B\vec{K}_{F_B}$$

Odnosno rešavanjem prethodnog sistema vektorskih jednačina po nepoznatim mpulsima inpulsnih kinetičkih otpora veza $\vec{K}_{F_{AN}}$ i $\vec{K}_{F_B}$ koje se javljaju kao reakcija na dejstvo spoljašnje impulsne, trenutne sile na telo koje rotira oko nepokreetne ose, dobijamo:

$$\vec{K}_{F_{AN}}=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt-\vec{K}_{F_{BN}}-\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_B}=\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt-\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Sada možemo da napišemo izraze za reaktivne udarne impulse na ležišta vratila $\vec{K}_{F_{AN}}$ i $\vec{K}_{F_B}$:

$$\vec{K}_{F_{An}}=\vec{n}\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\vec{n},\vec{\mathfrak{R}}_1\right)dt-\left(\vec{n},\vec{K}_{F_{ud}}\right)\vec{n}$$

$$\vec{K}_{F_{AN}}=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt-\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]-\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt+\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_B}=\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt-\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]$$

kao i jednačinu impulsne dinamike tela oko ose rotacije:

$$\left(\omega-\omega_0\right)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)=\left(\vec{n},\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Iz izraza za reaktivne udarne impulse na ležišta vratila oko koga se pod dejstvom impulshog opterećenja u obliku trenutne sile, kratkotrajnog dejstva i konačnog impulsa okreće rotor, tako da se javlja kinetički devijacioni spreg impulsnih udarnih reakcija

$$\vec{K}_{F_{AN}DEV}=-\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt+\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_BDEV}=\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt-\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]=-\vec{K}_{F_{AN}DEV}$$

Centar udara. Centar udara C_u je ona tačka u kojoj treba da dejstvuje udarna trenutna impulsna sila, da bi reaktivne udarne impulsne reakcije veza u ležištima vratila bile jednake nuli. Neka je vector položaja centra udara sa vektorom položaja $\vec{r}_{C_u}=\xi_{C_u}\vec{u}+\eta_{C_u}\vec{w}+\zeta_{C_u}\vec{n}$, tada njegove coordinate možemo odrediti uiz sledećih usmova:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Na snovu ovih uslova dobijamo uslove koje moraju da zadovolje koordinate udarne impulsne trenutne sile, kao i koordinate centra udara u kojoj je napadna tačka udarnog impulsa - trenutne sile, da bi kinetički udarni impulse – trenutni otpori veza na ležišta rotora bili jednaki nuli. Ti uslovi su:

$$K_\xi = 0\,,\quad K_\eta \neq 0 \ \text{ i } \ K_\zeta = 0$$

za koordinate udarnog impulsa $\vec{K}_{F_{ud}}$ koji za izabran koordinatni sistem tako da središte masa materijalnog tela leži u rotirajućoj ravni $\eta = 0$, odnosno $A\xi\zeta$ ravni koja prolazi kroz osu oko koje se može obrtati telo, iom slučaju su koodinate centra udara odredjene sledećim izrazima:

$$\eta_{C_u} = 0\,,\quad \xi_{C_u} = \frac{J_{O\zeta}^{(\vec{n})}}{M\xi_C}\,,\quad \zeta_{C_u} = \frac{D_{On\xi}}{M\xi_C} = -\frac{J_{On\xi}}{M\xi_C}\,,$$

Dok su za taj slučaj relacije veza izmedju ugaobe brzine i ugaonog ubrzanja oblika:

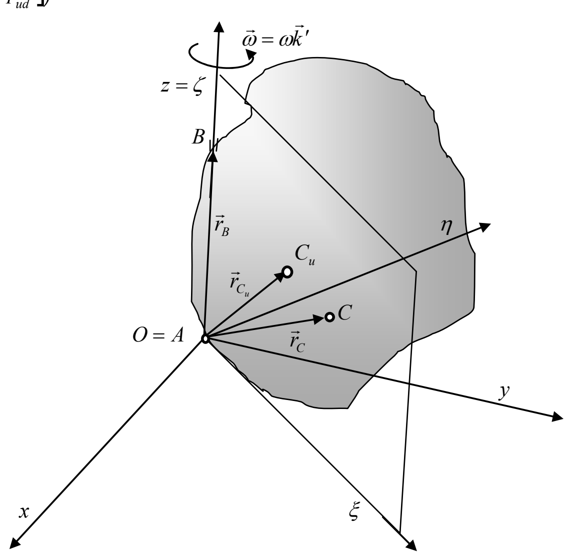
$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \omega^2 dt = \frac{K_\xi}{M\xi_C} = 0 \qquad , \qquad \int_{t_0}^{t_0+\tau} \dot{\omega} dt = \frac{K_\eta}{M\xi_C} = \omega - \omega_0 \neq 0$$

Sada treba dokazati prethodna tvrdjenja.
Polazimo od dobijenih uslova u obliku:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$



Zatim odredimo potrebne izraze i vektore i vektorske proizvode u obliku:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{n},\vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\eta_C + \xi_C\vec{j}'\right) = M\sqrt{\eta_C^{\ 2} + \xi_C^{\ 2}}\,\vec{u}_1$$

$$\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M[\vec{n},[\vec{n},\vec{r}_C]] = M\left\langle(\vec{n},\vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\eta_C & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\xi_C - \vec{j}'\eta_C\right) = M\sqrt{\eta_C^{\ 2} + \xi_C^{\ 2}}\,\vec{w}_1$$

Ako izaberemo ravan $\eta = 0$, odnosno $A\xi\zeta$ raven, koja prolazi kroz osu oko koje se može obrtati telo i u toj ravni neka je središte sistema (masa tela), te možemo dobiti odgovarajuća uprošćenja potrebnih vektorskih proizvoda u obliku:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{n},\vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & 0 & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(\xi_C\vec{j}'\right) = M\xi_C\vec{j}'$$

$$\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M[\vec{n},[\vec{n},\vec{r}_C]] = M\left\langle(\vec{n},\vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\xi_C\right)$$

$$\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = \vec{i}'D_{On\xi} + \vec{j}'D_{On\eta} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}$$

$$\left[\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n}, J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n},\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ D_{On\xi} & D_{On\eta} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}'D_{On\eta} + \vec{j}'D_{On\xi} = \sqrt{D_{On\xi}^{\ 2} + D_{On\eta}^{\ 2}}\,\vec{w}$$

$$\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \xi_{C_u} & \eta_{C_u} & \zeta_{C_u} \\ K_\xi & K_\eta & K_\zeta \end{vmatrix} = \vec{i}'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{j}'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right) + \vec{k}'\left(\xi_{C_u}K_\eta - \eta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{k}'\right] = \vec{j}'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{i}'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\vec{k}',\left[\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{k}'\right]\right] = -\vec{i}'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{j}'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{k}'\right] = \vec{j}'K_\xi - \vec{i}'K_\eta$$

$$\left[\vec{k}',\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{k}'\right]\right] = -\vec{i}'K_\xi - \vec{j}'K_\eta$$

Po odredjivanju prethodnih izraza, nije teško doći do traženih projekcija kinetičkih impulsa – trenutnih reakcija veza – kinetičkih impulsnih pritisaka na ležišta vratila rotora. Odredjene vektore i vektorske proizvode unesemo u uslove:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right] = 0 \qquad \vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right] = 0 \qquad \vec{\mathfrak{R}}_1 = \dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1 = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right) = \left(\vec{n},\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Iz ovih uslova ćemo odrediti koordinate centra udara. Transformacijom dobijamo da je

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w}\right)dt - \left[\vec{n},\left[\left[\bar{r}_{C_u},\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left(\vec{i}\,'D_{On\xi}+\vec{j}\,'D_{On\eta}\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt+\left(-\vec{i}\,'D_{On\eta}+\vec{j}\,'D_{On\xi}\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2dt+\vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\eta\right)+\vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\xi\right)=0 \quad \text{O}$$

a iz ovog uslova sledi da je

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1dt-\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]=0$$

Tako da dobijamo da je:

$$-\left(-\vec{i}\,'K_\xi-\vec{j}\,'K_\eta\right)+M\xi_C\vec{j}\,'\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt+M\left(-\vec{i}\,'\xi_C\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2dt=0$$

odakle odredjujemo da je prethodni uslov zadovoljen, ako je:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2dt=\frac{K_\xi}{M\xi_C}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt=\frac{K_\eta}{M\xi_C}=\omega-\omega_0$$

Sada prethodni rezultat unosimo u jednačinu – relaciju drugog uslova da kinetički impulsi udarnog opterećenja budu jednaki nuli:

$$\left(\vec{i}\,'D_{On\xi}+\vec{j}\,'D_{On\eta}\right)\frac{K_\eta}{M\xi_C}+\left(-\vec{i}\,'D_{On\eta}+\vec{j}\,'D_{On\xi}\right)\frac{K_\xi}{M\xi_C}+\vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\eta\right)+\vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\xi\right)=0$$

$$\left(D_{On\xi}\right)\frac{K_\eta}{M\xi_C}+\left(-D_{On\eta}\right)\frac{K_\xi}{M\xi_C}+\left(\eta_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\eta\right)=0$$

$$\left(\frac{D_{On\xi}}{M\xi_C}-\zeta_{C_u}\right)K_\eta+\left(\frac{-D_{On\eta}}{M\xi_C}\right)K_\xi+\left(K_\zeta\eta_{C_u}\right)=0$$

Oz ove relacije dobijamo da je

$$\zeta_{C_u}=\frac{D_{On\xi}}{M\xi_C}=-\frac{J_{On\xi}}{M\xi_C},\ \text{kao}\ K_\xi=0\ \text{ i }\ \eta_{C_u}=0$$

Iz jednačine obrtanja pod dejstvom udarnog impulsa pišemo

$$\left(\omega-\omega_0\right)J_{O\zeta}^{(\vec{n})}=\left(\xi_{C_u}K_\eta-\eta_{C_u}K_\xi\right)$$

a imajući u vidu da je:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt=\frac{K_\eta}{M\xi_C}=\omega-\omega_0$$

sledi

$$\frac{K_\eta}{M\xi_C}J_{O\zeta}^{(\vec{n})}=\left(\xi_{C_u}K_\eta-\eta_{C_u}K_\xi\right)$$

Odakle dobijamo

$$K_\xi=0,\quad K_\eta\neq 0$$

Što znači da udarni impuls mora da bude upravan na osu rotacije ζ i jedna od koordinata centra udara je:

$$\xi_{C_u}=\frac{J_{O\zeta}^{(\vec{n})}}{M\xi_C}$$

a time smo dokazali da su navedeni izrazi za kinetičke pritiske tačni.

Vrste sudara

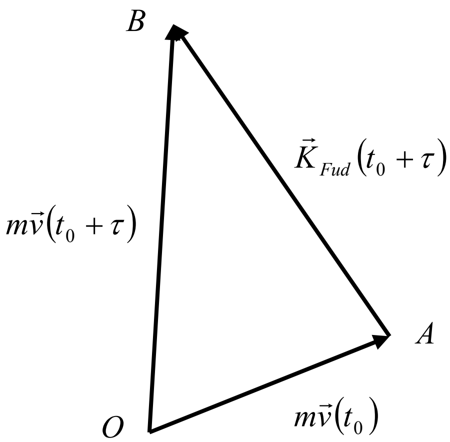
Sad možemo da rezimiramo. Dejstvo koje nekom telu daju trenutne sile $\vec{F}_{ud}$ konačnog impulsa $\vec{K}_{Fud}$ naziiva se udar. Vektor $\vec{K}_{Fud}$ udara je odredjen, u intervalu $(t_0, t_o + \tau)$udarnog kontakta, sledećim izrazom

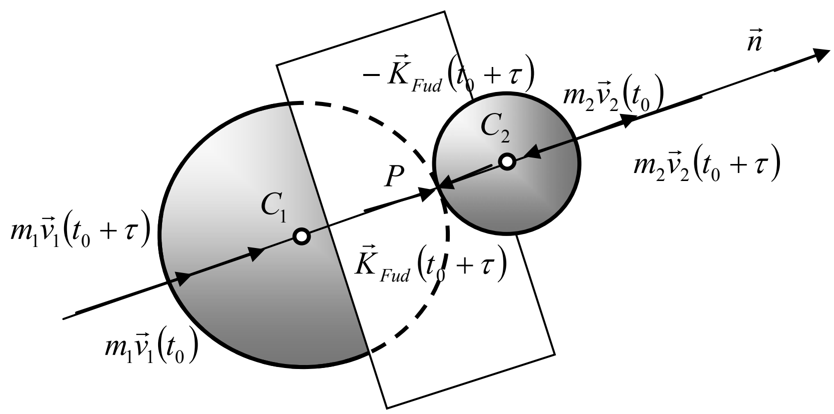
$$\vec{K}_{Fud}(t_0+\tau) = \vec{p}(t_0+\tau) - \vec{p}(t_0) = m\vec{v}(t_0+\tau) - m\vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_9+\tau} \vec{F}_{ud}\,dt$$

i naziva se ***impuls udara (udarni impuls)***. *Udarni impuls u teoriji idealnih udara i dinamici udara materijalnih sistema ima istu ulogu kao i sila u dinamici materijalnih sistema i tela.*

Modeli dinamike udara materijalnih sistema sadrže sledeće vektorske invarijante u odnosu na koordinatne sisteme u kojima se opisuju: brzinu $\vec{v}(t_0)$ neposredno pre udara u trenutku t_0, brzinu $\vec{v}(t_0+\tau)$neposredno posle udara u trenutku $t_0+\tau$ i udarni impuls $\vec{K}_{Fud}(t_0+\tau)$. Izmedju ovih vektorskih invarijanti postoji sledeća veza:

$$m\vec{v}(t_0+\tau) = m\vec{v}(t_0) + \vec{K}_{Fud}(t_0+\tau)$$





Udarni impuls koji dejstvuje na neko telo dolazi ***uvek od nekog drugog tela***, tako da se i dinamika udara svodi na dinamiku sudara, kada se ostvaruje u kratkom vremenskom intervalu $(t_0, t_0+\tau)$ neposredni kontakt dva materijalna sistema. I, u najjednostavnijem slučaju materijalnih sistema to je sudar dve materijalne tačke, ili dve materijalne kugle, kada govorimo o sudaru dva tela. U oba slučaja možemo reći da se radi o kontaktu dva sistema u jednoj tački, mada kada su u pitanju kugle ili bilo koja tela, udar se prenosi kroz celokupne mase obeju kugli, odnosno tela, u dudaru.

Posmatramo dva tela, masa m_1 i m_2 i neka su *neposredno pre sudara* u tenutku t_0 imala brzine $\vec{v}_1(t_0)$ i $\vec{v}_2(t_0)$, koje kao što smo se dogovorili nazivamo ***dolaznim brzinama***. U trenutku t_0 početka sudara ta dva tela će se dodirnuti u jednoj tački P u kojoj oba tela imaju zajedničku tangencijalnu ravan. Pretpostavljamo da sudar traje kratko u intervalu vremena $(t_0, t_0+\tau)$, koji traje τ i teži nuli, posle ćega se tela odvajaju i udaljavaju brzinama $\vec{v}_1(t_0+\tau)$ i $\vec{v}_2(t_0+\tau)$, koje nazivamo ***odlaznim brzinama***.

Zamislimo da smo u tački P dodira dva tela u stanju sudara povukli ***tangencijalnu ravan*** i na nju normalu. Ta tangencijalna ravan se naziva ***ravan dodira***, a pravac te normale $\vec{n}$ na dodirnu ravan, odredjuje ***pravac sudara***. Ako su središta masa tela u sudaru na toj niormali sudar se naziva ***centrični sudar***, a ako nisu ***sudar je ekscentrični***. Kada su dolazne brzine oba tela u sudaru kolinearne sa pravcem sudara, onda je to ***pravi (upravni) sudar***, u suprotnom to je ***kosi sudar***.

U trenutku sudara oba tela, koja se sudaraju se deformišu i ta deformaciija traje sve dok se projekcije brzina kretanja tela u sudaru na pravac sudara ne izjednače. Tada su i ***projekcije relativnih brzina kretanja središta masa tela*** u sudaru, jednog u odnosu na drugo, na pravac sudara postale ***jednake nuli***. Od tog trenutka, nultih projekcija relativnih brzina na pravac sudara, počinje uspostavljanje stanja tela kakvo je bilo pre sudara sve do trenutka kada se tela odvajaju jedno od drugog. Za to vreme počinje porast projekcija relativnih brzina kretanja tela u sudaru jednog u odnosu na drugo i nastavlja se sve dok tela ne dobiju u delu koji je bio u kontaktu prvobitni oblik. Tada je trenutak kada smatramo da su se tela praktično odvojila i da nastupa period vremena posle sudara. Prema tome period sudara τ se može podeliti u dva dela: τ' ***period kompresije*** i τ'' ***period restitucije***, pri čemu je $\tau = \tau' + \tau''$.

Da bi telo mase m_1 koje se kreće brzinom $\vec{v}_1(t_0)$ udarilo u telo mase m_2 koje se kreće brzinom $\vec{v}_2(t_0)$ pri centričnom kretanju, potrebno je da bude zadovoljen uslov $\vec{v}_1(t_0) > \vec{v}_2(t_0)$. Ako sudar nije centričan, potrebno je da budu zadovoljeni još i dopunski uslovi koji omogućavaju realizaciju dodira u sudaru.

Kako spoljašnje aktivne sile konačnih intenziteta imaju impulse sila jednake nuli u beskonačno malim intervalima vremena, smatrajući dva materijalna tela u sudaru jednim sistemom, to na dinamiku istog možemo primeniti teoremu o impulsu kretanja u obliku:

$$m_1\vec{v}_1(t_0) + m_2\vec{v}_2(t_0) = m_1\vec{v}_1(t_0+\tau) + m_2\vec{v}_2(t_0+\tau)$$

Kada su poznate dolazne brzine $\vec{v}_1(t_0)$ i $\vec{v}_2(t_0)$ i mase tela u sudaru, to prethodna relacija impulsa kretanja nije dovolja za odredjivanje dveju nepoznatih odlaznih brzina $\vec{v}_1(t_0+\tau)$ i $\vec{v}_2(t_0+\tau)$, posle sudara dva tela. Potrebna nam je još jedna jednačina koju ćemo postaviti iz samih svojstava tela u sudaru, Kao što smo već opisali process sudara i kontakta dva tela, u periodu kompresije čvrstih tela brzina prvog tela će se smanjivati za $\vec{v}_1(t_0) - \vec{c}$ a drugog povećavati za $\vec{c} - \vec{v}_2(t_0)$gde je $\vec{c}$ brzina oba tela na kraju kompresije. Kako su ***oba tela deformisana***, očigledno je da se, u periodu restitucije, deformacije tela neće odmah izgubiti i da će se brzina $\vec{v}_1(t_0)$ prvog tela smanjiti za još neku brzinu $k(\vec{v}_1(t_0) - \vec{c})$, a brzina $\vec{v}_2(t_0)$ drugog tela povećati za veličinu $k(\vec{c} - \vec{v}_2(t_0))$, gde je k neki koeficijent. Na osnovu ove analize možemo napisati da su odlazne brzine tela koja su bila u sudaru:

$$\vec{v}_1(t_0+\tau) = \vec{v}_1(t_0) - (1+k)(\vec{v}_1(t_0) - \vec{c}) = (1+k)\vec{c} - k\vec{v}_1(t_0)$$

$$\vec{v}_2(t_0+\tau) = \vec{v}_2(t_2) + (1+k)(\vec{c} - \vec{v}_2(t_0)) = (1+k)\vec{c} - k\vec{v}_2(t_0)$$

Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo:

$$\vec{v}_2(t_0+\tau) - \vec{v}_1(t_0+\tau) = k(\vec{v}_2(t_0) + \vec{v}_1(t_0))$$

Odnos relativnih brzina središta masa tela (težišta) posle i pre sudara je:

$$k = \frac{v_r(t_0+\tau)}{v_r(t_0)} = \frac{v_2(t_0+\tau) - v_1(t_0+\tau)}{v_1(t_0) - v_2(t_0)}$$

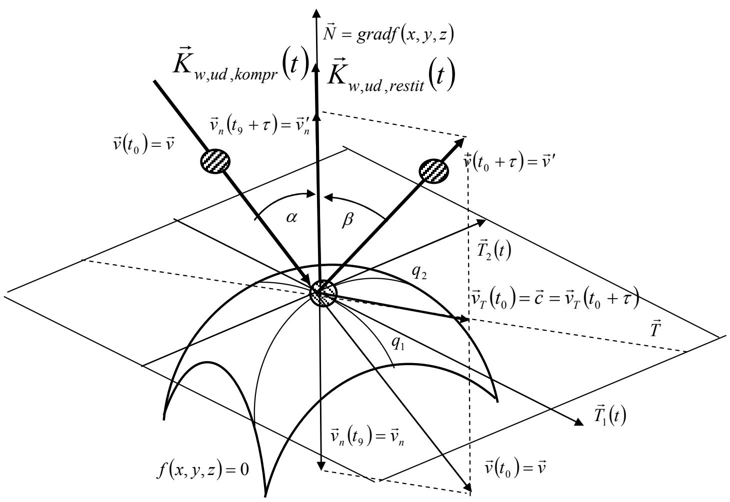
i ***naziva se koeficijent sudara***, ili ***koeficijent restitucije*** ili ***koeficijent uspostavljanja***. ***Isaak Newton*** je pokazao da ovaj koeficijent ne zavisi od oblika i dimenzija niti od brzina kretanja tela, već isključivo od elastičnih svojstava tela koja su u sudaru. Taj koeficijent sudara je neimenovan broj i odredjuje se eksperimentalno. Uvodjenjem koeficijenta restitucije ili uspostavljanja Newton je u klasičnu mehaniku krutih tela uveo deformabilna svojstva (osobine elastičnosti) tela. Time se ustvari u teoriji udara odstupa od klasičnog pristupa, klasičnoj mehanici ,jer se odstupa od pretpostavke da su objekti apsolutno kruta tela.

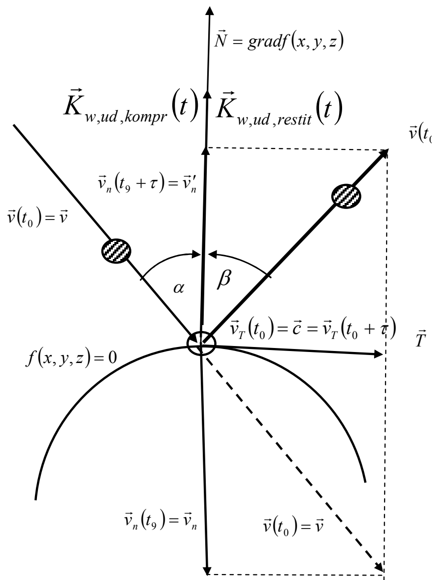
Royal Socoety – Kraljensko učeno društvo u Londonu je 1668. godine raspisalo konkurs za rešenje problema dinamike udara i za taj konkurs svoje radove su podneli, danas poznati naučnici Vilis (***Wallis***, 1616-1703, *Mechanica sive de mote*-1688) i Hajgens (***Huygens*** – *De motu corporum ex percusione*). Koristeći rezultate o sudaru koje su podneli Kraljevskom učenom društvu Vilis i Hajgens, i dajući svoja uopštenja, Isaak Newton je postavio fundamentalne osnove Teorije udara. I pre Newtona i Vilisa i Hajgensa, bilo je istraživanja dinamike udara. Tako naprimer, problemima sudara se bavio Galileo Galilei koji je došao do saznanja da je sila udara u odnosu na silu pritiska beskonačno velika, ali nije došao i do saznanja o vezi udarnih impulsa i količine kretanja.

Pri udaru kugle mase m u nepokretnu glatku površ jednačine $f(x,y,z)=0$, koristimo bektorsku relaciju principa dinamičke ravnoteže za slučaj udarne dinamike u primeni na materiijalni sistem na koji dejstvuju veze u obliku vektorske jednačine:

$$m\left(\vec{v}(t_0+\tau)-\vec{v}(t_0)\right)-\sum_{j=1}^{j=s}\left(\vec{K}_{F_{ud,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,j}(t_0+\tau)\right)=0$$

u kojoj su sadržane, za slučaj jedne materijalne tačke, m masa materijalne tačke, $\vec{v}(t_0)$ dolazna brzina, $\vec{v}(t_0+\tau)$ odlazna brzina, $\vec{K}_{F_{ud,j}}(t_0+\tau)$, $j=1,..,S$ *udarni inpulsi aktivnih trenutnih sila,* koje dejstvuju na materijalnu tačku, $\vec{K}_{w,ud,j}(t_0+\tau)$, $j=1,..,s\leq 3$ *udarni impulsi reaktivnih sila veze*, koji se javljaju kao reaktivno dejstvo veze na maretijalnu tačku, odnosno, kao otpori veza kojima je podvrgnuta materijalna tačka.





Kako dinamiku udara kugle mase m u nepokretnu glatku površ jednačine $f(x,y,z)=0$, možemo podeliti u dva perioda, saglasno prethodnoj analzi za slučaj sudara dve kugle, to prateći tu analizu promena brzina možemo da zaključimo sledeće:

U ovom slučaju su poznate dolazne brzine $\vec{v}_1(t_0)=\vec{v}(t_0)$ i $\vec{v}_2(t_0)$ i mase tela u sudaru, nepoznata je odlazna brzina $\vec{v}_1(t_0+\tau)=\vec{v}(t_0+\tau)$, dok je brzina nepokretne površi u koju udara materijalna tačka (kugla) jednaka nuli $\vec{v}_2(t_0+\tau)=0$, posle udara materijalne tačke u površ. Pretpostavimo da na materijalnu tačku ne dejstvuju trenutne sile udarnog dejstva , te su *udarni inpulsi aktivnih trenutnih sila jednaki nuli,* $\vec{K}_{F_{ud,j}}(t_0+\tau)=0$. Kako materijalna tačka udara o nepokretnu površ, to znači da na isti dejstvuje jedna skleronomna veza u toku udara o površ, te su *udarni impulsi reaktivnih sila veze*, koji se javljaju kao protivdejstvo na maretijalnu tačku, kao otpori veza kojima je podvrgnuta materijalna tačka i različiti su od nule $\vec{K}_{w,ud,j}(t_0+\tau)\neq 0$, $j=1,..,s\leq 3$ i nepoznati.

Kao što smo već opisali process sudara i kontakta dva tela, u periodu kompresije čvrstih tela brzina prvog tela će se smanjivati za $\vec{v}_1(t_0)-\vec{c}$, te je u posmatranom slučaju udara materijalne tačke u nepikretnu površ $\vec{v}(t_0)-\vec{c}$, a drugog povećavati za $\vec{c}-\vec{v}_2(t_0)=\vec{c}$, gde je $\vec{c}$ *brzina oba tela* (materijalne tačke i površi u zoni kontakta) na ***kraju kompresije***. Kako su oba tela deformisana, očigledno je da se, u periodu restitucije, deformacije tela neće odmah izgubiti i da će se brzina $\vec{v}_1(t_0)=\vec{v}(t_0)$ prvog tela smanjiti za još neku brzinu $k(\vec{v}(t_0)-\vec{c})$, a brzina $\vec{v}_2(t_0)=0$ drugog tela (površi u zoni udarnog kontakta) povećazi za veličinu $k(\vec{c}-\vec{v}_2(t_0))=k\vec{c}$ gde je k neki koeficijent.

Vektorsku relaciju principa dinamičke ravnoteže za slučaj *udarne dinamike* u primeni na materiijalnu tačku (kuglu) koja udara o nepokretnu površ možemo napisati *za period kompresije i period restitucije* u sledećem obliku:

$$m\left(\vec{c}(t)-\vec{v}(t_0)\right)-\vec{K}_{w,ud,kompr}(t)=0$$

$$m\left(\vec{v}(t_0+\tau)-\vec{c}(t)\right)-\vec{K}_{w,ud,restit}(t_0+\tau)=0$$

pri čemu se $t\in(t_0,t_0+\tau)$ nalazi unutar intervala trajanja kontakta pri udaru kugle o nepokretnu površ. U prethodnim vektorskim relacijama $\vec{c}(t)$ je brzina materijalne tačke u toku procesa udara i kontakta kugle sa nepokretnom površi. $\vec{K}_{w,ud,kompr}(t)$ i $\vec{K}_{w,ud,restit}(t_0+\tau)$ su *udarni impulsi reaktivnih sila veze*, koji se javljaju kao reaktivno dejstvo na maretijalnu tačku, *u periodu kompresije i periodu restitucije*, kada je materijalna tačka u kontaktu sa nepokretnom površi, kao otpori veza kojima je podvrgnuta materijalna tačka *u periodu kompresije i periodu restitucije* i različiti su od nule i nama nepoznati. Oba ova udarna impulsa padaju u pravac normale na površ veze.

Označimo sa α ugao koji pravac dolazne brzine $\vec{v}_1(t_0)=\vec{v}(t_0)$ materijalne tačke (kugle) čini sa pravcem normale $\vec{N}=gradf(x,y,z)$ na nepokretnu idelnu vezu – glatku površ jednačine $f(x,y,z)=0$, a sa β označimo ugao koji čini odlazna brzina $\vec{v}_1(t_0+\tau)=\vec{v}(t_0+\tau)$ materijalne tačke (kugle) sa pravcem te normale. Kako je brzina $\vec{c}(t)$ moguća brzina za datu vezu, površ u koju udara materijalna tačka (kugla) to ona mora da zadovolji uslov za brzinu:

$$\left(\vec{c}(t),gradf(x,y,z)\right)=0$$

A to znači da mora da leži u tangencijalnoj ravni površi za tačku u kojoj su u kontaktu materijalna tačka i površ.

Sada skalarnim množenjem prethodnih vektorskih jednačina ortovima normale i tangente na površ veze dobijamo sledeće jednačine:

$$m\left(\left(\vec{c}(t),\vec{N}_9\right)-\left(\vec{v}(t_0),\vec{N}_9\right)\right)-\left(\vec{K}_{w,ud,kompr}(t),\vec{N}_9\right)=0$$

$$m\left(\left(\vec{v}(t_0+\tau),\vec{N}_9\right)-\left(\vec{c}(t),\vec{N}_9\right)\right)-\left(\vec{K}_{w,ud,restit}(t_0+\tau),\vec{N}_9\right)=0$$

$$m\left(\left(\vec{c}(t),\vec{T}_0\right)-\left(\vec{v}(t_0),\vec{T}_0\right)\right)-\left(\vec{K}_{w,ud,kompr}(t),\vec{T}_0\right)=0$$

$$m\left(\left(\vec{v}(t_0+\tau),\vec{T}_0\right)-\left(\vec{c}(t),\vec{T}_0\right)\right)-\left(\vec{K}_{w,ud,restit}(t_0+\tau),\vec{T}\right)_0=0$$

Sredjivanjem prethodnih skalarnih proiyvoda dobijamo:

$$-mv(t_9)\cos\alpha-K_{w,ud,kompr}(t)=0$$

$$mv(t_0+\tau)\cos\beta-K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)=0$$

$$m\left(c(t)-v(t_0)\sin\alpha\right)=0$$

$$m\left(v(t_0+\tau)\sin\beta-c(t)\right)=0$$

Iz poslednjih dveju jednačina dobijamo sledeću relaciju izmedju dolazne i odlane brzine kretanja materijalne tačke (kugle) pre i posle udara u (o) nepokretnu površ:

$$c(t)=v(t_0)\sin\alpha=v(t_0+\tau)\sin\beta=c(t)$$

odakle sledi da je:

$$v(t_0+\tau)=v(t_0)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Sada, iz prvih dveju jednačina odredimo nepoznate intenzitete $K_{w,ud,kompr}(t)$ i $K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)$ *udarnih impulsa reaktivnih sila veze*, koji se javljaju kao reaktivno dejstvo na udar maretijalne tačke u površ, a u *periodu kompresije, odnosno periodu restitucije*, u obliku:

$$K_{w,ud,kompr}(t)=-mv(t_9)\cos\alpha$$

$$K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)=mv(t_0+\tau)\cos\beta$$

Deljenjem prethodnih dvaju izraza dobijamo:

$$k=\frac{K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)}{K_{w,ud,kompr}(t)}=-\frac{v(t_0+\tau)\cos\beta}{v(t_9)\cos\alpha}$$

te zatim unošenjem prethodno dobijenog odnosa izmedju dolazne i odlazne brzine kugle posle sudara računamo:

$$k=\frac{K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)}{K_{w,ud,kompr}(t)}=-\frac{v(t_0+\tau)\cos\beta}{v(t_9)\cos\alpha}=-\frac{v(t_0)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta}{v(t_9)\cos\alpha}=-\frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

te konačno dobijamo

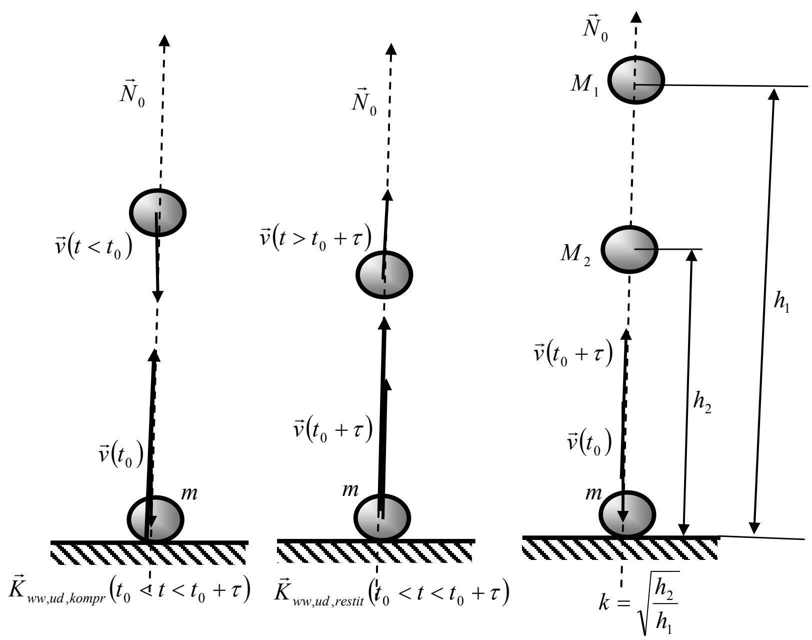
$$k=\frac{K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)}{K_{w,ud,kompr}(t)}=-\frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

Poslednji izraz predstavlja ***koeficijent restitucije*** koji je predstavljen odnosom intenziteta $K_{w,ud,restit}(t_0+\tau)$ i $K_{w,ud,kompr}(t)$, *udarnih impulsa reaktivnih sila veze*, koji se javljaju kao reaktivno dejstvo na udar maretijalne tačke u površ, a u *periodu restitucije i periodu kompresije.*

Do istog izraza možemo doći i na osnovu prvobitno formulisanog pojma koeficijenta restitucije u obliku odnosa relativnih brzina središta masa tela (težišta) posle i pre sudara, pa je u proučavanom slučaju, a s obzirom na spovedenu analizu dolazinih o odlaznih brzina:

$$k=\frac{v_r(t_0+\tau)}{v_r(t_0)}=\frac{-v(t_0+\tau)\cos\beta}{v(t_0)\cos\alpha}=-\frac{tg\alpha}{tg\beta}.$$

I, poslednji odnos, izraz za k se naziva ***koeficijent sudara***, ili ***koeficijent restitucije*** ili ***koeficijent uspostavljanja***.



Kada materijalna tačka mase m. od istog materijala kao što je i, podloga u koju udari, brzinom $v(t_0)=\sqrt{2gh_1}$, ako je puštena bez početne brzine sa visine h_1 u bezvazdušnom prostoru, i od nje se odbije ona dospe na neku visinu $h_2\le h_1$. Ako bi sada pustili tu istu materijalnu tačku sa visine $h_2\le h_1$ da padne ona bi u podlogu udarila brzinom $v(t_0+\tau)=\sqrt{2gh_2}\le v(t_0)=\sqrt{2gh_1}$, a to je i brzina kojom ona u prvom slučaju posle udara se penje naviše dospevajući na visinu $h_2\le h_1$. S obzirom da podloga miruje, te dve brzine: prva brzina $v(t_0)=\sqrt{2gh_1}$ udara u podlogu, i druga brzina $v(t_0+\tau)=\sqrt{2gh_2}$ napuštanja podloge su istovremeno i relativne brzine kretanja materijalne tačke prema nepokretnoj podlozi u dolasku i odlasku, pre i posle sudara. Zato kada znamo visine sa koje smo pustili da materijalna tačka pada i udara o nepokretnu podlogu, kao i visinu do koje je dospela posle udara, nije teško pomoću tih visina odrediti koeficijent sudara, ili koeficijent restitucije tog sudara, kao odnos relativnih brzina elemenata koji su u sudaru. Na osnovu toga pišemo:

$$k=\frac{v_r(t_0+\tau)}{v_r(t_0)}=\frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}=\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\le 1$$

Eksperimentima je pokazano, da kada su kugle i podloga od slonove kosti taj koeficijent restitucije ima vrednost $k = \frac{8}{9}$, za slučaj da je materijal drvo $k = \frac{1}{2}$, kada je materijal staklo $k = \frac{15}{18}$, a kada je čelik $k = \frac{5}{9}$.

Prema graničnoj vrednosti koeficijenta restitucije (sudara) razlikujemo dve vrste sudara:

1* ***Neelastičan (plastičan) sudar***, kada je koeficijent restitucije jednak nuli, $k = 0$, što znači da se brzine tela posle sudara izjednačavaju (Vilis (***Wallis***, 1616-1703, *Mechanica sive de mote*-1688));

2* ***Elastičan sudar*** , kada je koeficijent restitucije jednak jedinici, $k = 1$, pri čemu se relativne brzine tela, koja su se sudarula, izjednačavaju, u dolasku i odlasku (Hajgens (***Huygens*** – *De motu corporum ex percusione*)).

Ove dve vrste sudara su granične, jer se u realnim sistemima sudari realizuju sa koeficijentima restitucije $0 \le k \le 1$.

Iz izraza:

$$k = \frac{v_r(t_0 + \tau)}{v_r(t_0)} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

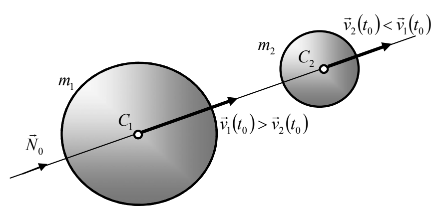
1* ***Neelastičan (plastičan) sudar***, kada je koeficijent restitucije jednak nuli, $k = 0$, i posmatrani slučaj kada je $\alpha = 0$ ili bilo koji drugi $\alpha \ne 0$, tada je $\beta = \frac{\pi}{2}$.

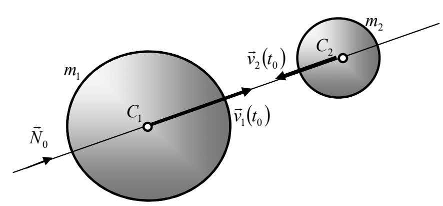
2* ***Elastičan sudar*** , kada je koeficijent restitucije jednak jedinici, $k = 1$, tada je $\alpha = \beta$.

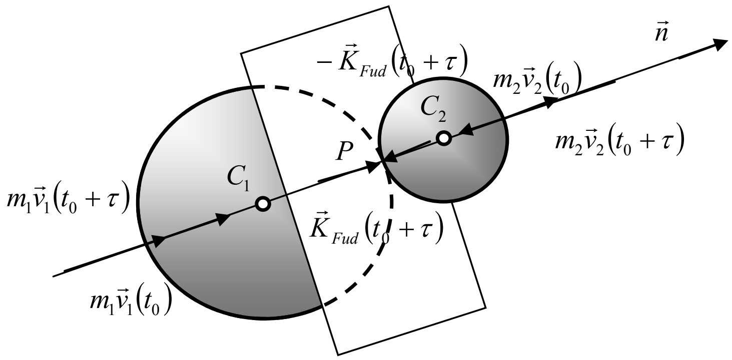
3* $0 < k < 1$ biće $tg\alpha < tg\beta$ odnosno $\alpha < \beta$.

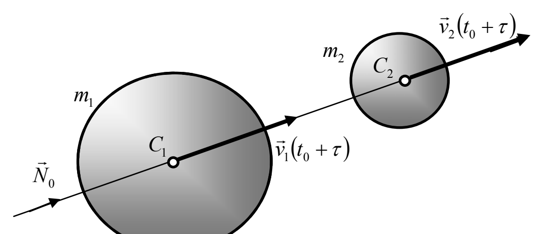
Upravni centralni sudar

Posmatramo dva tela, masa m_1 i m_2 i neka su *neposredno pre sudara* u tenutku t_0 imale brzine $\vec{v}_1(t_0)$ i $\vec{v}_2(t_0)$, koje kao što smo se dogovorili nazivamo ***dolaznim brzinama***. U trenutku t_0 početka sudara ta dva tela će se dodirnuti u jednoj tački P u kojoj oba tela imaju zajedničku tangencijalnu ravan – ravan dodira. Pretpostavljamo da sudar traje kratko u intervalu vremena $(t_0, t_0 + \tau)$, koji traje τ i teži nuli, posle ćega se tela odvajaju i udaljavaju brzinama $\vec{v}_1(t_0 + \tau)$ i $\vec{v}_2(t_0 + \tau)$, koje nazivamo ***odlaznim brzinama***.









Na osnovu teoreme o održamju impulsa kretanja (količine kretanja)

$$m_1\vec{v}_1(t_0) + m_2\vec{v}_2(t_0) = m_1\vec{v}_1(t_0 + \tau) + m_2\vec{v}_2(t_0 + \tau)$$

i koeficijenta sudara:

$$k = \frac{v_r(t_0+\tau)}{v_r(t_0)} = \frac{v_2(t_0+\tau) - v_1(t_0+\tau)}{v_1(t_0) - v_2(t_0)}$$

odredjujemo ***odlazne brzine tela*** (kugli) posle centralnog sudara u obliku sledećih izraza:

$$v_1(t_0+\tau) = \frac{(m_1 - km_2)v_1(t_0) + (1+k)m_2 v_2(t_0)}{m_1+m_2} = v_1(t_0) - \frac{1+k}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

$$v_2(t_0+\tau) = \frac{(m_2 - km_1)v_2(t_0) + (1+k)m_1 v_1(t_0)}{m_1+m_2} = v_2(t_0) + \frac{1+k}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

Impuls sudara u ovom slučaju je

$$K_{Fud} = m_1\left(v_1(t_0+\tau) - v_1(t_0)\right) = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1+k)\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

1* Za ***neelastičan (plastičan) sudar***, kada je koeficijent restitucije jednak nuli, $k=0$ izrazi za *odlazne brzine tela* (kugli) posle centralnog sudara biće u obliku sledećih izraza:

$$v_{1,plast}(t_0+\tau) = v_1(t_0) - \frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right) = \frac{m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0)}{m_1+m_2}$$

$$v_{2,plast}(t_0+\tau) = v_2(t_0) + \frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right) = \frac{m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0)}{m_1+m_2} = v_1(t_0+\tau)$$

Impuls sudara u ovom slučaju je

$$K_{Fud,plast} = m_1\left(v_1(t_0+\tau) - v_1(t_0)\right) = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

2* ***Za elastičan sudar*** , kada je koeficijent restitucije jednak jedinici, $k=1$, izrazi za *odlazne brzine tela* (kugli) posle centralnog sudara biće u obliku sledećih izraza:

$$v_{1,elst}(t_0+\tau) = \frac{(m_1 - km_2)v_1(t_0) + 2m_2 v_2(t_0)}{m_1+m_2} = v_1(t_0) - \frac{2}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

$$v_{2,elast}(t_0+\tau) = \frac{(m_2 - km_1)v_2(t_0) + 2m_1 v_1(t_0)}{m_1+m_2} = v_2(t_0) + \frac{2}{1+\frac{m_1}{m_2}}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

Impuls sudara u ovom slučaju je

$$K_{Fud,elast} = m_1\left(v_1(t_0+\tau) - v_1(t_0)\right) = -\frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)$$

Kada uporedjujemo *odlazne brzine* u slučajevuma neelastičnog i elastičnog centralnog sudara dve kugle možemo izvesti *sledeće zaključke*:

* U slučaju *potpuno plastičnog sudara odlazne brzine su su medjusobno jednake*;

* U slučaju *potpuno elastičnog sudara odlazna brzina brže dolaznog tela je smanjena, dok je odlazna brzina sporije dolaznog tela posle sudara povećana*. U ovom slučaju ako su dolazne brzine jednakog intenziteta, a suprotnosmerne, bez obzira na mase tela u sudaru, odlazne brzine će im biti jednake.

* U slučaju neelastičnog sudara, da bi se tela odmah zaustavila potrebno je da bude zadovoljen sledeći uslov: $m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0) = 0$ ili $m_1 v_1(t_0) = -m_2 v_2(t_0)$. Taj uslov traži da mase tela koja se sudaraju budu obrnuto proporcionalna njihovim dolaznim brzinama:

$$\frac{m_1}{m_2} == -\frac{v_2(t_0)}{v_1(t_0)}$$

Kinetičke energije materijalnih tačaka u dolasku, neposredno pre sudara se mogu odrediti pomoću sledećih izraza:

$$E_k(t_0) = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2(t_0) + m_2 v_2^2(t_0)\right)$$

dok je izraz za kinetičku energiju materijalnih tačaka *u odlasku* neposredno posle sudara:

$$E_k(t_0+\tau) = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2(t_0+\tau) + m_2 v_2^2(t_0+\tau)\right)$$

Kako pri sudaru dolazi do gubitka kinetičke energije, to je značajno odrediti taj gubitak kinetičke energije u toku sudara. Taj ***gubitak kinetičke energije u dinamici centralnog sudara dva tela***, poznatog koeficijenta restitucije u sudaru se izražava sledećim izrazom:

$$\Delta E_k = E_k(t_0+\tau) - E_k(t_0) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left(1-k^2\right)\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)^2$$

U opštem slučaju sudara, kada je koeficijent restitucije različit od jedinice, *ne važi teorema o održanju mehaničke energije sistema*, u ovom slučaju kinetičke energije, i u ovm slučaju prema opštoj teoremi o opštem održanju energije sistema, kinetička energija se pretvara u druge oblike energije.

1* Za ***neelastičan (plastičan) sudar***, kada je koeficijent restitucije jednak nuli, $k=0$ gubitak kinetičke energije u dinamici centralnog sudara dva tela, se izražava sledećim izrazom:

$$\Delta E_{k,plast} = E_k(t_0+\tau) - E_k(t_0) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left(v_1(t_0) - v_2(t_0)\right)^2$$

2* ***Za elastičan sudar*** , kada je koeficijent restitucije jednak jedinici, $k=1$, gubitak kinetičke energije u dinamici centralnog sudara dva tela je jednak nuli:

$$\Delta E_{k,elast} = E_k(t_0+\tau) - E_k(t_0) = 0$$

U ovom sličaju važi teorema o održanju mehaničke energije sistema u procesu udara i sudara. Ove jednačine o promeni kinetičke energije pri sudaru predstavljaju ***Karnoovu teoremu*** (***Lazare Carnot*** 1753-1824., *Principes fondamenteaux de l'équilibre et de movement* - 1803).

Navedimo sada prvu Karnoovu teoremu:

Pri sudaru sistema neelastičnih materijalnih tela gubitak kinetičke energije je jednak kinetičkoj energiji izgubljenih brzina.

Ovu teoremu možemo dokazati na sledeći način:

Pretpostavimo da posmatramo sistem neelastičnih tela, koji se saastoji od N materijalnih tačaka masa m_i, $i=1,2,3,..,N$, i neka su brzine tih materijalnih tačaka u dolasku, $\vec{v}_i(t_0)$, $i=1,2,3,..,N$ neposredno pre sudara, dok su njihove odlazne brzine $\vec{v}_i(t_0+\tau)$, $i=1,2,3,..,N$ neposredno posle sudara. Sada možemo dolazne brzine svake od tih materijalnih tačaka izraziti na sledeći način:

$$\vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_i(t_0+\tau) + \vec{v}_i(\tau). \quad i=1,2,3,..,N$$

gde smo sa $\vec{v}_i(\tau)$ označili *''izgubljene''* brzine. Kinetička energija sistema neposredno pre sudara je:

$$2E_k(t_0) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{v}_i(t_0)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{v}_i(t_0+\tau) + \vec{v}_i(\tau)\right]^2$$

$$2E_k(t_0) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau), \vec{v}_i(\tau)\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{v}_i(\tau)\right]^2$$

a kako je

$$2E_k(t_0+\tau)=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]^2$$

$$2E_{k,izg}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{v}_i(\tau)\right]^2$$

to možemo napisati:

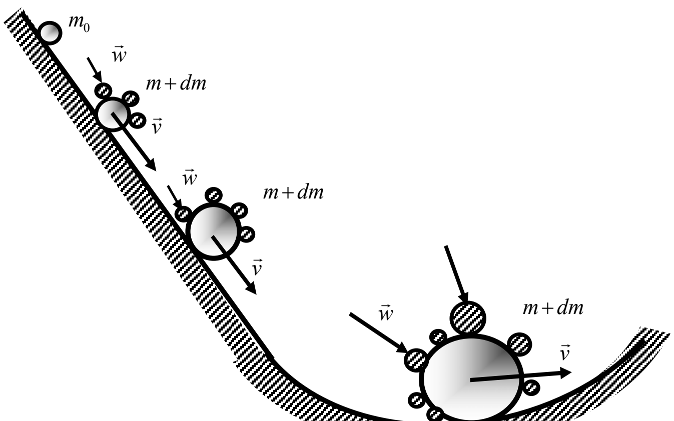
$$\Delta E_k=E_k(t_0)-E_k(t_0+\tau)=2E_{k,uzg}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{v}_i(\tau)\right]^2$$

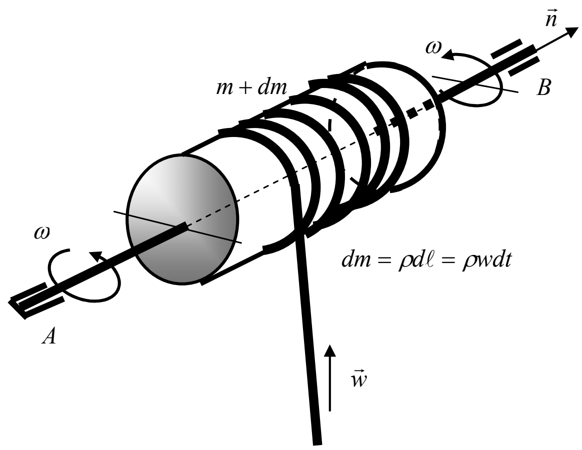
čime smo dokazali Karnoovu teoremu.

Kretanje tela promenljive mase

Uvod

Ako jednu grudvu snega pustimo da se kotrlja po snegom pokrivenoj nizbrdici, videćemo da se nova količina snega lepi po površi grudve. tako da se masa grudve povećava. Ta grudva koja se kreće po strmoj ravni predstavlja jedan materijalni sistem koji vrši ravansko kretanje i pri tome je masa tela promenljiva jer se uvećava. Za takav mehanički sistem kažemo da je sistem sa ***promenljivom masom***.





Kao primer tela promenljive mase može poslužiti raketa ili letilica sa reaktivnim motorima čija se masa menja u toku leta usled izbacivanja produkata sagorevanja i smanjenja mase goriva. Takodje. kao materijalno telo čija se masa menja može poslužiti santa leda čija se masa uvećava zamrzavanjem nove količine vode i se topi, kada se njena masa smanjuje.

Naprimer pri namotavanju debelog užeta na doboš masa i aksijalni moment inercije mase rela koje se obrće oko nepokretne ose se menjaju i pretstavljaju rotor promenljive mase.

Pretpostavićemo da se proces odvajanja ili pripajanja čestica pokretnom telu tokom vremena događa neprekidno, je to telo promenljive mase.

Znači da je osnovna pretpostavka mehanike tela promenljive mase da se *smanjenje ili povećanje mase tela dešava neprekidno*. Takodje, ako uvedemo pretpostavku da se dimenzije tela, promenljive mase, u poredjenju sa dužinom puta koji je ona prešla, pri kretanju, mogu zanemariti, onda se to telo promenljive mase može opisati modelom kretanja materijalne tačke promenljive mase. Medjutim i u slučajevima translatornih kretanja tela promenljive mase, takvo kretanje se može opisati modelom kretanja materijalne tačke promenljive mase. *Ovom pretpostavkom da su dimenzije tela male u odnosu na dužinu puta koji telo prelazi, uveli smo ustvari pretpostavku da se pomeranje centra inercije tela u samom telu, usled promene njegove mase (kontinualnim pripajanjem ili odvajanjem čestica), može zanemariti.* U našim daljim razmatranjima, u okviru ovog kursa, smatraćemo da je ova pretpostavka prisutna.

Pored primera koje smo naveli, u tehničkoj praksi se javljaju i mnogi drugi materijalni sistemi u kojima se masa materijalnog sistema menja sa vremenom ili sa brzinom ili pak sa položajem tog materijalnog sistema. U opštem slučaju možemo napisati $M = f_M\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$.

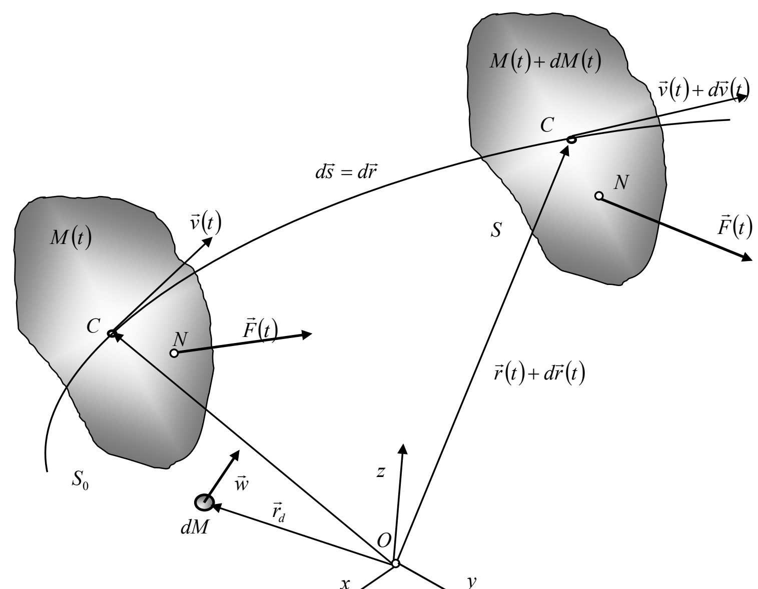
Vektorska jednačina dinamike materijalne tačke (i translatornog kretanja tela) promenljive mase

Prvo ćemo proučiti dinamiku materijalne tačke promenljive mase, kao reprezenta i translatornog kretanja tela promenljive mase i sastaviti vektorsku jednačinu dinamike.

Na slici je je prikazano telo mase $M(t)$ koje se kreće translatorno brzinom $\vec{v}(t)$. Ako pretpostavimo da mu je masa bila konstantna prema teoremi o količini kretanja (impulsu) pišemo sledeću vektorsku relaciju:

$$d\vec{p} = Md\vec{v} = \vec{F}dt = d\vec{K}_F .$$

Medjutim, kako je istom telu i njegovoj masi M, u vremenu dt, pripojena elementarna masa dM brzinom $\vec{w}$ (vidi sliku), to je količina mase tela u tom intervalu promenjena i povećala se na $M + dM$, te će se tako dobijeno telo kretati dalje novom, promenjenom brzinom $\vec{v} + d\vec{v}$.



Količine (impulsi) kretanja pre $\vec{p}(t)$ i posle $\vec{p}(t+dt)$ sjedinjavanja mase tela M i čestice elementarne mase dM su:

$$\vec{p}(t) = M(t)\vec{v}(t) + \vec{w}(t)dM(t)$$

$$\vec{p}(t+dt) = \{M(t) + dM(t)\}\{\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)\}$$

Te je priraštaj količine (impulsa) kretanja razlika izmedju prethodnih količina kretanja:

$$d\vec{p}(t) = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \{M(t) + dM(t)\}\{\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)\} - \{M(t)\vec{v}(t) + \vec{w}(t)dM(t)\}$$

što posle sredjivanja, čestice elementarne mase i tela, daje:

$$d\vec{p}(t) = M(t)d\vec{v}(t) + \{\vec{v}(t) - \vec{w}(t)\}dM(t)$$

pri čemu smo zanemarili član $dM(t)d\vec{v}(t)$ kao malu veličinu drugig reda u odnosu na druge članove, koji su veličine višeg reda u odnosu na ovaj. .

Imajući sada u vidu teoremu o promeni količine kretanja, koja tvrdi da je promena količine kretanja jednaka impulsu $d\vec{K}_F(t+dt)$ spoljašnjih sila $\vec{F}(t)$ koje dejstvuju na na telo u trenutku izmedju vremena t i $t+dt$, to možemo da napišemo sledeću vektorsku jednačinu u diferencijalnom obliku:

$$d\vec{p}(t) = M(t)d\vec{v}(t) + \{\vec{v}(t) - \vec{w}(t)\}dM(t) = d\vec{K}_F = \vec{F}(t)dt$$

Posle deljenja sa dt prethodne vektorske jednačine dobijamo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \{\vec{v}(t) - \vec{w}(t)\}\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d\vec{K}_F}{dt} = \vec{F}(t)$$

ili

$$M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \{\vec{v}(t) - \vec{w}(t)\}\frac{dM(t)}{dt} = \vec{F}(t)$$

ili

$$M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \{\vec{w}(t) - \vec{v}(t)\}\frac{dM(t)}{dt}$$

ili

$$M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{v}_{rel}(t)\frac{dM(t)}{dt}$$

u kojoj je

$$\vec{v}_{rel}(t) = \vec{w}(t) - \vec{v}(t)$$

relativna brzina kretanja čestice (dodatne mase) u odnosu na telo u trenutku sjedinjavanja sa njim. Poslednja vektorska jednačina je jednačina dinamike translatornog kretanja materijalnog tela promenljive mase. Ta jednačina se može napisati i u obliku:

$$M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{\mathfrak{F}}(t)$$

u koji smo uveli oznaku:

$$\vec{\mathfrak{F}}(t) = \vec{v}_{rel}(t)\frac{dM(t)}{dt}$$

za ***reaktivnu silu*** $\vec{\mathfrak{F}}(t)$ usled sjedinjavanja dodatne mase sa telom.

Vektorska jednačina dinamike translatornog kretanja materijalnog tela promenljive mase koju smo izveli, prestavlja jednačinu ***Meščerskog*** (***Иван Всеволодовыч Мещерскый*** 1859-1935. Poznati njegovi radovi su: *Dinamika tačke promenljive mase* 1897, *Jednačina kretanja materijalne tačke promenljive mase u opštem slučaju* - 1904) i ona je vektorska relacija kojom se matematički izražava teorema ***Meščerskog:***

Diferencijalna jednačina kretanja tela promenljive mase svodi se na jednačinu translatornog kretanja tela nepromenljive mase kada se aktivnoj sili koja dejstvuje na telo doda reaktivna sila.

Jednačina Meščerskog je osnov teorije dinamike raketa i raketne tehnike, dinamike kretanja vasionskih i medjuplanetarnih letilica, kao i dinamike objekata sa reaktivnim motorima.

Razmotrimo sada dva specijalna slučaja translatornog kretanja tela promenljive mase.

1* Neka je apsolutna brzina dodatne čestice mase dM, jednaka nuli: $\vec{w}(t) = 0$, pa je u tom slučaju relativna brzina dodatne čestice $\vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t)$, a jednačina ***Meščerskog*** se svodi na sledeću jednačinu:

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \{-\vec{v}(t)\}\frac{dM(t)}{dt}$$

odnosno

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

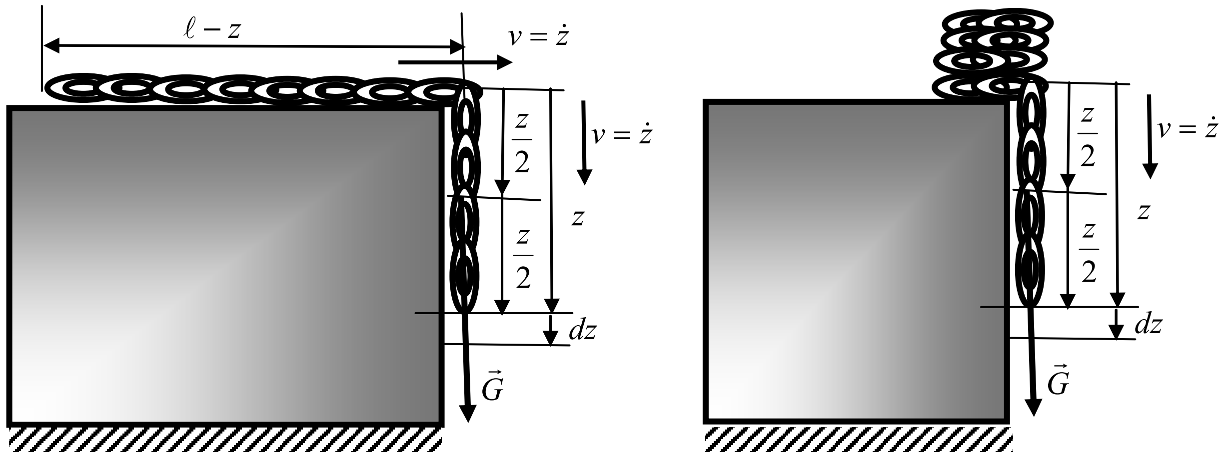
2* Neka je relativna brzina dodatne čestice mase dM, jednaka nuli: $\vec{v}_{rel}(t) = 0$, te je u tom slučaju apsolutna brzina dodatne čestice $\vec{w}(t) = \vec{v}(t)$, a jednačina ***Meščerskog*** se svodi na sledeću jednačinu:

$$\vec{v}_{rel}(t) = 0, \qquad \vec{w}(t) = \vec{v}(t), \qquad M(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t)$$

U slučaju da se čestica mase dM odvaja od tela onda treba u izrazima ispred dM staviti znak minus, odnosno da je $-dM$.

Primer translatornog kretanja sistema promenljive mase – Kelijev lanac (A. Kayley 1857. godine je prvi rešio jedan problem sa kretanjem tela promenljive mase.).

Neka se na horizontalnoj površi nalazi lanac specifične mase ρ_{lin} po jedinici dužine dimenzija ML^{-1} m jedinice $\left[kgm^{-1}\right]$, dok jedan deo, nepoznate dužine z visi od ivice horizontalne površi u vertikalnom pravcu. Ako si sve tačke lanca dobile početne brzine v_0 usmerene u pravcu srednje linije lanca, odrediti jednačinu kretanja lanca i njene integrale.



Primer 1* Ukupna masa lanca je: $M_0 = \rho_{lin}\ell$, deo mase lanca na horizontalnoj ravni je $M_{hor}(t) = \rho_{lin}(\ell - z)$, a dela koji visi u vertikalnom pravcu je $M_{vert}(t) = \rho_{lin}z(t)$, dok je težina tog dela lanca koji visi u vertikalnom pravcu: $G_{vert}(t) = M_{vert}(t)g = \rho_{lin}gz(t)$, i predstavlja aktivnu silu koja dejstvuje na lanac i pored početne brzine lanca uzrok je kretanju lanca, po horizontalnoj površi i u vertikalnom pravcu. S obzirom da se deo lanca u vertikalnom pravcu uvećava, tako da mu se dodaje priraštaj po dužini u vertikalnom pravcu , a pri tome brzina relativnog pripajanja novih delova lanca – novoh masa se odvija sa relativnom brzinom jednakom nuli, $\vec{w}(t) = 0$.

Sada koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica koje se pripajaju i odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t) = 0, \qquad \vec{v}_{rel} = -\vec{v}(t), \qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca je: $v = \dot{z}$. Sada možemo da napišemo dve jednačine dinamike delova lanca u horizontalnom pravcu čija se masa smanjuje, i dela koji visi u vertikalnom pravcu čija se masa uvećava:

$$\frac{d}{dt}\{M_{hor}(t)v(t)\} = S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{M_{vert}(t)v(t)\} = -S(t) + G_{vert(t)}$$

gde je $S(t)$ unutrašnja sila u lancu na prelazu lanca iz horitontalnog u vertikalni pravac. Zatim unosimo odredjene mase i aktivnu silu, koje smo odredili u prethodnoj analizi, te dobijamo:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_{lin}(\ell - z)\dot{z}\right] = S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_{lin}z(t)\dot{z}(t)\right] = -S(t) + \rho_{lin}gz(t)$$

Iz prethodnih jednačina naznačenim diferenciranjem dobijamo:

$$\rho_{lin}\left(\ell\ddot{z} - \dot{z}^2 - z\ddot{z}\right) = S(t)$$

$$\rho_{lin}\left(z\ddot{z}+\dot{z}^2\right)=-S(t)+\rho_{lin}gz$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobijamo sledeću:

$$\rho_{lin}\ell\ddot{z}=\rho_{lin}gz$$

ili

$$\ddot{z}-\frac{g}{\ell}z=0$$

koja je hiperbolička i ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2-\frac{g}{\ell}=0$$

čiji su koreni $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ i čije rešenje je;

$$z(t)=ACh\, t\sqrt{\frac{g}{\ell}}+BSh\ \ t\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

u kome su A i B integracione konstante koje se odredjuju iz početnih uslova. Kako nam je poznato da je u početnom trenutku brzina kretanja lanca bila v_0 to nije teško odrediti nepoznate konstante A i B u sledećem obliku:

$$A=0\,,\,B=v_o\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

te je zakon kretanja lanca

$$z(t)=v_0\sqrt{\frac{\ell}{g}}Sh\ \ t\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Primer 2* Ukupna masa lanca je: $M_0=\rho_{lin}\ell$, deo mase lanca na horizontalnoj ravni je $M_{hor}(t)=\rho_{lin}(\ell-z)$ i smatramo da je skupljen u jedan (s)kup, koji smatramo nepokretnim i da se od njega odvaja deo lanca koji se kreće u vertikalnom pravcu. Masa dela koji visi u vertikalnom pravcu je $M_{vert}(t)=\rho_{lin}z(t)$, dok je težina tog dela lanca koji visi u vertikalnom pravcu $G_{vert}(t)=M_{vert}(t)g=\rho_{lin}gz(t)$, i predstavlja aktivnu silu koja dejstvuje na lanac, i pored početne brzine lanca, uzrok je kretanju lanca, u vertikalnom pravcu. S obzirom da se deo lanca u vertikalnom pravcu uvećava, tako da mu se dodaje priraštaj po dužini u vertikalnom pravcu , a pri tome brzina relativnog pripajanja dodatnih masa se odvija sa relativnom brzinom jednakom nuli, $\vec{w}(t)=0$.

Sada koristimo jednačinu Mešćerskog za slučaj kada je relativna brzina čestica, koje se pripajaju i odvajaju jednaka nuli

$$\vec{w}(t)=0\,,\qquad \vec{v}_{rel}=-\vec{v}(t)\,,\qquad \frac{d}{dt}\{M(t)\vec{v}(t)\}=\vec{F}(t)$$

Brzina kretanja lanca u vertikalnom pravcu je: $v=\dot{z}$. Sada možemo da napišeno jednačinu dinamike dela lanca, koji visi u vertikalnom pravcu i u tom pravcu se kreće, pri čemu se njegova masa uvećava:

$$\frac{d}{dt}\{M_{vert}(t)v(t)\}=G_{vert(t)}$$

Iz prethodne jednačine naznačenim diferenciranjem dobijamo:

$$\left(z\ddot{z}+\dot{z}^2\right)=gz$$

Ta jednačina predstavlja Kelijevu jednačinu. Sada uvedimo smenu

$$u=\dot{z}^2$$

čijim diferenciranjem dobijamo:

$$2\dot{z}\ddot{z}=\dot{u}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=\dot{z}u'$$

i unošenjem u dobijenu Kelijevu jednačinu istu transformišemo na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika:

$$u' + \frac{2}{z}u = 2g\,,$$

koja je oblika

$$u' + P(z)u = Q(z)$$

Opšti integral ove Kelijeve jednačine je:

$$u = \dot{z}^2 = e^{-\int P dz}\left\{\int Q e^{\int P dz} dz + C\right\}$$

Dalje računanjem dobijamo

$$u = \dot{z}^2 = e^{-\int \frac{2}{z}dz}\left\{\int 2g e^{\int \frac{2}{z}dz} dz + C\right\} = e^{-2\ln z}\left\{2g\int e^{2\ln z} dz + C\right\} = e^{lm\, z^{-2}}\left\{2g\int e^{\ln z^2} dz + C\right\}$$

$$u = \dot{z}^2 = \frac{1}{z^2}\left\{2g\frac{z^3}{3} + C\right\}$$

Ako je dužina dela lanca u vertikalnom pravcu i u početnom trenutku bila jednaka z_0 i taj deo lanca dobio početnu brzinu v_0, onda nije teško odrediti nepoznatu integracionu konstantu:

$$v_0^2 = \frac{2}{3}gz_0 + \frac{C}{z_0^2}$$

dakle sledi da je:

$$C = v_0^2 z_0^2 - \frac{2}{3}gz_0^3$$

te je prvi integral diferencijalne jednačine dinamike Kelijevog lanca:

$$\dot{z}^2 = \frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2$$

ili

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2}$$

u obliku zavisnosti brzine od početne dužine lanca i dužine lanca u vertikalnom pravcu. U faznoj ravni $(z, \dot{z})$ to je jedna parabola drugog reda. Prethodna relacija je diferencijalna jednačina, koja razdvaja promenljive, te je možemo napisati u sledećem diferencijalnom obliku:

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{3}g(z - z_0) + v_0^2}} = \frac{d\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}}} = \sqrt{\frac{3}{2g}}\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)$$

Posle integraljenja prethodne diferencijalne forme za zadate početne dobijamo vezu izmedju dužine dela lanca u vertikalnom pravcu i vremena u sledećem obliku:

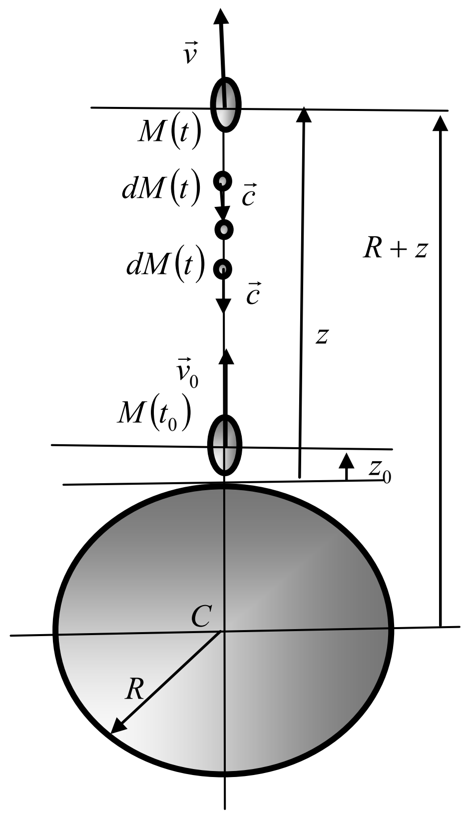
$$t - t_0 = 2\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{z_0}^{z} = 2\sqrt{\frac{3}{2g}}\left[\left(z - z_0 + \frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

ili konačno:

$$z = z_0 - \frac{3v_0^2}{2g} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{3}}(t - t_0) + \left(\frac{3v_0^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Vidimo da se radi o paraboličnoj zavisnosti izmedju dužine vertikalnog dela lanca i vremena dinamike sistema.

Vetikalni hitac rakete u bezvazdušnom prostoru.



Proučimo dinamiku rakete koja izvodi vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru. Neka je sa površi Zemlje izbačena vertikalno u vis početnom brzinom v_0 sa udaljenja od Zemlje z_0. S obzirom da u slučaju rakete imamo umanjenje početne mase rakete $M_0 = M(t_0)$, te je $\frac{dM}{dt} < 0$ prvi izvod mase rakete po vremenu negativan. Kako smo pretpostavili da se raketa kreće u bezvazdušnom prostoru (ili da je otpor vazduha zanemarljiv u odnosu na druge sile), to na raketu dejstvuje *gravitaciona sila* obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja od centra Zemlje

$$F_r = -\frac{MgR^2}{(R+z)^2}$$

i *reaktivna sila* usled smanjenja mase rakete izbacivanjem produkata sagorevanja goriva u vidu čestica elementarne mase dM, koje se odvajaju od rakete relativnom brzinom $v_{rel} = c$:

$$\mathfrak{F} = -c\frac{dM}{dt}$$

to jednačinu dinamike rakete promenljive mase, koja opada, možemo napisati u sledećem obliku:

$$M\ddot{z} = F_r + \mathfrak{F} = -\frac{MgR^2}{(R+z)^2} - c\frac{dM}{dt}$$

gde je R poluprečnik Zemlje. Prethodna jednačina se može napisati u sledećem obliku:

$$\ddot{z} + \frac{gR^2}{(R+z)^2} = -c\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}$$

Ako pretpostavimo da se raketa kreće konstantnim ubrzanjem, koje ćemo predstaviti kao umnožak ubrzanja Zemlje

$$\ddot{z} = kg\,,$$

te je

$$z(t) = \frac{1}{2}kgt^2 + v_0t + z_0$$

prethidna jednačina se transforniše na oblik:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = -\frac{g}{c}\left[k + \frac{R^2}{\left(R + z(t)\right)^2}\right]$$

ili

$$\frac{dM}{M} = -\frac{g}{c}\left[k + \frac{R^2}{\left(R + z(t)\right)^2}\right]dt$$

Integraljenjem prethodne jednačine dobijamo:

$$\ln\frac{M}{M_0} = -\frac{g}{c}\int_{t_0}^{t}\left[k + \frac{R^2}{\left(R + z(t)\right)^2}\right]dt$$

Ako pretpostavimo da je raketa izbačena bez početne brzine i sa nulte pozicije na Zemlji, kao i da se kreće samo pod dejstvom ubrzanja višestruko većeg od ubrzanja teže na povrpi Zemlje, onda je lako izračunati prethodni integral:

$$\ln\frac{M}{M_0} = -\frac{g}{c}\int_{t_0}^{t}\left[k + \frac{R^2}{\left(R + \frac{1}{2}kgt^2\right)^2}\right]dt = -\frac{kgt}{c}$$

$$\ln\frac{M}{M_0} = -\frac{kgt}{c} - \frac{gR^2}{c}\left\{\frac{t}{2R\left(R + \frac{1}{2}kgt^2\right)} + \frac{1}{2R^2}\sqrt{\frac{2R}{kg}}arctg\left(t\sqrt{\frac{kg}{2R}}\right)\right\}$$

Ova jednačina je korišćena za diskusiju o mogućnosti izbacivanja rakete na mesec (prema izvornoj referenci: ***Otto von Eberhard: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik***, Leipzig 1930.)

Jednačina Ciolkovskog (*Константин Эдуардович Циолковский* 1857-1935)

Jednačinu Mešćerskog Ciolkovski je primenio za izučavanje kretanja raketa, pretpostavivši pri tome da se dejstvo gravitacionih sila i sile privlačenja planeta mogu zanemariti.

Označimo sa M_{rak} masu skeleta jednostepene rakete, a sa m_{gor} početnu masu goriva, kojim je raketa ispunjena u trenutku lansiranja. Konstanstujemo da je ukupna početna masa rakete $M = M_{rak} + m_{gor}$. Po lansiranju rakete sagorevanjem goriva i izbacivanjem produkata sagorevanja iz rakete smanjuje se ukupna masa rakete sa gorivom. Brzina isticanja produkata sagorevanja je negativna $\left(-\vec{v}_{rel}\right)$ i imajući u obzir da smo već zaključili da se dejstvo gravitacioni sila i sila privlačenja planeta mogu zanemariti na osnovu jednačine Mešćerskog možemo pisati:

$$Mdv = -v_{rel}dM$$

ili

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M}$$

Integraljenjem prethodne jednačine za pretpostavljene početne uslove: da je u trenutku $t_0 = 0$ brzina rakete bila v_0 dobiježamo sledeće:

$$v - v_0 = -v_{rel}\ln\frac{M}{M_0}$$

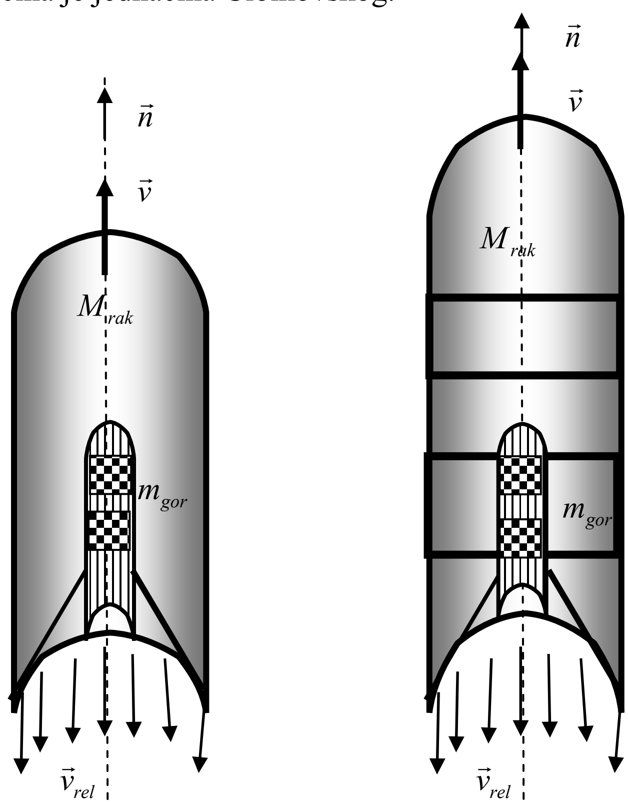
te se, uz zanemarivanje dejstva gravitacioni sila i sila privlačenja planeta, brzina kretanja rakete u bezvazdušnom prostoru može za jednostepenu raketu odrediti pomoću sledećeg obrasca:

$$v = v_0 + v_{rel} \ln \frac{M_0}{M} = v_0 + v_{rel} \ln \frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m} = v_0 + v_{rel} \ln C_1$$

gde je

$$C_1 = \frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m} = e^{\frac{v - v_0}{v_{rel}}}$$

broj Ciolkovskog. Ta jednačina je jednačina Ciolkovskog.



Broj Ciolkovskog predstavlja količnik mase rakete na početku i na kraju aktivnog perioda sagorevanja goriva u motorima rakete.

Iz jednačine Ciolkovskog se vidi da će rezultujuća brzina rakete zavisiti od njene početne brzine, v_0, relativne brzine isticanja produkata sagorevanja iz rakete v_{rel}, i od relativne zalihe goriva u raketi u odnosu na masu skeleta rekate $C_1 = \frac{M_{rak} + m_{gor}}{M_{rak} + m}$.

Brzina višestepene rakete.

Kada posmatramo dinamiku višestepene rakete, potrebno je da se uvede, za svaki stepen rakete, po jedan broj Ciolkovskog. Označimo sa C_s, $s = 1,2,3...,n$ broj Ciolkovskog za s-ti stepen, ako raketa ima n stepeni.

$$C_s = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}} = e^{\frac{(v_s - v_{s-1})}{v_{rel.s}}}, \quad s = 1,2,3...,n$$

Brzina višestepene rakete posle odbacivanja $(s-1)$ prvog stepena je:

$$v_s = v_{s-1} + v_{rel,s} \ln \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s.p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}} = v_{s-1} + v_{rel,s} \ln C_s \,,\; s = 1,2,3...,n$$

Takodje u analizi dinamike rakete uvodi se i k_s - ***koeficijent stepena rakete*** i definiše se kao količnik ukupne mase rakete na početku narednog perioda njenog kretanja i ukupne mase rakete na završetku tog perioda, a takodje i količnik broja Ciolkovskog i tog koeficijenta stepena rakete.

$$k_s = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}}{\left(M_{rak} + m\right)_{s,z}}$$

i

$$\frac{C_s}{k_s} = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}}$$

Kako rakete nose odredjenu aparaturu (veštački satelit) to ćemo njegovu masu obeležiti sa M_a, to moženo odrediti proizvod količnika $\frac{C_s}{k_s}$ na sledeći način:

$$\prod_{s=1}^{n} \frac{C_s}{k_s} = \prod_{s=1}^{n} \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}}{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s+1,p}} = \frac{\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_0}{M_a}$$

Na osnovu prethodnih jednačina moguće je odrediti potrebnu količinu goriva:

$$m_{gor} = \sum_{s=1}^{n} m_s = \sum_{s=1}^{n} \left[\left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p} - \left(M_{rak} + m\right)_{s,z}\right] = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s - 1}{C_s} \left(M_{rak} + m_{gor}\right)_{s,p}$$

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)

Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - Ensslin - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937

Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. Ј. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. Ј. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Ềléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:

- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.