DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VII.3. DEVETA NEDELJA
Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VIII. DESETA NEDELJA
Dinamika krutog tela

Osnovni pojmovi dinamike krutog tela: Momenti inercije mase tela. Definicije. Steiner-ova teorema. Elipsoid inercije. Translatorno kretanje tela. Količina kretanja tela. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija tela.

XI.1. JEDANAESTA NEDELJA
Obrtanje tela oko nekretne ose. Moment količine kretanja. Diferencijalna jednačina kretanja. Kinetička energija. Rad. Snaga.
Fizičko klatno. Kinetički pritisci.

XI.2. DVANAESTA NEDELJA
Ravansko kretanje tela. Količina kretanja. Moment količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija. Uslov kotrljanja bez klizanja.

Obrtanje tela oko nepkretne tačke. Kinetička energija. Moment količine kretanja. Euler-ove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. Regularna precesija.

XI.3 TRINAESTA NEDELJA
Sudar. Centralni upravni sudar. Centar udara. Charpy-jevo klatno.
Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog. Kelijev problem. Jednačina Ciolkovskog.

Ravno kretanje sistema materijalnih tačaka i ravno kretanje krutog tela

Posmatramo materijalni sistem koji sadrži N materijalnih tačaka masa $m_i, i = 1,2,3,....,N$, čiji je položaj u prostoru određen vektorom položaja $\vec{r}_i$ i neka je svaka od materijalnih tačaka podvrgnura dejstvu idealnih veza $f_{0i} = z_i = 0$, i $f_{\nu i}(x_i, y_i) = 0$, $i = 1,2,3,....,N$, $\nu = 1,..s_i \le 2$ i neka je brioj svih veza koje dejstvuju na sistem preko pojedinih njegovih materijalnih tačaka $s = \sum_{i-1}^{N} s_i \le 3N$, onda je broj stepeni slobode kretanja takvog sistema $n = 3N - s$. Isto tako zaključujemo da se sistem kreće u ravni $z = 0$. Ukupan broj koordinata kojima je odredjena konfiguracija (položaj) materijalnih tačaka sistema je $3N$. Na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaku od materijalnih tačaka možemo da napišemo:

$$\vec{I}_{Fi} + \sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik} = 0,\ i = 1,2,...,N \quad \text{- za slobodne materijalne tačke}$$

$$\vec{I}_{Fi} + \sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s_i \le 3} \vec{F}_{wN\nu i} = 0\ i = 1,2,...,N \quad \text{- za materijalne tačke podvrgnute vezama}$$

ili

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik},\ i = 1,2,...,N \quad \text{- za slobodne materijalne tačke}$$

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s_i \le 3} \lambda_{\nu i} grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i),\ i = 1,2,...,N$$ - za materijalne tačke podvrgnute vezama. $(\vec{v}_i, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)) = 0$.

Prethodni sistem vektorskih jednačina je sistem Lagrange-ovih jednačina prve vrste, kojim se opisuje kretanje sistema materijalnih tačaka u ravni. U njima su nepoznati vektori položaja materijalnih tačaka i Lagrange-ovi množioci veza $\lambda_{\nu i}$. Pri tome ne treba izgubiti iz vida da se sve materijalne tačke kreću u jednoj ravni i da ove vektorske jednačine sadrže vektore koji leže u ravni Oxy, jer smo pretpostavili da su sve materijalne tačke podvrgnute vezama $f_{0i} = z_i = 0$, $i = 1,2,3,....,N$.

Prethodne jednačine sabiranjem po indeksu i, kao i korišćenjem teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka daje:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} = \vec{F}_R$$, - za sistem slobodnih materijalnih tačaka.

odnosno - za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right) = \vec{F}_R + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)$$

$$\left(\vec{v}_i, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right) = 0$$

ili u skalarnom obliku:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}, \vec{i}\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik}, \vec{i}\right)\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}, \vec{i}\right) = \left(\vec{F}_R, \vec{i}\right),$$

$$M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}, \vec{j}\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik}, \vec{j}\right)\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}, \vec{j}\right) = \left(\vec{F}_R, \vec{j}\right)$$ - za sistem slobodnih materijalnih tačaka.

odnosno - za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza:

$$M\ddot{x}_C = \left(\vec{F}_R, \vec{i}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left(grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i), \vec{i}\right)$$

$$M\ddot{y}_C = \left(\vec{F}_R, \vec{j}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left(grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i), \vec{j}\right)$$

$$\left(\vec{v}_i, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right) = 0$$

Prethodne vektorske jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka pomnožimo vektorski sa leve strane sa odgovarajućim vektorom položaja $\vec{r}_i$ i-te materijalne tačke i sabiranjem po indeksu i i korišćenjem teorema o promeni momenta impulsa kretanja dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_i, \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}\right] + \sum_{k=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{uik}\right]\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}\right] = \vec{\mathfrak{M}}_O ,$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_i, \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}\right] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$ - za sistem slobodnih materijalnih tačaka, odnosno

- za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_i, \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}\right] + \sum_{k=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{uik}\right] + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}\right] + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i, grad\, f_{\nu i}(x_i, y_i)\right]\right) = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_i,\vec{a}_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]\right)=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

$\left(\vec{v}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right)=0$ za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza.

Kako za ravansko kretanje sistema materijalnih tačaka, isto možemo predstaviti pomoću prenosnog kretanja materijalne tačke kao da je celokupna masa sistema sažeta u centru masa i relativnim kretanjem, svake materijalne tačke rotacijom oko cenra masa C, to je ubrzanje svake mterijalne tačke iz sistema materijalnih tačaka odredjeno sledećim izrazom:

$$\vec{a}_i=\vec{a}_C+\vec{a}_i^{(C)}=\vec{a}_C+\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]-\omega_C^2\vec{\rho}_i$$

Unošenjem prethpodnog izraza u vektorsku jednačinu – relaciju teoreme o promeni momenta impulsa kretanja, to dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_C+\vec{\rho}_i,\vec{a}_C+\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]-\omega_C^2\vec{\rho}_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

ili dalje računamo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C+\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]-\omega_C^2\vec{\rho}_i\right]+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\vec{a}_C+\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]-\omega_C^2\vec{\rho}_i\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_C,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]-\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{r}_C,\omega_C^2\vec{\rho}_i\right]+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\vec{a}_C\right]+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]-\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\omega_C^2\vec{\rho}_i\right]=$$

$$=\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]=\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M+\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

odnosno

$$\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M+\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\vec{\rho}_i,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]=\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M+\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

odnosno, te dobijamo sledeću relaciju:

$$\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]-\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M=\vec{\mathfrak{M}}_O-\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M$$

Kako je

$$\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M=\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R\right]$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_O-\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M=\vec{\mathfrak{M}}_O-\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R\right]=\vec{\mathfrak{M}}_C$$

To jednačinu relativnog kretanja materijalnog sistema oko središta sistema C možemo napisati u sledećem obliku:

$$\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]-\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R\right]=\vec{\mathfrak{M}}_O-\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R\right]=\vec{\mathfrak{M}}_C$$

te smo time dobili vektorsku jednačinu dinamike materijalnog sistema – rotacije oko ose u pravcu normale na ravan u kojoj se ravanski kreću materijalne tačke:

$$\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\vec{\mathfrak{M}}_C$$

za sistem slobodnih materijalnih tačaka u ravni.

Za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza, vektorsku jednačinu – relaciju teoreme o promeni momenta impulsa kretanja pišemo u sledećem obliku:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\left[\vec{r}_C,\vec{a}_C\right]M+\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]\right)=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

i pridružujemo joj sistem uslova – ograničenja za brzine pojedinih materijalnih tačaka u obliku:

$$\left(\vec{v}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right)=0,\ i=1,2,....,N,\ \nu=1,2,..s\le 3$$

kao posledicu dejstva geometrijskih skleronomnih veza, a koje su dopunski uslovi za odredjivanje nepoznatih skalarnih Lagrange+ovih množilaca veza, koje dejstvuju na materijalne tačke sistema u ravni njihovog kretanja. Daljom transformacijom prethodne vektorske jednačone, uzimajući u račun da se radi o kretanju materijalnog sistema u ravni dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]+\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i,grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]\right)=\vec{\mathfrak{M}}_O$$

odnosno,

$$\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\vec{\mathfrak{M}}_O-\left[\vec{r}_C,\vec{F}_R\right]-\left[\vec{r}_C,\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]=\vec{\mathfrak{M}}_C=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{r}_i-\vec{r}_C,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{r}_i-\vec{r}_C,grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]\right)$$

Dalje, kao rezultat transformacije dobijamo vektorsku jednačinu dinamike relativnog kretanja sistema materijalnih tačaka oko ose kroz središte sistema (centar masa, centar inercije) upravnu na ravni u kojoj se kreću materijalne tačke sistema:

$$\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}=\vec{\mathfrak{M}}_C=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{\rho}_i-\vec{r}_C,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{\rho}_i,grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right]\right)$$

i iz te jednačine relativne rotacije materijalnog sistema oko njegovog centra masa, možemo dobiti sledeću skalarnu jednačinu :

$$\dot{\omega}_C J_{Cz}^{(\vec{k})}=\mathfrak{M}_{Cz}$$

Sada možemo napisati sistem od tri diferencijalne jednačine, u skalarnom obliku za kretanje sistema slobodnih materijalnih tačaka u ravni:

$$M\ddot{x}_C=\left(\vec{F}_R,\vec{i}\right)=X_R\ ,$$
$$M\ddot{y}_C=\left(\vec{F}_R,\vec{j}\right)=Y_R$$
$$\dot{\omega}_C J_{Cz}^{(\vec{k})}=\mathfrak{M}_{Cz}$$

- za sistem slobodnih materijalnih tačaka.

Sada možemo napisati i sistem od tri diferencijalne jednačine u skalarnom obliku za kretanje sistema materijalnih tačaka na koje dejstvuju i veze u ravni u kojoj se kreću, a to su:

$$M\ddot{x}_C=\left(\vec{F}_R,\vec{i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left(grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i),\vec{i}\right)$$
$$M\ddot{y}_C=\left(\vec{F}_R,\vec{j}\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left(grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i),\vec{j}\right)$$
$$\dot{\omega}_C J_{Cz}^{(\vec{k})}=\mathfrak{M}_{Cz}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\left[\vec{\rho}_i-\vec{r}_C,\vec{F}_{si}\right]+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\left[\vec{\rho}_i,grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right],\vec{k}\right)$$

i pridružujemo im sistem uslova – ograničenja za brzine pojedinih materijalnih tačaka u obliku:

$$\left(\vec{v}_i,grad\ f_{\nu i}(x_i,y_i)\right)=0\ ,\ i=1,2,....,N\ ,\ \nu=1,2,..s\le 3$$

kao posledicu dejstva geometrijskih skleronomnih veza, a koje su dopunski uslovi za odredjivanje nepoznatih skalarnih Lagrange+ovih množilaca veza, koje dejstvuju na materijalne tačke sistema u ravni njihovog kretanja. U prethodnom sistemu jednačina je

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{\rho}_i,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]=\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}$$

gde je $\vec{J}_C^{(\vec{k})}$ aksijalni moment inercije masa sistema materijalnih tačaka u odnosu na centralnu osu upravnu na ravan u kojoj se kreću sve materijalne tačke sistema čiju dinamiku izučavamo.

Ove iste jednačine važe i za ravansko kretanje krutog materijalnog tela, za koje možemo uzeti kao reprezentativnu ravan – ravan kroz centar masa – centar inercije paralelnu vektorima brzina njegovih tačaka. Jedino se pri odredjivanju aksijalnog momenta inercije mase tela za osu kroz centar masa C tela, umesto sume, uzima integral po zapremini tela, jer je to suma beskonačnog broja materijalnih tačaka elementarnih masa dm

Za sistem materijalnih tačaka $\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\vec{\rho}_i,\left[\dot{\vec{\omega}}_C,\vec{\rho}_i\right]\right]=\dot{\omega}_C\vec{J}_C^{(\vec{k})}$ to je za telo

$$\iiint\limits_V \left[\vec{\rho}, \left[\dot{\vec{\omega}}_C, \vec{\rho}\right]\right] dm = \dot{\omega}_C \vec{J}_C^{(\vec{k})},$$

pri čemu je:

$$\vec{J}_C^{(\vec{k})} = \iiint\limits_V \left[\vec{\rho}, \left[\vec{k}, \vec{\rho}\right]\right] dm$$

aksijalni moment inercije masa tela u odnosu na centralnu osu upravnu na ravan kojoj su paralelne sve brzine kretanja tačaka tela, koje vrši ravansko kretanje, a kroz središte tela.

Osnovi teorije dinamike sudara dva materijalna sistema

Uvod

Kada se putanje dveju materijalnih tačaka susreću u nekoj tački i ako u tu zajedničku tačku njihovih putanja dospevaju ***istovremeno različitim brzinama*** i ubrzanjima tada se ostvaruje ***dinamika sudara*** tih dveju materijalnih tačaka. Uzajamno dinamičko dejstvo jedne materijalne tačke na drugu materijalnu tačku se naziva ***sudar***, a njihova dinamika u tom kratkom vremenskom intervalu ***dinamika sudara***.

Ako jedna materijalna tačka ***miruje,*** a druga se pri tome ***kreće*** i u kretanju susreće sa njom dešava se ***udar*** jedne, pokretne, materijalne tačke u drugu, nepokretnu materijalnu tačku. Kako je mirovanje specijalan slučaj dinamike materijalne tačke, onda možemo reći da je pojam ***sudara*** opštiji od pojma ***udara.***

Udar i sudar se mogu pojaviti izmedju jedne materijalne tačke i sistema materijalnih tačaka, sudarom sa jednom od materijalnih tačaka diskretnog sistema materijalnih tačaka, koji se unutrašnjim udarnim silama prenosi trenutno i na ostale materijalne tačke sistema ili tela.. Isto tako sudar materijalne tačke može se ostvariti sudarom sa materijalnim krutim ili deformabilnim telom. Takodje, sudar je moguć u raznim kombinacijama izmedju materijalni tačaka, sistema materijalnih tačaka i krutih i ili deformabilnih tela. Prema svojstvima i karakteru materijalnih sistema – učesnika u dogadjanju sudara možemo sudare podeliti u više različitih vrsta ili grupa. O tome će posebno biti reči.

Pojava sudara je veoma česta u prirodi, kao i u tehničkim sistemima, te je zato veoma značajno poznavati *fenomen i svojstvene elemente sudara, drugim rečima dinamiku sudara i njene vektorske i skalarne invarijante.* Udar se javlja u mnogim tehnološkim operacijama obrade materijala (naprimer, kovanja, prosecanja, probijanja, i slično), gde je udar deo programiranog tehnološkog procesa, ali se javlja i kao štetna pojava u mašinskim sklopovima (naprimer, pri promeni stepena prenosa u zupčastim prenosnicima menjača brzina) kada trenutne sile koje se javljaju mogu izazvati pojavu dinamičkih i udarnih napona velikog intenziteta, iako kratkovremenog trajanja, što često izaziva oštećenja i vodi lomu delova sistema u sudaru.

Karakteristično za sudar je to da dolazi do *kontakta dva sistema makar u jednoj zajedničkoj tački u koju dospevaju istovremeno po jedna materijalna tačka jednog i drugog sistema* (***kontaktna tačka sudara elementarnih masa oba sistema***) u kojoj dolazi do ***interakcije njihovih dinamika***, i time se ostvaruje trenutno, kratkovremenog trajanja dinamičko dejstvo jednog materijalnog sistema na drugi u kontaktu trenutnog (vrlo kratjkog intervala) vremena pri čemu se javlja ***pojava skokovite (diskontinualne)*** promene ***kinetičkih parametara dinamike oba sistema***. To se pre svega ispoljava u promeni ***pravca i intenziteta brzine kretanja oba materijalna sistema,*** koji su se sudarili u odnosu na intenzitete i pravce i smerove njihovih brzina pre njihovog sudara. U pojavi (dešavanju) sudara dva materiojalna sistema javljaju se ***trenutne sile velikog intenziteta*** i ***kratkotrajnog dejstva*** u kratkom vremenskom intervalu τ u kome su materijalni sistemi u kontaktu tokom dinamike sudara, a koje iščezavaju po odvajanju sistema neposredno posle sudara. Sile koje nastaju pri sudarau dva sistema i u stanju kontakta ta dva sistema nazivaju se i ***udarne sile velikog intenziteta, kratkotrajnog dejstva i konačnog impulsa.***

Pri proučavanju sudara čine se neke osnovne pretpostavke, koje omogućavaju sastavljanje modela dinamike sudara dva sistema, a pri tome se zadatak uprošćava, ali se dobijaju zadovoljavajući modeli realne dinamike sudara dva sistema.

Teorija sudara (i u specijalnom slučaju udara) se zasniva na sledećim pretpostavkama:

1* Vreme τ trajanja kontakta dva tela u sudaru je veoma kratko;

2* Udarne sile $\vec{F}^{ud}$ su promenljive i velikog intenziteta, reda veličine $\dfrac{1}{\tau}$, i kratkotrajnog dejstva u toku vremena τ trajanja kontakta dva tela u sudaru i u toku sudara imaju napadne tačke u tačkama kontakta dva tela u sudaru;

3* Promena momenta impulsa (količine) kretanja materijalnih sistema u toku sudara je konačna.

4* Impuls ''običnih sila'' u poredjenju sa impulsom udarnih, trenutnih sila sudara je mnogo mnogo manji te se može zanemariti.

Udarne sile. Trenutni impuls.

Kada smo izučavali dinamiku materijalne tačke definisali smo diferencijal *impulsa (količine) kretanja* $d\vec{p}(t)$ materijalne tačke u obliku:

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}(t)dt = d\vec{K}_F(t)$$

gde smo sa $\vec{K}(t)$ označili *impuls sile*. Ako prethodnu diferencijalnu relaciju integralimo, za *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$, dobijamo sledeći izraz:

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \int_0^t \vec{F}(t)dt = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(0) = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

Priraštaj količine kretanja (impulsa kretanja) $\Delta\vec{p}(t)$ *za konačni vremenski razmak* Δt *jednak je impulsu* $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku, duž njene putanje, u tom vremenu.*

Dimenzije količine kretanja (impulsa kretanja) $\vec{p}(t)$ *i impulsa* $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku, dužnjene putanje kretanje, u tom vremenu su iste.* Dimenzija intenziteta impulsa $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$*, koja dejstvuje na materijalnu tačku* je:

$$\dim\left|\vec{K}_F(t)\right| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedninica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedninica $[\sec]$. Znaći da je jedinica impulsa sile $\left[kg\, m \sec^{-1}\right]$ ili $[N \sec]$.

Pošto je impuls sile $\vec{K}_F(t)$ *vektorski integral, to se on u opštem slučaju ne poklapa sa pravcem sile* $\vec{F}(t)$.

Srednju vrednost trenutne sile možemo odrediti iz prethpodne relacije kao:

$$\vec{F}_{sr} = \frac{\vec{K}_F}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} \vec{F}_{ud}dt$$

U slučaju da je sila konstantna $\vec{F}(t) = \overrightarrow{const}$ *impuls sile* $\vec{K}_F(t)$ *iako vektorski integral, je kolinearan sa silom.*

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{F}(t - t_0) = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

Znači da je impuls $\vec{K}_F(t)$ *sile* $\vec{F}(t)$, *koja dejstvuje na materijalnu tačku, duž njene putanje kretanja, u konačnom vremenskom intervalu* $\Delta t = t - t_9 = \tau$*, jednak priraštaju količine kretanja (impulsa kretanja)* $\Delta\vec{p}(t)$ *za taj konačni vremenski razmak.*

Kada je sila $\vec{F}(t)$ konačna, impuls $\vec{K}_F(t)$ te sile u malom vremenskom razmaku, kada $\Delta t = t - t_9 = \tau \to 0$, jednak je nuli. Ako je promena brzine $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0$ konačne veličine i javila se za vrlo kratko vreme $\Delta t = t - t_9 = \tau \to 0$, onda mora i impuls $\vec{K}_F(t)$ sile $\vec{F}(t)$ biti konačan, ali zato ta sila $\vec{F}(t)$ mora biti beskonačno velika. Ovakve sile $\vec{F}_{ud}(t)$ koje se javljaju kratkovremeno i daju konačan impuls $\vec{K}_F(t)$ nazivamo ***trenutne sile konačnog impulsa***.

Iz teoreme o promeni kinetičke energije dinamike slobodne materijakne tačke - iz *relacije teoreme o promeni kinetičke energije i njene veze sa snagom sile, koja vrši rad duž putanje kretanja materijalne tačke važi matematička relacija:*

$$\frac{dE_k}{dt} = P = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

možemo da napišemo:

$$dE_k = Pdt = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)dt$$

Po približnom integraljenju poslednje relacije dobijamo:

$$E_k - E_{k0} = \int_{t_0}^{t}\left(\vec{F}, \vec{v}dt\right) = \int_{t_0}^{t}\left(\vec{F}, \vec{v}\right)dt = \int_{t_0}^{t}\left(\vec{v}(t), d\vec{K}_F(t)\right) \approx \frac{1}{2}\left(\vec{v} + \vec{v}_0, \vec{K}_F\right)$$

pri čemo smo pretpostavili da aproksimativnu vrednost integrala možemo odrediti uz pretpostavku o srednjoj vrednosti brzine $\vec{v}_m = \frac{1}{2}\left(\vec{v} + \vec{v}_0\right)$ u toku procesa sudara u kratkom vremenskom intervalu.

Na osnovu prethopdne približne relacije možemo zaključiti da za beskrajno mali vremenski razmak (interval) priraštaj ''žive sile'' (kinetičke energije) materiijalne tačke u dinamici sudara, kao i rad trenutnih sila imaju konačne veličine.

Pomeranje materijalne tačke u toku malog priraštaja vremena $\Delta t = t - t_9 = \tau \to 0$ beskonačno je malo i teži nuli. Kako je $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ to je:

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = m\dot{\vec{r}} - m\vec{v}_0$$

odnosno

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{K}_F(t) + m\vec{v}_0$$

što posle integraljenja daje:

$$m(\vec{r} - \vec{r}_0) = \int_{t_0}^{t}\vec{K}_{Fud}(t)dt + m\vec{v}_0(t - t_0)$$

ili

$$m(\vec{r} - \vec{r}_0) \approx \frac{1}{2}\vec{K}_{Fm}(t - t_0) + m\vec{v}_0(t - t_0) \qquad \text{(A)}$$

gde je $\vec{K}_{Fm}$ srednja vrednost impulsa trenutne sile u kratkom vremenskom intervalu $\Delta t = t - t_9 = \tau \to 0$.

Kako $t \to t_0$ *biće i* $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \approx 0$, *na osnovu čega možemo zaključiti da je materijalna tačka za kratkotrajnog dejstva trenutne sile u dinamici sudara nepokretna. vreme*

Kada na materijalnu tačku dejstvuju, pored *trenutnih sila* $\vec{F}_{ud}$ *konačnog impulsa i kratkovremenog dejstva y intervalu* $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, i sile konačnog intenziteta $\vec{F}_k, k = 1,2,3,...,P$ tada je ukupan impuls svih sila jednak:

$$\vec{K}_F(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud}dt + \sum_{k=1}^{P}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_k dt = \int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud}dt$$

jer impuls sila konačnog intenziteta $\vec{F}_k, k = 1,2,3,...,P$ u kratkotrajnom vremenskom intervalu, teži nuli, ako taj interval teži nuli. Taj impuls sila $\vec{F}_k, k = 1,2,3,...,P$ konačnog intenziteta je jednak nuli za beskonačno mali vremenski onterval, te isti u proučavanju sudara dva sistema možemo zanemariti.

Sada možemo definisati i pojam udara u smislu dejstva. ***Dejstvo** koje nekom telu daju trenutne sile* $\vec{F}_{ud}$ *konačnog impulsa i kratkovremenog dejstva u intervalu* $\Delta t = t - t_9 = \tau \to 0$ *naziva se* ***udar***.

Prema *teoremi o promeni impulsa kretanja materijalne tačke mase m* možemo napisati odgovarajuću relaciju izmedju kinetičkih parametara dinamike materijalne tačke u obliku sledeće relacije:

$$\vec{K}_F(t_0+\tau)=\vec{p}(t_0+\tau)-\vec{p}(t_0)=m\vec{v}(t_0+\tau)-m\vec{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud}dt$$

U prethodnoj relaciji vektorske invarijante $\vec{v}(t_0+\tau)$ i $\vec{v}(t_0)$ se uvek odnose na istu materijalnu tačku mase m i nazivaju se brzine posmatrane materijalne tačke do udara, $\vec{v}(t_0)$, i posle, $\vec{v}(t_0+\tau)$, sudara (ili udara). Ako materijalna tačka u trenutku udara u nepokretni material drugog sistema ima brzinu $\vec{v}(t_0)$ onda kažemo da je to *dolazna brzina*. Ona trenutno proizvedena brzina $\vec{v}(t_0+\tau)$ u toku sudara kojim materijalna tačka izlazi iz kontakta sa drugim sistemom sa kojim se sudarila naziva se *odlazna brzina*.

Kao što smo pokazali prethodnom analizom, moramo imati u vidu pretpostavku da se za kratko vreme sudarnog kontakta, *položaji materijalnih tačaka u sudarnom kontaktu*, kada dejstvuju trenutne udarne sile, *vrlo malo i sporo menjaju*. Te beskonačno male promene položaja materijalnih tačaka u sudaru su reda veličine malog intervala vremena u kome se odvija sudar. Zato je i opravdano što se promene položaja u toku kratkog intervala vremena u kome se dešava sudar zanemaruju, kao što smo i izveli u prethodnoj relaciji (A).

U slučaju udara jedne materijalne tačke u nepokretni materijal može se napisati relacija oblika:

$$\vec{v}(t_0+\tau)-\vec{v}(t_0)=\Delta\vec{v}=\frac{1}{m}\vec{K}_F(t_0+\tau)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud}dt$$

Ako je dolazna brzina $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$ poznata, a brzina $\vec{v}(t)$ je brzina u trenutku vremena $t\in(t_0,t_0+\tau)$ u toku intervala udarnog kontakta prilkom udara materijalne tačke u nepokretnu materijalnu sredinu (sistem) onda možemo napisati sledeće:

$$\vec{v}(t)-\vec{v}_9=\Delta\vec{v}=\frac{1}{m}\vec{K}_{Fud}(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud}dt$$

odnosno

$$\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)dt-\vec{v}_9\int_{t_0}^{t}dt=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{K}_{Fud}(t)dt=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left\langle\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud}dt\right\rangle dt$$

a kako je $d\vec{r}=\vec{v}(t)dt$ iz prethodne relacije dobijamo:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{K}_{Fud}dt+\vec{v}_0\tau=\left(\vec{v}_0+\frac{1}{m}\vec{K}_{Fs}\right)\tau$$

gde je

$$\vec{K}_{Fs}=\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{K}_{Fud}dt$$

srednja vrednost udarnog impulsa, u intervalu vremena $(t_0,t_0+\tau)$ odvijanja kontakta u udaru materijalne tačke o nepokretnu sredinu (materijalni sistema).

Teoreme mehanike u primeni na dinamiku (s)udara.

Na osnovu eksperimentalnog proučavanja (s)udara, uvodi se pretpostavka da sve tačke materijalnog sistema imaju udar istovremeno, kada se isti dogodi u udarnom kontaktu dva materijalna sistema. To se objašnjava time da se nagla promena brzina jednih tačaka materijalnog sistema prenosi trenutno na druge materijalne tačke - elementarne mase materijalnog sistema. Inače same trenutne (udarne) sile mogu biti i spoljašnje i unutrašnje trenutne sile udara, kako i aktive tako i pasivne (otpori – sile reakcija veza). Tako i ***impulsi mogu biti unutrašnji i spoljašnji***, ako i ***aktivni i pasivni*** (impulsi otpora veza).

Teorema o impulsu kretanja sistema materijalnih tačaka za udar. Kada na materijalne tačke masa $m_i, i=1,3,...,N$ diskretnog materijalnog sistema u nekom trenutku dejstvuju trenutne (udarne) sile

$\vec{F}_i, i = 1,2,...,N$ sa konačnim impulsima $\vec{K}_{Fi}, i = 1,2,...,N$, to za svaku materijalnu tačku sistema možemo postaviti po jednu relaciju

$$\vec{v}_i(t_0 + \tau) - \vec{v}_i(t_0) = \Delta\vec{v}_i = \frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau) = \frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt\,,\quad i = 1,2,3,...,N$$

Ako vektorski saberemo sve jednačine prethodno navedenog sistema dobićemo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t_0 + \tau) - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t_0) = \sum_{i=1}^{N}\vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt$$

gde su: impulsi kretanja sistema materijalnih tačaka pre i posle sudara:

$$\vec{p}(t_0) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t_0)$$

$$\vec{p}(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t_0 + \tau)$$

Iz prethodnog sledi da je:

$$\vec{p}(t_0 + \tau) - \vec{p}(t_0) = \sum_{i=1}^{N}\vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt = \vec{K}_T(t_0 + \tau)$$

kao i:

$$M\vec{v}_C(t_0 + \tau) - M\vec{v}_C(t_0) = \sum_{i=1}^{N}\vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt = \vec{K}_T(t_0 + \tau)$$

Poslednje dve relacije predstavljaju iskaz *teoreme o impulsu kretanja sistema materijalnih tačaka za udar.*

Zbir impulsa udara materijalnih tačaka diskretnog materijalnog sistema jednak je zbiru impulsa spoljašnjih trenutnih sila $\vec{F}_{ud,i}$ *konačnih impulsa, koje dejstvuju udarno na materijalni sistem. Kako je zbir unutrašnjih sila* $\vec{F}_{ud,un,ij}$ *koje dejstvuju na materijalni system jednak nuli, to je i zbir impulsa unutrašnjih trenutnih sila konačnih impulsa jednak nuli.*

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,un,ij}dt = 0$$

Takodje, iz druge relacije vidimo vezu izmedju brzina središta sistema materijalnih tačaka pre i posle udara, $\vec{v}_C(t_0 + \tau)$ i $\vec{v}_C(t_0)$ to možemo da formulišemo i sledeću lemu:

Ako je materijalni sistem izolovan (na njega ne dejstvuju ni spoljašnje sile ni impulsi) tada se pri udaru ne menja ni količina kretanja, ni brzina njegovog središta (centra inercije).

Teorema o promeni momenta impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka za udar (Teorema o kinetičkom momentu kretanja sistema materijalnih tačaka za udar). Kada na materijalne tačke masa $m_i, i = 1,3,...,N$ diskretnog materijalnog sistema u nekom trenutku dejstvuju trenutne udarne sile $\vec{F}_{ud,i}, i = 1,2,...,N$ sa impulsima $\vec{K}_{Fi}, i = 1,2,...,N$, to za svaku materijalnu tačku sistema možemo postaviti po jednu relaciju teoreme o promeni momenta impulsa kretanja u obliku:

$$[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i(t_0 + \tau)] - [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i(t_0)] = [\vec{r}_i, \vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau)] = \left[\vec{r}_i, \int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt\right],\quad i = 1,2,3,...,N$$

Ako vektorski saberemo sve jednačine navedenog prethodnog sistema dobićemo:

$$\sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i(t_0 + \tau)] - \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i(t_0)] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{K}_{Fi}(t_0 + \tau)] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt\right]$$

gde su: rezultujući momenti impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka pre i posle sudara:

$$\vec{L}_O(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0)\right]$$

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0+\tau),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\Delta\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

a imajući u vidu da je:

$$\Delta\vec{r}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{i0}=\left(\vec{v}_{i0}+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fsi}\right)\tau$$

sledi da je

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{v}_{i0}+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fsi}\right)\tau,m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

Iz prethodnog sledi da je:

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)-\vec{L}_O(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]-\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0)\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{v}_{i0}+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fsi}\right)\tau,m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

što daljom transformacijom daje

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)-\vec{L}_O(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i(t_0),m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)-m_i\vec{v}_i(t_0)\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{v}_{i0}+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fsi}\right)\tau,m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)-\vec{L}_O(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i,\vec{K}_{Fi}(t_0+\tau)\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{v}_{i0}+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fsi}\right)\tau,m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

i konačno:

$$\vec{L}_O(t_0+\tau)-\vec{L}_O(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i,\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{v}_{i0}\tau,m_i\vec{v}_i(t_0+\tau)\right]$$

Poslednje dve relacije predstavljaju iskaz *teoreme o promeni impulsa kretanja sistema materijalnih tačaka za udar.*

Kako je zbir unutrašnjih sila koje dejstvuju na materijalni system jednak nuli, to je i zbir momenta impulsa unutrašnjih sila jednak nuli.

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{t_0,}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,u,ij}dt=0$$

Teorema o radu impulsnih(udarnih) sila

Pri dejstvu udarnih sila promene položaja materijalnih tačaka sistema, kao što smo već dokazali, su beskonačno male, ali smo i utvrdili da su trenutne udarne sile vema velikog intenziteta, mada kratkovremenog trajanja, konačnih impulsa, ali i njihovo dejstvo je takvo da one mogu izvršiti odredjeni konačni rad.

Ako sada podjemo od izraza za promenu položaja materijalne tačke pod dejstvom udarne (trenutne) sile čiji impuls sile znamo, a koji smo već izveli u obliku:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{K}_F dt+\vec{v}_0\tau=\left(\vec{v}_0+\frac{1}{m}\vec{K}_{Fs}\right)\tau$$

tako da možemo odrediti skalarnu invarijantu – rad udarne (trenutne) sile na tom putu, računajući skalarni proizvod trenutne udarne silr i priraštaja puta u sledećem obliku:

$$\left(\Delta\vec{r},\vec{F}_{ud}\right)=\left(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{F}_{ud}\right)=\frac{1}{m}\left(\vec{F}_{ud},\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{K}_F dt\right)+\left(\vec{F}_{ud},\vec{v}_0\right)\tau=\left(\left(\vec{v}_0,\vec{F}_{ud}\right)+\frac{1}{m}\left(\vec{K}_{Fs},\vec{F}_{ud}\right)\right)\tau=P_{ud}\tau+\frac{1}{m}\left(\vec{K}_{Fs},\vec{F}_{ud}\right)\tau$$

ili

$$\left(\Delta\vec{r},\vec{F}_{ud,sr}\right)=\left(\left(\vec{v}_0,\vec{F}_{ud,sr}\right)+\frac{1}{m}\left(\vec{K}_{Fs},\vec{F}_{ud,sr}\right)\right)\tau=P_{ud,sr}\tau+\frac{1}{m}\left(\vec{K}_{Fs},\vec{F}_{ud,sr}\right)\tau=\left(\left(\vec{v}_0,\vec{K}_{F_{ud}}\right)+\frac{1}{m}\left(\vec{K}_{Fs},\vec{K}_{F_{ud}}\right)\right)$$

Iz ovih izraza je očigledno da je ***rad impulsnih (udarnih) sila konačan***.

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da je ukupni elementarni rad impulsnih (udarnih) sila u intervalu vremena $(t,t+dt)$ koji je sadržan u intervalu $(t_0,t_0+\tau)$ u kome dejstvuju udarne sile:

$$dA=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},d\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},\vec{v}_i\right)dt$$

Ako sada sa $\vec{K}_{Fud}$ označimo impuls trenutne (udarne, impulsne) sile u nekom trenutku vremena t u intervalu $(t_0<t<t_0+\tau)$, a sa $d\vec{K}_{Fud}$ promenu impulsa trenutne, udarne, sile u od trenutka t do trenutka $t+dt$, to se prethodna relacija elementarnog rada može napisati u obliku:

$$dA=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},d\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},\vec{v}_i\right)dt=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i,d\vec{K}_{Fud,i}\right)$$

*Kako se prema teoremi o impulsu kretanja sistema materijalnih tačaka za udar, k*ada na materijalne tačke masa $m_i, i=1,3,...,N$ diskretnog materijalnog sistema u nekom trenutku dejstvuju trenutne udarne sile $\vec{F}_{ud,i}, i=1,2,...,N$ sa impulsima $\vec{K}_{Fi}, i=1,2,...,N$, za svaku materijalnu tačku sistema može postaviti po jedna relacija

$$\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)=\Delta\vec{v}_i=\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fi}(t_0+\tau)=\frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t_9+\tau}\vec{F}_{ud,i}dt,\quad i=1,2,3,...,N,$$

to takvu relaciju možemo iskoristiti za odredjivanje promene brzine u intervalu (t_0,t), koji pripada intervalu $(t_0<t<t_0+\tau)$ u kome se odvija udarno dejstvo sile:

$$\vec{v}_i(t)-\vec{v}_i(t_0)=\Delta\vec{v}_i=\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fi}(t)=\frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud,i}dt,\quad i=1,2,3,...,N,$$

Sada unošenjem izraza za brzinu

$$\vec{v}_i(t)=\vec{v}_i(t_0)+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fud,i}(t)=\vec{v}_i(t_0)+\frac{1}{m_i}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{iu,i}dt,\quad i=1,2,3,...,N,$$

u izraz za relaciju elementarnog rada, može se dobiti odgovarajući izraz, koji se može napisati u obliku:

$$dA=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},d\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i,d\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i(t_0)+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fuf,i}(t),d\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)$$

Vidimo da se sada ova diferencijalna relacija može lako integraliti, te posle integraljenja u intervalu $(t_0,t_0+\tau)$, za ukupan rad trenutni udarnih sila za vreme trajanja udara dobijamo sledeći izraz:

$$A=\int_{\vec{r}_i(t_0)}^{\vec{r}_i(t_0+\tau)}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ud,i},d\vec{r}_i\right)=\int_{\vec{K}_{ud,i}(t_0)=0}^{\vec{K}_{ud,i}(t_0+\tau)}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{v}_i,d\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_i}\left(\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)^2+\left(\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)\right\},$$

odnosno

$$A=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_i}\left(\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)^2+\left(\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)\right\}$$

Sada uzimajući u račun da je

$$\vec{v}_i(t)=\vec{v}_i(t_0)+\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fud,i}(t)\ ,$$

odnosno

$$\frac{1}{m_i}\vec{K}_{Fud,i}(t)=\left\{\vec{v}_i(t)-\vec{v}_i(t_0)\right\},$$

a imajući u vidu i da je

$$\frac{1}{2m_i}\left(\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)^2=\frac{1}{2m_i}\left(\vec{K}_{Fuf,i}(t),\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{v}_i(t)-\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right).$$

izraz za ***ukupan rad trenutnih udarnih sila za vreme trajanja udara***, možemo transformisati na pogodniji oblik, tako da dobijamo sledeći izraz

$$A=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_i}\left(\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)^2+\left(\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)\right\}=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{v}_i(t)-\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)+\left(\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fud,i}(t)\right)\right\}$$

ili

$$A=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{v}_i(t)+\vec{v}_i(t_0),\vec{K}_{Fuf,i}(t)\right)\right\}$$

Ovaj poslednji izraz je zaista u pogodnijem obliku za dalju analizu rada trenutnih udarnih sila u toku trajanja udarnog dejatva.

Ova relacija za ukupan rad udarnih sila za vreme trajanja udara predstavlja ***Kelvin***ov obrazac za rad trenutnih udarnih sila.

Princip rada za dinamiku udara u sistemu materijalnih tačaka

Polazimo od relacije principa rada za sistem materijalnih tačaka u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{I}_{F,i}+\vec{F}_{i,j}+\vec{F}_{w,i,j},\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Ako sada pomnožimo prethodnu vektorsku jednačinu sa dt dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{F}_{i,j}+\vec{F}_{w,i,j}\right),\delta\vec{r}_i\right)dt=\sum_{i=1}^{N}\left(m_i d\vec{v}_i-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{F}_{i,j}+\vec{F}_{w,i,j}\right)dt,\delta\vec{r}_i\right)=0$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i d\vec{v}_i-\sum_{j=1}^{i=S_i}\left(\vec{F}_{i,j}+\vec{F}_{w,i,j}\right)dt,\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{j=1}^{N}\left(d\vec{p}_i-\sum_{j=1}^{ji=S_i}\left(d\vec{K}_{F_{ud,i,j}}+d\vec{K}_{w,ud,i,j}\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Posle integraljenja po vremenu prethodne relacije dobijamo:

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\left(d\vec{p}_i-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(d\vec{K}_{F_{ud,i,j}}+d\vec{K}_{w,ud,i,j}\right),\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{p}_i(t)-\vec{p}(t_0)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

ili u obliku

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{p}_i(t)-\vec{p}(t_0)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

i posle nekoliko transformacija

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\vec{v}_i(t)-m_i\vec{v}_i(t_0)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

kao i u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{p}_i(t_0+\tau)-\vec{p}_i(t_0)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

dobijamo sledeći oblik sistema vektorskih relacija:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)\right)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

za system materijalnih tačaka u dinamici udarnih dejstava trenutnih inmpulsnih, udarnih sila.

Poslednje jednačine, znači, predstavljaju vektorske relacije *Principa rada za dinamiku udara u sistemu materijalnih tačaka, a u literaturi su poznate i kao jednačine Dalamberovog principa za udar.*

U tim jednačinama $\vec{v}_i(t_0)$ je brzina i-te materijalne tačke mase m_i u trenutku udara, a $\vec{v}_i(t_0+\tau)$ je brzina iste i-te materijalne tačke mase m_i u trenutku posle udara.

Po analogiji sa silom inercije vektor

$$-\left(\vec{p}_i(t_0+\tau)-\vec{p}_i(t_0)\right)=-m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)\right)$$

se može nazvati i ***impulsom inercije udara materijalne tačke*** ili kraće ***inercijom udara materijalne tačke ili pak udarnim impulsom inercije materijalne tačke***. $\vec{K}_{F_{ud,i}}(t_0+\tau)$ je ***impuls*** i***-te trenutne udarne sile*** na i-tu materijalnu tačku mase m_i, dok je $\vec{K}_{w,ud,i}(t_0+\tau)$ ***impuls*** i***-tog udarnog (trenutnog, impulsnog) otpora veze koja dejstvuje na na*** i ***-tu materijalnu tačku mase*** m_i**.**

Izraz

$$\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right)-m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)\right)$$

nazivamo ***izgubljenim udarnim impulsom*** i-te materijalne tačke mase m_i.

Sada možemo da iskažemo i princip rada u primeni na dinamiku udara sistema materijalnih tačaka:

Ukupan virtuelni rad izgubljenih udarnih impulsa jednak je nuli.

Ako sada sa

$$\Delta\vec{v}_i=\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)$$

obeležimo ukupnu promenu brzine i-te materijalne tačke mase m_i u toku dinamike udara može se pretnodna relacija *Principa rada za dinamiku udara u sistemu materijalnih tačaka* napisati i u sledećem obliku:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\Delta\vec{v}_i-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Sistem vektorskih jednačina - iskaza *Principa rada za dinamiku udara u sistemu materijalnih tačaka* se može izraziti i pomoću generalisanih koordinata q_k, $k=1,2,3,...,n$, gde je n brpj stepeni slobode kretanja. Tada možemo napisati da je

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

što unošenjem u vektorske jednačine

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)\right)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

i

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\Delta\vec{v}_i-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\delta\vec{r}_i\right)=0$$

daje:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\vec{v}_i(t_0+\tau)-\vec{v}_i(t_0)\right)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)=0$$

i

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\Delta\vec{v}_i-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau)+\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau)\right),\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)=0$$

i posle transformacije prve jednačine dobijamo:

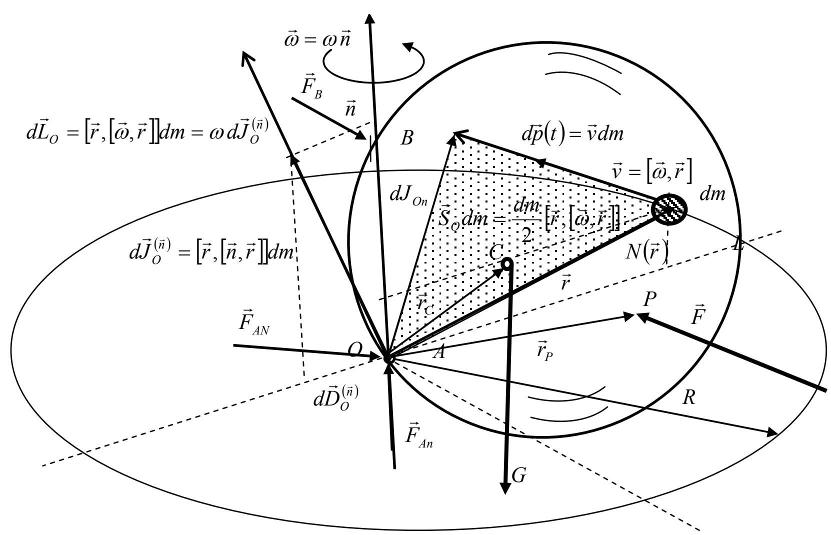
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\left(\vec{v}_i(t_0+\tau),\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\left(\vec{v}_i(t_0),\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)\right)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau),\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)+\left(\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau),\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\right)\delta q_k\right)$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\left(\vec{v}_i(t_0+\tau),\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)-\left(\vec{v}_i(t_0),\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)\right)-\sum_{j=1}^{j=S_i}\left(\left(\vec{K}_{F_{ud,i,j}}(t_0+\tau),\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)+\left(\vec{K}_{w,ud,i,j}(t_0+\tau),\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\right)\delta q_k\right)$$

Odakle se mogu ove jednačine izraziti u sistemu generalisanih koordinata.

Dejstvo udara na telo koje se obrće oko nepokretne ose. Centar udara.



Za telo koje se obrće oko nepokretne ose ugaonom brzinom ω i ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$, I koje ima u tački O sferno ležošte, au tački B cilindrično ležište, izveli smo na osnovu teorema o promeni impulsa kretanja i promeni momenta impulsa kretanja sledeće dve vektorske kednačine:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1=\vec{F}_{AN}+\vec{F}_{An}+\vec{F}_B+\vec{F}+\vec{G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}=\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right]+\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right]+\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

Znači da smo dobili dve vektorske jednačine sa nepoznatim otporima (veza) oslonaca vratila pri čemu znamo da su $\vec{F}_{AN}$ i $\vec{F}_B$ upravne na osu rotacije, dok je $\vec{F}_{An}$ u pravcu ose. Pretpostavimo sada da ne dejstvuje sila težine tela, a da na telo koje se obrće dejstvuju samo *trenutne sile konačnih impulsa i kratkovremenog dejstva, pri čemu je spoljašnja trenutna sila* $\vec{F}_{ud}$ *onda prethodne jednačine, za posmatrani slučaj dinamike udara na telokoje može da se obrće oko nepokretne ose možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1=\vec{F}_{AN}+\vec{F}_{An}+\vec{F}_B+\vec{F}_{ud}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}=\left[\vec{r}_P,\vec{F}_{ud}\right]+\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

onda će i otpori veza koje dejstvuju na telo u osloncima biti udarnog dejstva. Zato prethodne jednačine transformižemo u oblik preko impulsa trenutnih sila i otrora veza trenutnog dejstva, a zato napišimo prethodne vektorske jednačine u diferencijalnom obliku:

$$d\vec{p}(t)=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\vec{F}_{AN}dt+\vec{F}_{An}dt+\vec{F}_B dt+\vec{F}_{ud}dt$$

$$d\vec{L}_O=\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}dt+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}dt=\left[\vec{r}_P,\vec{F}_{ud}\right]dt+\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]dt$$

Posle integraljenja prethodnih vektorskih jednačina u diferencijalnom obliku dobijamo:

$$\Delta\vec{p}(t)=\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0)=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{AN}dt+\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{An}dt+\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{B}dt+\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ud}dt$$

$$\Delta\vec{L}_O=\vec{L}_O(t)-\vec{L}_O(t_0)=\int_{t_0}^{t}\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}dt+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt=\int_{t_0}^{t}\left[\vec{r}_P,\vec{F}_{ud}\right]dt+\int_{t_0}^{t}\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]dt$$

ili

$$\Delta\vec{p}(t)=\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0)=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\vec{K}_{F_{AN}}+\vec{K}_{F_{An}}+\vec{K}_{F_B}+\vec{K}_{F_{ud}}$$

$$\Delta\vec{L}_O=\vec{L}_O(t)-\vec{L}_O(t_0)=(\omega-\omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt\approx\left[\vec{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right]+\left[\vec{r}_B,\vec{K}_{F_B}\right]$$

gde je $\vec{\mathfrak{R}}=\dot{\omega}\vec{u}+\omega^2\vec{w}=\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$ odnosno $\vec{\mathfrak{R}}_1=\dot{\omega}\vec{u}_1+\omega^2\vec{w}_1=\mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01}$

te je:

$$\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt=\int_{t_0}^{t}\left[\dot{\omega}\vec{u}+\omega^2\vec{w}\right]dt$$

$$\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\int_{t_0}^{t}\left[\dot{\omega}\vec{u}_1+\omega^2\vec{w}_1\right]dt$$

Postavljamo pitanje koji je uslov da ne postoje kinetički udarni reaktivni impulsi u osloncima vratila oko koga rotira kruto telo pod dejstvom impulsnih sila. U tom slučaju ćemo prvo odrediti reaktivne udarne impulse na ležišta vratila: Zato pomnožimo skalarno, a zatim i vektorski ortom orjentacije ose $\vec{n}$ oko koje se impulsno okreće materijalno telo.

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\vec{n},\vec{\mathfrak{R}}_1\right)dt=\left(\vec{n},\vec{K}_{F_{AN}}\right)+\left(\vec{n},\vec{K}_{F_{An}}\right)+\left(\vec{n},\vec{K}_{F_B}\right)+\left(\vec{n},\vec{K}_{F_{ud}}\right)$$

$$(\omega-\omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\vec{n},\vec{\mathfrak{R}}\right)dt\approx\left(\vec{n},\left[\vec{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)+\left(\vec{n},\left[\vec{r}_B,\vec{K}_{F_B}\right]\right)$$

odakle sledi da je:

$$\vec{K}_{F_{An}}=\vec{n}\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\vec{n},\vec{\mathfrak{R}}_1\right)dt-\left(\vec{n},\vec{K}_{F_{ud}}\right)\vec{n}$$

$$(\omega-\omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)=\left(\vec{n},\left[\vec{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Ako sada vektorski pomnožimo sa leve i desne strane prethodne jednačine ortom orjentacije ose $\vec{n}$ dobijamo:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}}_1,\vec{n}\right]\right]dt=\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{AN}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{BN}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{An}},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right]\right]dt\approx\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_B,\vec{K}_{F_B}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Kako dvostruki vektorski proizvod jediničnim vektorom ortom orjentacije ose $\vec{n}$ ''propušta'' samo normalnu komponentu to možemo da napišemo:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt=\vec{K}_{F_{AN}}+\vec{K}_{F_{BN}}+\left[\vec{n},\left[\vec{K}_{F_{ud}},\vec{n}\right]\right]$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}dt\approx\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{K}_{F_{ud}}\right],\vec{n}\right]\right]+r_B\vec{K}_{F_B}$$

Odnosno rešavanjem prethodnog sistema vektorskih jednačina po nepoznatim mpulsima inpulsnih kinetičkih otpora veza $\vec{K}_{F_{AN}}$ i $\vec{K}_{F_B}$ koje se javljaju kao reakcija na dejstvo spoljašnje impulsne, trenutne sile na telo koje rotira oko nepokreetne ose, dobijamo:

$$\vec{K}_{F_{AN}} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \vec{K}_{F_{BN}} - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_B} = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right]$$

Sada možemo da napišemo izraze za reaktivne udarne impulse na ležišta vratila $\vec{K}_{F_{AN}}$ i $\vec{K}_{F_B}$:

$$\vec{K}_{F_{An}} = \vec{n}\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \left(\vec{n}, \vec{\mathfrak{R}}_1\right) dt - \left(\vec{n}, \vec{K}_{F_{ud}}\right)\vec{n}$$

$$\vec{K}_{F_{AN}} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_B} = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right]$$

kao i jednačinu impulsne dinamike tela oko ose rotacije:

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Iz izraza za reaktivne udarne impulse na ležišta vratila oko koga se pod dejstvom impulshog opterećenja u obliku trenutne sile, kratkotrajnog dejstva i konačnog impulsa okreće rotor, tako da se javlja kinetički devijacioni spreg impulsnih udarnih reakcija

$$\vec{K}_{F_{AN}DEV} = -\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{K}_{F_B DEV} = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_P, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = -\vec{K}_{F_{AN}DEV}$$

Centar udara. Centar udara C_u je ona tačka u kojoj treba da dejstvuje udarna trenutna impulsna sila, da bi reaktivne udarne impulsne reakcije veza u ležištima vratila bile jednake nuli. Neka je vector položaja centra udara sa vektorom položaja $\bar{r}_{C_u} = \xi_{C_u}\vec{u} + \eta_{C_u}\vec{w} + \zeta_{C_u}\vec{n}$, tada njegove coordinate možemo odrediti uiz sledećih usmova:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\bar{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\bar{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Na snovu ovih uslova dobijamo uslove koje moraju da zadovolje koordinate udarne impulsne trenutne sile, kao i koordinate centra udara u kojoj je napadna tačka udarnog impulsa - trenutne sile, da bi kinetički udarni impulse – trenutni otpori veza na ležišta rotora bili jednaki nuli. Ti uslovi su:

$$K_\xi = 0, \quad K_\eta \neq 0 \text{ i } K_\zeta = 0$$

za koordinate udarnog impulsa $\vec{K}_{F_{ud}}$ koji za izabran koordinatni sistem tako da središte masa materijalnog tela leži u rotirajućoj ravni $\eta = 0$, odnosno $A\xi\zeta$ ravni koja prolazi kroz osu oko koje se može obrtati telo, iom slučaju su koodinate centra udara odredjene sledećim izrazima:

$$\eta_{C_u} = 0\,,\ \xi_{C_u} = \frac{J_{O\zeta}^{(\vec{n})}}{M\xi_C}\,,\ \zeta_{C_u} = \frac{D_{On\xi}}{M\xi_C} = -\frac{J_{On\xi}}{M\xi_C}\,,$$

Dok su za taj slučaj relacije veza izmedju ugaobe brzine i ugaonog ubrzanja oblika:

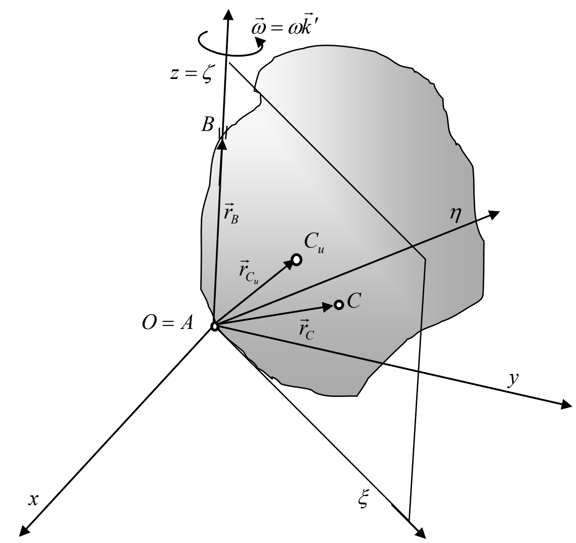
$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \omega^2 dt = \frac{K_\xi}{M\xi_C} = 0 \quad , \quad \int_{t_0}^{t_0+\tau} \dot{\omega} dt = \frac{K_\eta}{M\xi_C} = \omega - \omega_0 \neq 0$$

Sada treba dokazati prethodna tvrdjenja.
Polazimo od dobijenih uslova u obliku:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right| \int_{t_0}^{t} \vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$(\omega - \omega_0)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$



Zatim odredimo potrebne izraze i vektore i vektorske proizvode u obliku:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n}, \vec{r}]dm = [\vec{n}, \vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\eta_C + \xi_C\vec{j}'\right) = M\sqrt{\eta_C^{\ 2} + \xi_C^{\ 2}}\,\vec{u}_1$$

$$\left[\vec{n}, \vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M\left[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{r}_C]\right] = M\left\langle(\vec{n}, \vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\eta_C & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\xi_C - \vec{j}'\eta_C\right) = M\sqrt{\eta_C^{\ 2} + \xi_C^{\ 2}}\,\vec{w}_1$$

Ako izaberemo ravan $\eta = 0$, odnosno $A\xi\zeta$ raven, koja prolazi kroz osu oko koje se može obrtati telo i u toj ravni neka je središte sistema (masa tela), te možemo dobiti odgovarajuća uprošćenja potrebnih vektorskih proizvoda u obliku:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n}, \vec{r}]dm = [\vec{n}, \vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & 0 & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(\xi_C\vec{j}'\right) = M\xi_C\vec{j}'$$

$$\left[\vec{n}, \vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M\left[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{r}_C]\right] = M\left\langle(\vec{n}, \vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}'\xi_C\right)$$

$$\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = \vec{i}\,'D_{On\xi} + \vec{j}\,'D_{On\eta} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}$$

$$\left[\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n}, J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n}, \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ D_{On\xi} & D_{On\eta} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\,'D_{On\eta} + \vec{j}\,'D_{On\xi} = \sqrt{D_{On\xi}^{\ 2} + D_{On\eta}^{\ 2}}\,\vec{w}$$

$$\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \xi_{C_u} & \eta_{C_u} & \zeta_{C_u} \\ K_\xi & K_\eta & K_\zeta \end{vmatrix} = \vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right) + \vec{k}\,'\left(\xi_{C_u}K_\eta - \eta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{k}'\right] = \vec{j}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{i}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\vec{k}', \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{k}'\right]\right] = -\vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) - \vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right)$$

$$\left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{k}'\right] = \vec{j}\,'K_\xi - \vec{i}\,'K_\eta$$

$$\left[\vec{k}', \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{k}'\right]\right] = -\vec{i}\,'K_\xi - \vec{j}\,'K_\eta$$

Po odredjivanju prethodnih izraza, nije teško doći do traženih projekcija kinetičkih impulsa – trenutnih reakcija veza – kinetičkih impulsnih pritisaka na ležišta vratila rotora. Odredjene vektore i vektorske proizvode unesemo u uslove:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0 \qquad \vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$$

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}} dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0 \qquad \vec{\mathfrak{R}}_1 = \dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1 = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01}$$

$$\left(\omega - \omega_0\right)\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right) = \left(\vec{n}, \left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right]\right)$$

Iz ovih uslova ćemo odrediti koordinate centra udara. Transformacijom dobijamo da je

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\left(\dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w}\right)dt - \left[\vec{n}, \left[\left[\vec{r}_{C_u}, \vec{K}_{F_{ud}}\right], \vec{n}\right]\right] = 0$$

$$\left(\vec{i}\,'D_{On\xi} + \vec{j}\,'D_{On\eta}\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt + \left(-\vec{i}\,'D_{On\eta} + \vec{j}\,'D_{On\xi}\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2 dt + \vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\eta\right) + \vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta - \zeta_{C_u}K_\xi\right) = 0 \quad \text{O}$$

a iz ovog uslova sledi da je

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\int_{t_0}^{t}\vec{\mathfrak{R}}_1 dt - \left[\vec{n}, \left[\vec{K}_{F_{ud}}, \vec{n}\right]\right] = 0$$

Tako da dobijamo da je:

$$-\left(-\vec{i}\,'K_\xi - \vec{j}\,'K_\eta\right) + M\xi_C\vec{j}\,'\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt + M\left(-\vec{i}\,'\xi_C\right)\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2 dt = 0$$

odakle odredjujemo da je prethodni uslov zadovoljen, ako je:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\omega^2 dt = \frac{K_\xi}{M\xi_C}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt = \frac{K_\eta}{M\xi_C} = \omega - \omega_0$$

Sada prethodni rezultat unosimo u jednačinu – relaciju drugog uslova da kinetički impulsi udarnog opterećenja budu jednaki nuli:

$$\left(\vec{i}\,'D_{On\xi}+\vec{j}\,'D_{On\eta}\right)\frac{K_\eta}{M\xi_C}+\left(-\vec{i}\,'D_{On\eta}+\vec{j}\,'D_{On\xi}\right)\frac{K_\xi}{M\xi_C}+\vec{i}\,'\left(\eta_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\eta\right)+\vec{j}\,'\left(\xi_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\xi\right)=0$$

$$\left(D_{On\xi}\right)\frac{K_\eta}{M\xi_C}+\left(-D_{On\eta}\right)\frac{K_\xi}{M\xi_C}+\left(\eta_{C_u}K_\zeta-\zeta_{C_u}K_\eta\right)=0$$

$$\left(\frac{D_{On\xi}}{M\xi_C}-\zeta_{C_u}\right)K_\eta+\left(\frac{-D_{On\eta}}{M\xi_C}\right)K_\xi+\left(K_\zeta\eta_{C_u}\right)=0$$

Oz ove relacije dobijamo da je

$$\zeta_{C_u}=\frac{D_{On\xi}}{M\xi_C}=-\frac{J_{On\xi}}{M\xi_C}\text{, kao } K_\xi=0 \text{ i } \eta_{C_u}=0$$

Iz jednačine obrtanja pod dejstvom udarnog impulsa pišemo

$$(\omega-\omega_0)J_{O\zeta}^{(\vec{n})}=\left(\xi_{C_u}K_\eta-\eta_{C_u}K_\xi\right)$$

a imajući u vidu da je:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\dot{\omega}dt=\frac{K_\eta}{M\xi_C}=\omega-\omega_0$$

sledi

$$\frac{K_\eta}{M\xi_C}J_{O\zeta}^{(\vec{n})}=\left(\xi_{C_u}K_\eta-\eta_{C_u}K_\xi\right)$$

Odakle dobijamo

$$K_\xi=0,\quad K_\eta\neq 0$$

Što znači da udarni impuls mora da bude upravan na osu rotacije ζ i jedna od koordinata centra udara je:

$$\xi_{C_u}=\frac{J_{O\zeta}^{(\vec{n})}}{M\xi_C}$$

a time smo dokazali da su navedeni izrazi za kinetičke pritiske tačni.

Vrste sudara

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)

Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов,* - *Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевь. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - Ensslin - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950

Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Èléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:

- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.

P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.