DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA
MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VII.3. DEVETA NEDELJA
Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VIII. DESETA NEDELJA
Dinamika krutog tela
Osnovni pojmovi dinamike krutog tela: Momenti inercije mase tela. Definicije. Steiner-ova teorema. Elipsoid inercije. Translatorno kretanje tela. Količina kretanja tela. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija tela.

XI.1. JEDANAESTA NEDELJA
Obrtanje tela oko nekretne ose. Moment količine kretanja. Diferencijalna jednačina kretanja. Kinetička energija. Rad. Snaga.
Fizičko klatno. Kinetički pritisci.

XI.2. DVANAESTA NEDELJA
Ravansko kretanje tela. Količina kretanja. Moment količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija. Uslov kotrljanja bez klizanja.
Obrtanje tela oko nepkretne tačke. Kinetička energija. Moment količine kretanja. Euler-ove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. Regularna precesija.

XI.3 TRINAESTA NEDELJA
Sudar. Centralni upravni sudar. Centar udara. Charpy-jevo klatno.
Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog. Kelijev problem. Jednačina Ciolkovskog.

Dinamika materijalnog sistema (nastavak)
Dinamika sistema materijalnih tačaka
Dinamika krutog tela

Dinamika krutog tela

Uvod.
*****

Vektori momenata inercije masa krutog materijalnog tela. Obrtanje krutog tela oko nepomične ose.

Primer. Proučimo, sada, impuls kretanja $d\vec{p}(t)$, moment impusla kretanja $d\vec{L}_O$ (zamah) i njihove promene na primeru kretanja materijalne tačke elementarne mase dm krutog materijalnog tela, koje *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ i koja prolazi kroz momentnu tačku O. Grafički prikaz kinematičkih i kinetičkih vektorskih invarijanti za jednu tu materijalnu tačku elementarne mase koja je deo krutog materijalnog tela dat je na narednoj slici.

Označimo sa $\vec{r}$ vektor položaja te materijalne tačke elementarne mase u odnosu na momentnu tačku O, kroz koju prolazi i osa orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ oko koje, *ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, rotira ta materijalna tačka elementarne mase. Brzina $\vec{v}$ kretanja te te materijalne tačke je jednaka vektorskom proizvodu ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ i njenog vektora položaja $\vec{r}$: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \omega[\vec{n}, \vec{r}]$. Brzina $\vec{v}$ obrtnog kretanja te materijalne tačke elementarne mase dm je upravna na osu rotacije i njen vektor položaja, odnosno na vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$.

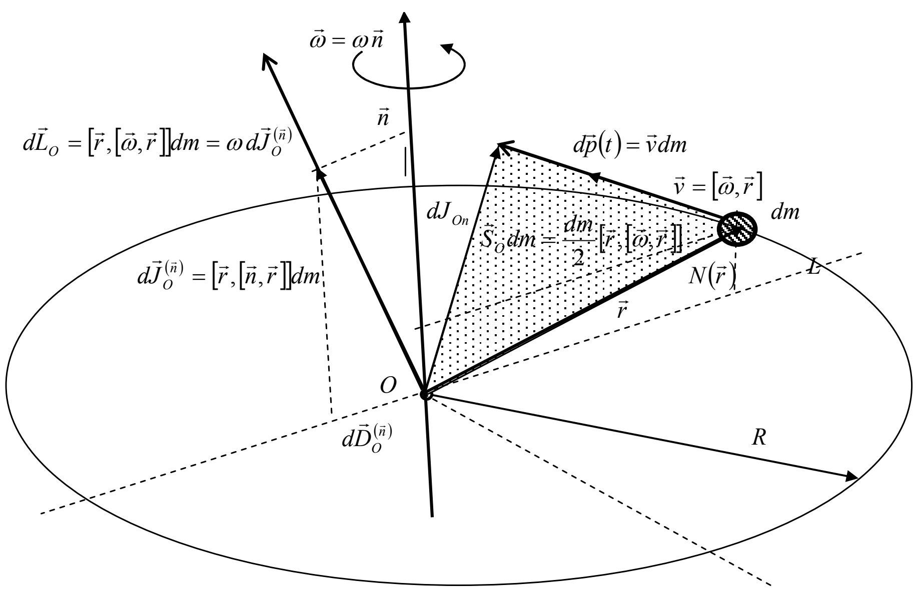
Vektor impulsa kretanja $d\vec{p}(t)$ te materijalne tačke elementarne mase, koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$d\vec{p}(t) = \vec{v}dm = [\vec{\omega},\vec{r}]dm = \omega[\vec{n},\vec{r}]dm = \omega d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$d\vec{S}_O^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} [\vec{n},\vec{r}]dm$$

i vektorsku definiciju za vektor $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na osu, odnosno od njenog polo\aja u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo prvog reda pri rotaciji materijalne tačke elementarne mase dm oko nepokretene ose. U slučaju kada je materijalna tačka elementarne mase dm na osi vector $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}$ kolinearni. Poredeći ovo odredjenje vector $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *linearnog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm sa vektorom dobijenim množenjem mase materijalne tačke elementarne mase dm i jediničnog vektora orjentacije ose $\vec{n}$, a koju smo uveli preko preprincipa (prednačela) postojanja, možemo uvesti i vector $d\vec{M}_O^{(\vec{n})} = \vec{n}dm$ nazvati *momentom mase nultog reda* ili *nulti moment mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $d\vec{L}_O$ *materijalne tačke elementarne mase* dm*, koja rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ *oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, i prolazi kroz pol* O *i vektora momenta inercije mase* $d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke elementarne mase* dm*, za pol* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase* dJ_{On} *i devijacionog momenta mase* $d\vec{D}_O^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke elementarne mase* dm*, za tu osu i taj pol.*

Vektor momenta impulsa kretanja $d\vec{L}_O$ te materijalne tačke elementarne mase dm krutog tela, koje *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$d\vec{L}_O \stackrel{def}{=} [\vec{r},d\vec{p}] = [\vec{r},\vec{v}]dm = [\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]]dm = \omega[\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm = \omega d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$d\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm$$

i vektorsku definiciju za vector $d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i vector *momenta mase drugog reda* ili *kvadratnog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. Taj vektor zavisi od položaja materijalne tačke elementarne mase dm u krutom telu, odnosno tela u odnosu na osu, odnosno od položaja te materijalne tačke elementarne mase dm u prostoru u odnosu na tu osu i pol i zavisi od orjentacije ose ortom $\vec{n}$. *Takodje izražava inerciono i devijaciono svojstvo drugog reda pri rotaciji te materijalne tačke* elementarne mase dm *oko nepokretene ose*. U slučaju kada je materijalna tačka elementarne mase dm na osi njen vektor $dJ_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* te materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, je jednak nuli, tada su i vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}$ kolinearni.

Oba vektora koje smo prethodno definisali:

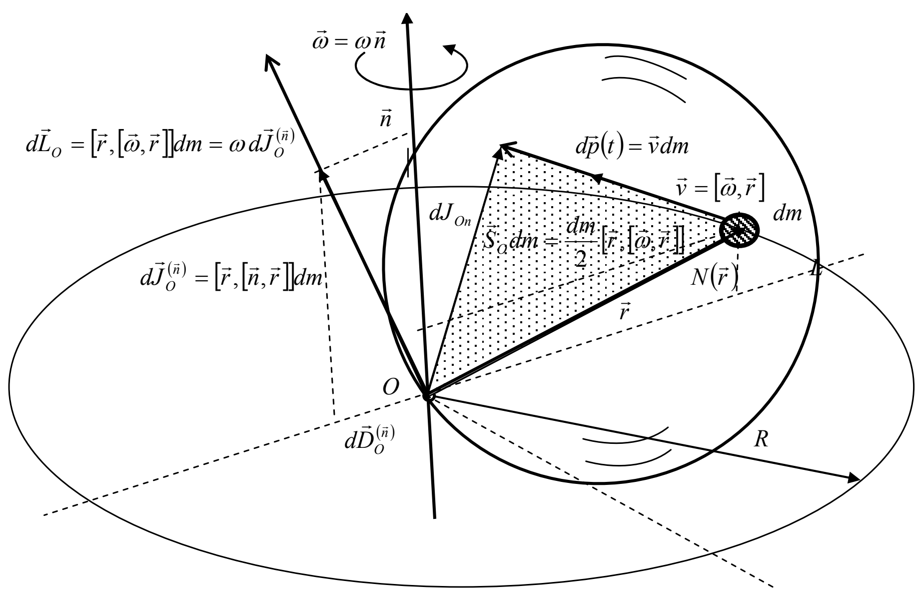
* vector $d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* te materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O:

$$d\vec{J}_{Oi}^{(\vec{n})} \overset{def}{=} [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm$$

kao i vektor $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O ili *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O:

$$d\vec{S}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} [\vec{n},\vec{r}]dm$$

su vektori vezani za tačku – pol O i orjentisanu osu i kao takvi su *tenzorskog karaktera* i odredjeni su, u opštem slučaju sa devet skalara. To znači da su tenzori drugog reda.



Slika. *Grafički prikaz momenta impulsa kretanja – kinetičkog momenta* $d\vec{L}_O$ *materijalne tačke elementarne mase* dm *krutog tela, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ *oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *, i prolazi kroz pol* O *i vektora momenta inercije mase* $d\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke elementarne mase* dm *keutog tela, za pol* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$ *i njegovih komponenti, aksijalnog momenta inercije mase* dJ_{On} *i devijacionog momenta mase* $d\vec{D}_O^{(\vec{n})}$ *materijalne tačke elementarne mase* dm *krutog tela, za tu osu i taj pol.*

Na osnovu prethodne analize za jednu materijalnu tačku elementarne mase dm krutog materijalnog tela, proučimo, sada, impuls kretanja $\vec{p}(t)$, moment impusla kretanja $\vec{L}_O$ (zamah) i njihove promene na primeru kretanja krutog materijalnog tela koje *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$ i koja prolazi kroz momentnu tačku O.

Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O$ sistema materijalnih tačaka elementarne mase dm, koje čine jedno kruto materijalno telao, koje rotira pišemo pomoću vektorskog zbira vektora momenata impulsa svih materijalnih tačaka elementarnih masa dm, koje su *elementarni delovi krutog materijalnog tela, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{L}_O = \iiint_V d\vec{L}_O \overset{def}{=} \iiint_V [r, d\vec{p}] = \iiint_V [r, \vec{v}]dm = \iiint_V [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]dm = \omega \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]dm = \omega \iiint_V d\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \omega \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]dm$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase drugog reda* ili *kvadratni moment mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O.

Steiner-ova teorema. Imajući u vidu da je $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ to unošenjem u

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]dm$$

dobijamo:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \vec{J}_C^{(\vec{n})} + [\vec{r}_C, [\vec{n}, \vec{r}_C]]M$$

a to je izraz ***Steiner-ove teoreme***, koja kaže da je *vektor momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *materijalnog krutog tela u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O *jednak je zbiru vektora sopstvenog momenta inercije mase* $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku* C *u središtu masa tela i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz središte tela* C *i položajnog* $[\vec{r}_C, [\vec{n}, \vec{r}_C]]M$ *u odnosu na središte tela.*

Vektor sopstvenog momenta inercije mase $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ krutog tela u odnosu na momentnu tačku C, u središtu tela, i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz središte tela C nazivamo i ***centralni vector*** momenta inercije mase $\vec{J}_C^{(\vec{n})}$ materijalnog krutog tela za središte (centar inercije) C i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$.

Vektor *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O*, možemo razložiti u dve komponente, jednu* J_{On} *u pravcu ose* $\vec{n}$ *i drugu* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *upravnu na tu osu, a obe u devijacionoj ravni, koju čine vektori* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *i* $\vec{n}$ *i to možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$$

Aksijalni i devijacioni deo vektora momenta inercije mase tela*. *Glavne ose inercije materijalnog tela. Komponenta vektora *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u pravcu ose* $\vec{n}$*, koju smo označili sa* $J_{On}\vec{n}$*, odnosno* $\vec{J}_{On}^{(\vec{n})}$ *nazivamo još i aksijalni moment inercije mase krutig materijalnog tela za osu orjentisanu ortom* $\vec{n}$ *i koja prolazi kroz pol* O*:*

$$\vec{J}_{On}^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n}$$

i njen intenzitet je J_n *je jednak:*

$$J_{On} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)$$

Komponenta vektora *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u pravcu upravnom na osu* $\vec{n}$ *, koju smo označili sa* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *nazivamo još i vektor devijacionog momenta inercije mase krutig materijalnog tela za osu orjentisanu ortom* $\vec{n}$ *i koja prolazi kroz pol* O *:*

$$\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right]$$

i ona leži u devijacionoj ravni i izražava devijaciona sviojstva *krutog materijalnog tela* u odnosu na osu, oko koje rotira to telo, odnosno devijaciona svojstva rasporeda masa *krutog materijalnog tela* u odnosu na osu rotacije. (Naprimer, masa točka, koji je nasadjen ekscentrično pokazuje devijaciona svojstva pri rotaciji oko te ekscentrične ose, a masa izbalansiranog točka, koji je centrično nasadjen ne pokazuje devijaciona svojstva. Balansiranje točkova se izviodi dodavanjem olovnih ‘’materijalnih tačaka’’ čime se poništavaju devijaciona svojstva točka u odnosu na osu rotacije.)

Ako vektor momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}$ *krutog materijalnog tela* ima samo komponentu u pravcu ose $\vec{n}_s$, koju smo označili sa $\vec{J}_{On}^{(\vec{n}_s)}$ i nazivali još i aksijalni moment inercije mase *krutog materijalnog tela*, onda ćemo tu osu $\vec{n}_s$ nazvati ***glavnom osom inercije***. Znači da je za glavnu osu inercije orjentisanu ortom $\vec{n}_s$ komponenta u pravcu upravnom na osu $\vec{n}_s$, koju smo označili sa $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n}_s)}$ nazivamo još i vektor devijacionog momenta inercije mase *krutog materijalnog tela* jednaka nuli: $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n}_s)} = 0$. Tada je:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)} \equiv \left(\vec{n}_s, \vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}\right)\vec{n}_s$$

Takvih pravaca i osa ima tri u svakoj tački prostora i set od tri glavna pravca inercije, odnosno od tri glavne ose inercije sadrži ose koje su medjusobno ortogonalne. A to ćemo kasnije i dokazati.

Ako sada vektor momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela* u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O razložimo u tri pravca osa koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$ možemo da napišemo:

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_{Ou}^{(\vec{n})} + \vec{\mathfrak{D}}_{Ow}^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} + D_{Onu}\vec{u} + D_{Onw}\vec{w}$$

Projekcije $D_{Onu} = -J_{Onu}$ i $D_{Onw} = -J_{Onw}$ vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela* u pravcima dveju medjusobno ortogonalnih osa $\vec{u}$ i $\vec{w}$ nazivamo devijacionim momentima za dve ortogonalne ose $\vec{n}$ i $\vec{u}$, odnosno $\vec{n}$ i $\vec{w}$. Ove projekcije se zovu još i proizvodi inercije.

Tenzor momenata inercije masa sistema i matrica tenzora momenata inercije masa krutog materijalnog tela. Svakom od vektora momenta inercije mase $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela* u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, možemo pridružiti jednu matricu kolonu čiji su elementi njegove projekcije na ose koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$ na sledeći način:

$$\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})} = \begin{Bmatrix} J_{On} \\ D_{Onu} \\ D_{Onw} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{u})} = \begin{Bmatrix} D_{Oun} \\ J_{Ou} \\ D_{Ouw} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{w})} = \begin{Bmatrix} D_{Own} \\ D_{Owu} \\ J_{Ow} \end{Bmatrix}$$

i pomoću njih sastaviti matricu 3×3 koju ćemo nazvati ***matrica tenzora momenata inercije masa materijalnog krutog tela***, čije su kolone sastavljene od matrica kolona, koje sadrže projekcije vektora momenata masa *krutog materijalnog tela* redom, za ose koordinatnog sistema $O\vec{n}\vec{u}\vec{w}$, a čiji su elementi aksijalni momenti inercije masa i devijacioni momenti masa *krutog materijalnog tela*, odnosno proizvodi inercije masa *krutog materijalnog tela* za par osa redom iz skupa ortogonalnih vektora $\vec{n}$, $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Na osnovui toga možemo da napišemo:

$$\mathbf{J}_\mathbf{O} = \left(\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{n})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{u})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{w})}\right) = \left(\begin{Bmatrix} J_{On} \\ D_{Onu} \\ D_{Onw} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Oun} \\ J_{Ou} \\ D_{Ouw} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Own} \\ D_{Owu} \\ J_{Ow} \end{Bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} J_{On} & D_{Oun} & D_{Own} \\ D_{Onu} & J_{Ou} & D_{Owu} \\ D_{Onw} & D_{Ouw} & J_{Ow} \end{pmatrix}$$

Ako za skup ortohonalnih ortova uzmemo ortove Descartes-ovog koordinatnog sistema $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ prethodna matrica postaje:

$$\mathbf{J}_\mathbf{O} = \left(\mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{i})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{j})} \quad \mathbf{J}_\mathbf{O}^{(\vec{k})}\right) = \left(\begin{Bmatrix} J_{Ox} \\ D_{Oxy} \\ D_{Oxz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Oyx} \\ J_{Oy} \\ D_{Oyz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Ozx} \\ D_{Ozy} \\ J_{Oz} \end{Bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}$$

U vektorskom obliku vektori momenata masa za koordinatne ose Descartes-ovog koordinatnog sistema su:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + D_{Oxy}\vec{j} + D_{Oxz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} = J_{Oy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{j})} = D_{Oyx}\vec{i} + J_{Oy}\vec{j} + D_{Oyz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} = J_{Oz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{k})} = D_{Ozx}\vec{i} + D_{Ozy}\vec{j} + J_{Oz}\vec{k}$$

ili

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} \overset{def}{=} \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{i},\vec{r}\right]\right]dm$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} \overset{def}{=} \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}\right]\right]dm$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} \overset{def}{=} \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{k},\vec{r}\right]\right]dm$$

Ako sada redom pomnožimo vektore momenata masa za koordinatne ose Descartes-ovog koordinatnog sistema za pol u koordinatnom početku kosinusima smerova jediničnog vektora $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\beta + \vec{k}\cos\gamma$ onda ćemo dobiti sledeće:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{j})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{k})}\cos\gamma \overset{def}{=} \cos\alpha\iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{i},\vec{r}\right]\right]dm + \cos\beta\iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}\right]\right]dm + \cos\gamma\iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{k},\vec{r}\right]\right]dm =$$
$$= \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\beta + \vec{k}\cos\gamma,\vec{r}\right]\right]dm = \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{n},\vec{r}\right]\right]dm = \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

ili

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V \left[\vec{r},\left[\vec{n},\vec{r}\right]\right]dm = \vec{J}_O^{(\vec{i})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{j})}\cos\alpha + \vec{J}_O^{(\vec{k})}\cos\gamma$$

Sada se pomoću definisane matrice tenzora inercije mase *krutog materijalnog tela* može napisati prethodna relacija u sledećem obliku:

$$\left\{\mathbf{J}_{\mathbf{O}}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{Bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{O}}\{n\}$$

te je aksijalni moment inercije mase *krutog materijalnog tela* za osu $\vec{n}$ koja prolazi kroz koordinatni početak O jednak:

$$J_{On} = (n)\left\{\mathbf{J}_{\mathbf{O}}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{Bmatrix} = (n)\mathbf{J}_{\mathbf{O}}\{n\}$$

Devijacioni moment mase *krutog materijalnog tela* za dve upravne ose $\vec{n}$ i $\vec{u}$ koje se seku u koordinatnom početku O je:

$$D_{Onu} = (u)\left\{\mathbf{J}_{\mathbf{O}}^{(\vec{n})}\right\} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_u & \cos\beta_u & \cos\gamma_u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{Bmatrix} = (u)\mathbf{J}_{\mathbf{O}}\{n\}$$

Da bi smo odredili glavne pravce inercije mase *krutog materijalnog tela* potrebno je da nađemo one pravce $\vec{n}_s$ za koje je $\vec{J}_O^{(\vec{n}_s)} \equiv \left(\vec{n}_s, \vec{J}_O^{(\vec{n}_s)}\right)\vec{n}_s$, odnosno u matričnom obliku:

$$\left\{\mathbf{J}_{\mathbf{O}}^{(\vec{n}_s)}\right\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha_s \\ \cos\beta_s \\ \cos\gamma_s\end{Bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{O}}\{n_s\} = J_{On_s}\{n_s\}$$

te odatle dobijamo:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{O}}\{n_s\} - J_{On_s}\mathbf{I}\{n_s\} = \begin{pmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} - J_{On_s} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha_s \\ \cos\beta_s \\ \cos\gamma_s\end{Bmatrix} = 0$$

gde je $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ jedinična dijagonalna materica. Poslednja matrična jednačina predstavlja sistem homogenih algebarskih jednačina sa nepoznatim kosinusima smerova orta glavnog pravca inercije masa *krutog materijalnog tela,* $\vec{n}_s = \vec{i}\cos\alpha_s + \vec{j}\sin\beta_s + \vec{k}\cos\gamma_s$, ali sadrži i nepoznati aksijalni moment inercije mase *krutog materijalnog tela* J_{On_s} za osu u tom glavnom pravcu inercije. Kako je sistenm algebarskih jednačina po nepoznatim kosinusima smerova orta glavnog pravca, to da bi postojala rešenja različita od trivijalnih i nultih, potrebno je da determinanta sistema jednačina bude jednaka nuli, a tome treba pridružiti i uslov da je zbir kvadrata kosinusa uglova jednog pravca jednak jedinici. Na osnovui toga pišemo sekularnu jednačinu:

$$\left(\mathbf{J_O} - J_{On_s}\mathbf{I}\right)\{n_s\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} - J_{On_s} \end{vmatrix} = 0$$

iz koje odredjujemo glavne momente inerciije masa *krutog materijalnog tela*: $J_{On_s}, s = 1,2 = 3$, kao korene jednačine trećeg reda, koju dobijamo razvijanjem prethodne determinante:

$$P_3\left(J_{On_s}\right) = -\left[\left(J_{On_s}\right)^3 - \mathrm{J}_1\left(J_{On_s}\right)^2 + \mathrm{J}_2\left(J_{On_s}\right) - \mathrm{J}_3\right] = 0$$

u kojoj su J_1, J_2 i J_3 skalari, redom prvi, drugi i treći, matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* u odnosu na pol O:

* J_1 je prvi scalar i jednak je zbiru elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa materijalnog sistema u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_1 = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} = J_{On} + J_{Ou} + J_{Ow} = J_{On_1} + J_{On_2} + J_{On_3}$$

* J_2 je drugi scalar i jednak je zbiru minora elemenata sa glavne dijagonale matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_2 = \begin{vmatrix} J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{(yz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Ozx} \\ D_{(xz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} \\ D_{(xy} & J_{Oy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_2} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{On_1} & 0 \\ 0 & J_{On_2} \end{vmatrix}$$

* J_3 je treći scalar i jednak je determinanti matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* u odnosu na pol O:

$$\mathrm{J}_3 = \det\left|\mathbf{J_O}\right| = \begin{vmatrix} J_{Ox} & D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} & D_{Ozy} \\ D_{Oxz} & D_{Oyz} & J_{Oz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{On_1} & & \\ & J_{On_2} & \\ & & J_{On_3} \end{vmatrix} = J_{On_1} \cdot J_{On_2} \cdot J_{On_3}$$

Sva tri skalara matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* u odnosu na pol O su istovremeno i invarijante i za jednu tačku prostora u odnosu na koju se oređuje matrice $\mathbf{J}_O$ tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela nepromenljive, bez obzira na izbopr koordinatnog sistema, ako je njegov koordinatni početak u toj tački. To se lako dokazuje iz Viete-ovih pravila za jednačinu trećeg stepena, kojoj pripada sekularna jednačina.*

Kosinuse smerova glavnih pravaca momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* za neki pol O odredjujemo kao odnose:

$$\frac{\cos\alpha_s}{K_{31}^{(s)}} = \frac{\cos\beta_s}{K_{32}^{(s)}} = \frac{\cos\gamma_s}{K_{33}^{(s)}} = C_s$$

gde su $K_{3k}^{(s)}, k = 1,2,3$, $s = 1,2,3$ kofaktori elemenata treće vrste i odgvarajuće k -te kolohe za odgivarajući s -ti koren $J_{On_s}, s = 1,2 = 3$ sekularne jednačine:

$$K_{31}^{(s)} = \begin{vmatrix} D_{Oyx} & D_{Ozx} \\ J_{Oy} - J_{On_s} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{32}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Ozx} \\ D_{Oxy} & D_{Ozy} \end{vmatrix} \qquad K_{33}^{(s)} = \begin{vmatrix} J_{Ox} - J_{On_s} & D_{Oyx} \\ D_{Oxy} & J_{Oy} - J_{On_s} \end{vmatrix}$$

Kosinusi smerova glavnog pravca momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* moraju da zadaovoljavaju uslov da je zbir kvadrata kosinusa uglova glavnih pravaca jednak jedinici:

$$\cos^2 \alpha_s + \cos^2 \beta_s + \cos^2 \gamma_s = 1$$

Odakle odredjuemo nepoznate konstante C_s :

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{\left(K_{31}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{32}^{(s)}\right)^2 + \left(K_{33}^{(s)}\right)^2}}$$

Može se dokazati da u svakoj tački prostora u kome je materijalni sistem postoje uvek tri ortogonalana glavna pravca momenata inercije masa tela $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ za koje su vektori momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* bez devijacionih svojstava, tj. postoje samo aksijalni momenti inercije mase za te pravce, dok su devijacione komponente jednake nuli.

Matrica tenzora momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* u tom koordinatnom sistemu glavnih pravaca momenata inercije masa $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ je dijagonalna, jer za te pravce postoje samo aksijalni momenti inercije masa *krutog materijalnog tela*, pa sa tim postoje samo elementi na glavnoj dijagonali:

$$\mathbf{J_O} = \left(\mathbf{J_O}^{(\vec{n}_1)} \quad \mathbf{J_O}^{(\vec{n}_2)} \quad \mathbf{J_O}^{(\vec{n}_3)}\right) = \left(\begin{Bmatrix} J_{O1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ J_{O2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{O3} \end{Bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} J_{O1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{O2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{O3} \end{pmatrix}$$

Ako *kruto materijalno telo* ima osu simetrije onda je ta osa simetrije jedan njen glavni pravac inercije.

Iz Steiner-ove teoreme

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \stackrel{def}{=} \vec{J}_C^{(\vec{n})} + \left[\vec{r}_C, \left[\vec{n}, \vec{r}_C\right]\right] M$$

imajući u vidu da je:

$$\vec{J}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{i})} = J_{Ox}\vec{i} + D_{Oxy}\vec{j} + D_{Oxz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{j})} = J_{Oy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{j})} = D_{Oyx}\vec{i} + J_{Oy}\vec{j} + D_{Oyz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_O^{(\vec{k})} = J_{Oz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{k})} = D_{Ozx}\vec{i} + D_{Ozy}\vec{j} + J_{Oz}\vec{k}$$

kao i

$$\vec{J}_C^{(\vec{i})} = J_{Cx}\vec{i} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{i})} = J_{Cx}\vec{i} + D_{Cxy}\vec{j} + D_{Cxz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_C^{(\vec{j})} = J_{Cy}\vec{j} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{j})} = D_{Cyx}\vec{i} + J_{Cy}\vec{j} + D_{Cyz}\vec{k}$$
$$\vec{J}_C^{(\vec{k})} = J_{Cz}\vec{k} + \vec{\mathfrak{D}}_C^{(\vec{k})} = D_{Czx}\vec{i} + D_{Czy}\vec{j} + J_{Cz}\vec{k}$$

i $\quad \vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$

u skalarnom obliku možemo dobiti sldeće relacije:

$$J_{Ox} = J_{Cx} + \left(y_C^2 + z_C^2\right)M$$
$$J_{Oy} = J_{Cy} + \left(x_C^2 + z_C^2\right)M$$
$$J_{Oz} = J_{Cz} + \left(x_C^2 + y_C^2\right)M$$
$$D_{Oxy} = D_{Cxy} + x_C y_C M$$
$$D_{Oxz} = D_{Cxz} + x_C z_C M$$
$$D_{Oyz} = D_{Cyz} + z_C y_C M$$

a to su izrazi Steiner-ove teoreme o odnosu aksijalnih momenata inercije masa *krutog materijalnog tela* za dve paralelne ose, od kojih jedna prolazi kroz središte tog *krutog materijalnog tela*, kao i o odnosu devijacionih momenata masa *krutog materijalnog tela* za parove paralelnih osa, od kojih jedan par prolazi kroz središte sistema materijalnih tačaka.
Centrifugalni momenti masa *krutog materijalnog tela* su jednaki devijacionim momentima masa sa promenjenim znakom.

Analogija. Kompletna analiza stanja imomenata inercije masa krutog materijalnog tela u odnosu na jednu tačku, može se matematički izvesti na osnovu analogije sa analizom stanja napona i stanja deformacije napregnutog deformabilnog tela uspostavljajući analogiju izmedju matrice tenzora napona i matrice tenzora momenata inercije masa krutog tela, ili matrice tenzora relativne deformacije i matrice tenzora momenata inercije masa krutog tela. U toj analogiji, aksijalnim momentima inercije masa krutog tela odgovaraju normalni naponi ili dilatacije, a devijacionim momentima masa tangencijalni naponi ili specifične deformacije klizanja. Na osnovu te analogije, mogu da se bez računa i izvodjenja izraza iskoriste znanja iz teorije elatičnosti da su ravni ekstremnih vrednosti smičućih napona takve da zaklapaju uglove po $\frac{\pi}{4}$ u odnosu na dva glavna pravca naprezanja, a prolaze kroz treći, i na osnovu toga možemo da zaključimo da su ose inercione asimetrije momenata inercije masa pod uglom od $\frac{\pi}{4}$ u odnosu na dva glavna pravca momenata inercije mase krutog materijalnog tela i da su upravni na trećem. Značu da postoje tri para osa inercione asimetrije u svakoj tački protora u kome je teo, koje su u parovima jedna na drugu ortogonalne i za njih su aksijalni momenti inercije mase tela jednaki poluzbiru dva glavna aksijalna momenta inercije amse tela, dok su odgovarajući devijacioni momenti masa tela jednaki polurazlici dva glavna aksijalna momenta inercije masa krutog materijalnog tela. Ako su devijacioni momenti mase krutog tela za te ose ekstremnih vrednosti po analogiji sa ekstremnim vrednostima smičućih napona, to znači da materijalno telo za te ose ima ekstremne vrednosti devijacionih svojstava masa i da te ose treba izbegavati za ose rotacije tela, jer će za njih u poredjenju sa drugim osama rotacije biti ekstremne vrednosti kinetičkih pritisaka na ležišta vratila rotora, koji potiču od tih devijacionih svojstava masa rotora. Kako rotori treba da su balansiranih – uravnoteženih masa, to su glavni pravci momenata inercije masa rotora, ti pravci u kojima treba projektovati ose rotacije i postavljati vratila, jer su devijaciona svojstva nula. Ose inercione asimetrije su sa najizraženijim devijacionim svojstvima.

Za napisani esej o ovoj analogiji i pripremljen u vidu Word fajla sa crtežima student može dobiti do 10 bodova.

Teorema o promeni kinetičke energije materijalnog krutog tela

Kinetička energija ili *‘’živa sila’’* je mera kretanja materijalnog sistema kojim se ispoljava svojstvo transformacije jednog kretanja u drugo, ekvivalentno.

Definicijom 5. smo uveli skalarnu invarijantu dinamike elementarni rad sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s}=d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke kao skalarni proizvod te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s}=d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku $dA^{\vec{F}}\overset{def}{=}\left(\vec{F},d\vec{s}\right)$.

Na osnovu te definicije skalarne invarijante, uveli smo i ukupan rad sile $\vec{F}$ na stvarnom putu - pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke, kao ukupan zbir svih elementarnih radova $dA^{\vec{F}}\overset{def}{=}\left(\vec{F},d\vec{s}\right)$ ili integral skalarnog proizvoda te sile $\vec{F}$ i elementa stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{s}=d\vec{r}$ duž putanje s kretanja i to pišemo u obliku:

$$A^{\vec{F}}\overset{def}{=}\int_0^s dA^{\vec{F}}\overset{def}{=}\int_0^s\left(\vec{F},d\vec{s}\right)$$

Definicijom ***skalarnog odredjenja*** - *skalarne invarijante - elementarnog rada sile $\vec{F}$ na stvarnom elementarnom pomeranju $d\vec{s}=d\vec{r}$ duž putanje s kretanja materijalne tačke* uspostavljena je skalarna veza izmedju sila (aktivne $\vec{F}$, ili reaktivne $\vec{F}_w$ odnosno sile inercije $\vec{I}_F$) i pomeranja duž puta s materijalne tačke m.

Imajući u vidu definiciju sile inercije $d\vec{I}_F(t)\overset{def}{=}-dm\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$, kao *vektorske invarijante* i jednog od osnovnih odredjenja dinamike, kao i definiciju rada sile kao *skalarne invarijante* za ***ukupan rad svih sila inercije*** *kretanja materijalnog tela, koji se sastoji od materijalnih tačaka elementarnih masa dm, čiji su položaji u prostoru, u trenutku vremena t, odredjeni vektorima položja $\vec{r}(t)$, jednak je zbiru radova komponentnih sila inercije pojedinih materijalnih tačaka elementarnih masa dm, i za elementarni rad svih sila inercije na elementarnim pomeranjima materijalnih tačaka elementarnih masa dm, možemo da napišemo:*

$$dA^{\vec{I}_F}=\iiint_V\left(d\vec{I}_F,d\vec{s}\right)=-\iiint_V\left(\vec{a},d\vec{s}\right)dm$$

$$dA^{\vec{I}_F}=\iiint_V\left(d\vec{I}_F,d\vec{s}\right)=-\iiint_V\left(\vec{a},d\vec{s}\right)dm=-\iiint_V\left(\frac{d\vec{v}}{dt},\vec{v}dt\right)dm=-\iiint_V\left(\vec{v},d\vec{v}\right)dm=-d\iiint_V\frac{\vec{v}^2}{2}dm$$

$$dA^{\vec{I}_F}=\iiint_V\left(d\vec{I}_F,d\vec{s}\right)=-\iiint_V\left(\vec{a},d\vec{s}\right)dm=-\iiint_V\left(\vec{v},d\vec{v}\right)dm=-\iiint_V d\left(\frac{\vec{v}^2dm}{2}\right)=-\iiint_V d_s\left(d_mE_k\right)$$

Ukupan rad svih sila inercije materijalnog tela jednak je zbiru radova pojedinih materijalnih tačaka elementarnih masa materijalnog tela na njihovom stvarnom putu - pomeranju duž odgovarajućih putanja s_i kretanja svake od materijalnih tačaka elementarnih masa tela, te možemo da napišemo:

$$A^{\bar{I}_F} = \int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(d\bar{I}_F, d\vec{s}\right)\right\} = -\int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(\vec{a}, d\vec{s}\right)dm\right\} = -\int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(\vec{v}, d\vec{v}\right)dm\right\}$$

$$= -\iiint_V \left(\frac{\vec{v}^2 dm}{2}\right)_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = -\iiint_V \left(d_m E_k - d_m E_{k0}\right) = -\left(E_k - E_{k0}\right)$$

i time smo doveli ukupan rad sila inercije krutog materijalnog tela u vezu sa kinetičkom energijom krutog materijalnog tela.

Za ukupan rad sila inercije $\vec{I}_{Fi}(t)$ na stvarnim putevima pomeranja duž putanja s kretanja materijalnih tačaka elementarnih masa krutog tela, koje se kreću brzinom $\vec{v}$, a u početnom položaju su sve materijalne tačke elementarne mase tela i celo telo imale početne brzine jednake nuli, $v_{i0} = 0$ izvodimo i sledeću relaciju

$$A^{\bar{I}_F} = \int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(d\bar{I}_F, d\vec{s}\right)\right\} = -\int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(\vec{a}, d\vec{s}\right)dm\right\} = -\int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(\vec{v}, d\vec{v}\right)dm\right\}$$

$$= -\iiint_V \left(\frac{\vec{v}^2 dm}{2}\right)_{\vec{v}_0 = 0}^{\vec{v}} = -\iiint_V \left(d_m E_k\right) = -\left(E_k\right)$$

*iz koje smo izveli **zaključak**:*

Rezultujući rad sila inercije $\vec{I}_{F(i)}(t)$ *materijalnih tačaka elementarne mase materijalniog krutog tela na stvarnim putevima - pomeranjima duž putanja* s kretanja svake od materijalnih tačaka tela, koje se *kreću brzinama* $\vec{v}$, a u početnom položaju su sve materijalne tačke imale početne brzine jednake nuli, $v_{i0} = 0$ *jednak je negativnoj vrednosti kinetičke energije* E_k *kretanja (dinamike) materijalnog krutog tela.*

*Kinetička energija kretanja (dinamike) materijalnog krutog tela se naziva i imenom **''živa sila''** kretanja (dinamike) materijalnog krutog tela.*

Takodje smo analizirali i izvod po vremenu rada sile $\vec{F}$ na stvarnom putu pomeranju duž putanje s kretanja materijalne tačke m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ i uveli pojam ***snaga** ili **efekat rada sile,*** koja se iskazuje sledećom matematičkom relacijom:

$$P \overset{def}{=} \frac{dA^{\vec{F}}}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

Za materijalno telo na koje dejstvuju sile možemo da pišemo:

$$\frac{dA^{\bar{I}_F}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{s_0}^{s}\left\{\iiint_V \left(d\bar{I}_F, d\vec{s}\right)\right\} = -\iiint_V \left(\vec{a}, \frac{d\vec{s}}{dt}\right)dm = -\iiint_V \left(\vec{v}, d\vec{v}\right)dm$$

$$= -\iiint_V \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2 dm}{2}\right) = -\iiint_V \frac{d}{dt}\left(d_m E_k\right) = -\frac{d}{dt}\iiint_V \left(d_m E_k\right) = -\frac{d\left(E_k\right)}{dt}$$

Zaključili smo da je ***snaga** ili **efekat rada sila** inercije materijalnog tela* na stvarnim putevima - pomeranju duž sopstvenih putanja s kretanja odgovarajućih materijalnih tačaka elementarnih masa dm materijalnog tela, koje se kreću sopstvenim brzinama $\vec{v}$, jednaka izvodu kinetičke energije tela po vremenu, a to je i ***brzina vršenja rada**, i to je zbir skalarnih proizvoda sila inercija, koje dejstvuju na pokretnu odgovarajuću materijalnu tačku elementarne mase* dm *i brzine* $\vec{v}$ *kretanja te materijalne tačke elementarne mase duž njene putanje. Ta suma je integral po zapremini tela.*

Ove definisane skalarne invarijante - definisane pomoću vektorskih invarijanti dinamike, dovoljne su da se definiše *teorema o promeni kinetičke energije materijalnog tela po vremenu.*

***Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu materijalnog tela**: Promena kinetičke energije krutog materijalnog tela po vremenu, nepromenljive mase, koje se sastoji od elementarnih masa* dm, *koje se kreću brzinama* $\vec{v}$, *i na koje dejstvuju spoljašnje sile* $\vec{F}_{si}$ *i unutrašnje sile* $\vec{F}_{ui}$, *koje dejstvuju na telo u tačkama* N_i *odredjenim vektorima položaja* $\vec{r}_i$, *koje imaju brzine* $\vec{v}_i$, $i = 1,2,3,..,N$ *jednaka je zbiru snaga rada svih spoljašnjih sila* P. *Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dA^{\vec{I}_F}}{dt}=-\frac{dE_k}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(P_{ui}+P_{si}\right)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{N}\frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\sum_{j=1}^{n=3N-s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=\sum_{j=1}^{j=n=3N-s}Q_j\dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\begin{cases} q_i\,, i=1,2,3,...,6 \textit{ (krivolinijski sistem koordinata)}\\ q_i\,, i=1,..,n;\quad n=6-s;\ s<6 \textit{ (sistem generalisanih koordinata)}\end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i=1,2,3,....,6$ i dejstvuju na kruto materijalno telo. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo koordinate položaja krutog materijalnog tela u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima 6, q_i, $i=1,2,3,...,6$, ili su to nezavisne koordinate krutog materijalnog tela, kada ih ima $n=6-s$, q_i, $i=1,..,n(=6-s)$, gde je $s\le 6$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na to telo. Ako je materijalno telo slobodno, onda ima tih koordinata ima 6, te je toliko i generalisanih koordinata q_i, $i=1,2,3,...,6$ i 6 generalisanih sila Q_i, $i=1,2,3,...,6$, ili u slučaju kada materijalno telo nije slobodno, već je podvrgnuto vezama i tada postoji manji broj generalisanih koordinata za onoliko koliki je broj veza kojima je telo pdvrgnuto. Tada je i broj generalisanih sila jednak tom broju generalisanih koordinata te su generalisane koordinate q_i i generalisane sile Q_i, za $i=1,2,3,...,n(=6-s)$).
Snaga rada unutrašnjih sila krutog materijalnog tela jednaka je nuli.

Teorema o promeni kinetičke energije po vremenu dinamike krutog materijalnog tela*: Promena kinetičke energije pokretnog krutog materijalnog tela po vremenu, konstantne mase, čije se materijalne tačke elementarne mase kreću brzinama $\vec{v}$ na koje dejstvuju spoljašnje sile $\vec{F}_i$ jednaka je snazi P tih sila. Tu teoremu možemo izraziti sledećom relacijom:*

$$\frac{dE_k}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(P_{ui}+P_{si}\right)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{N}\frac{dA^{\vec{F}_i}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\sum_{j=1}^{n=3N-s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=\sum_{j=1}^{j=n=3N-s}Q_j\dot{q}_j$$

gde su

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\begin{cases} q_i\,, i=1,2,3,...,6 \textit{ (krivolinijski sistem koordinata)}\\ q_i\,, i=1,..,n;\quad n=6-s;\ s<6 \textit{ (sistem generalisanih koordinata)}\end{cases}$$

sile koje odgovaraju krivolinijskim koordinatama q_i, $i=1,2,3,....,6$ i dejstvuju na slobodno kruto materijalno telo. Njihov broj zavisi od toga da li su one samo koordinate položaja krutog materijalnog tela u generaliasnom sistemu krivolnijskih koordinata, kada ih ima 6, q_i, $i=1,2,3,...,6$, ili su to nezavisne koordinate krutog materijalnog tela, kada ih ima $n=6-s$, q_i, $i=1,..,n(=6-s)$, gde je $s\le 6$ broj stacionarnih geometrijskih holonomnih veza koje dejstvuju na to telo. Ako je materijalno telo slobodno, onda ima tih koordinata ima 6, te je toliko i generalisanih koordinata q_i, $i=1,2,3,...,6$ i 6 generalisanih sila Q_i, $i=1,2,3,...,6$, ili u slučaju kada materijalno telo nije slobodno, već je podvrgnuto vezama i tada postoji manji broj generalisanih koordinata za onoliko koliki je broj veza kojima je telo pdvrgnuto. Tada je i broj generalisanih sila jednak tom broju generalisanih koordinata te su generalisane koordinate q_i i generalisane sile Q_i, za $i=1,2,3,...,n(=6-s)$).

U zaključku možemo teoremu o promeni kinetičke energije krutog materijalnog tela da formulišemo na sledeći način:

Prvi izvod kinetičke energije dinamike mehaničkog sistema jednak je snazi sila koje na to telo dejstvuju.

Relativno kretanje materijalnog krutog tela u odnosu na središte sistema

Usvojimo središte masa materijalnog krutog tela za početak pokretnog sistema koordinata $C\xi\eta\zeta$, koji se translatorno kreće u odnosu na apsolutni, nepokretni Descartes-ov trijedar $Oxyz$. Položaj svake materijalne tačke elementarne mase dm tela odredjen je u odnosu na apsolutni, nepokretni sistem koordinata $Oxyz$ vektorom $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_C$ relativnog položaja materijalne tačke elementarne mase tela u odnosu na središte masa tela C.

Kinetička energija dinamike sistema – dinamike krutog materijalnog tela je:

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}^2 dm = \iiint_V \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\rho}}\right)^2 dm = \iiint_V \frac{1}{2}\left(\vec{v}_C + \vec{v}_r\right)^2 dm = \iiint_V \frac{1}{2}\left(\vec{v}_C^2 + 2\left(\vec{v}_r, \vec{v}_C\right) + \vec{v}_r^2\right) dm$$

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}^2 dm = \iiint_V \frac{1}{2}\left(\vec{v}_C^2 + 2\left(\vec{v}_r, \vec{v}_C\right) + \vec{v}_r^2\right) dm = \frac{1}{2}\vec{v}_C^2 \iiint_V dm + \left(\vec{v}_C, \iiint_V \vec{v}_r dm\right) + \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}_r^2 dm$$

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}M\vec{v}_C^2 + \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}_r^2 dm = E_{kC} + E_{ku}$$

jer je $\left(\vec{v}_C, \iiint_V \vec{v}_r dm\right) = \left(\vec{v}_C, M\vec{v}_{Cr}\right) = 0$, jer je relativna brzina središta sistema C u odnosu na to središte jednaka nuli. $\vec{v}_{Ct} = 0$. Sada iz prethodne relacije možemo napisati:

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}M\vec{v}_C^2 + \iiint_V \frac{1}{2}\vec{v}_r^2 dm = E_{kC} + E_{ku}$$

Na osnovu prethodnog možemo formulisati sledeću teoremu o kinetičkoj energiji dinamike krutog materijalnog tela:

Kinetička energija dinamike krutog materijalnog tela (sistema materijalnih tačaka) jednaka je zbiru kinetičke energije translacije brzinom $\vec{v}_C$ središta sistema, kao da je celokupna masa M tela sažeta u središtu masa tela i kinetičke energije relativnog kretanja materijalnog tela u odnosu na središte tela.

Ova teorema je poznata pod imenom Kenigova teoreme (***Samuel König*** 1712-1757). Ovaj holandki naučnik izveo je ovu teoremu 1751. Formulacija Kenigove teoreme je:

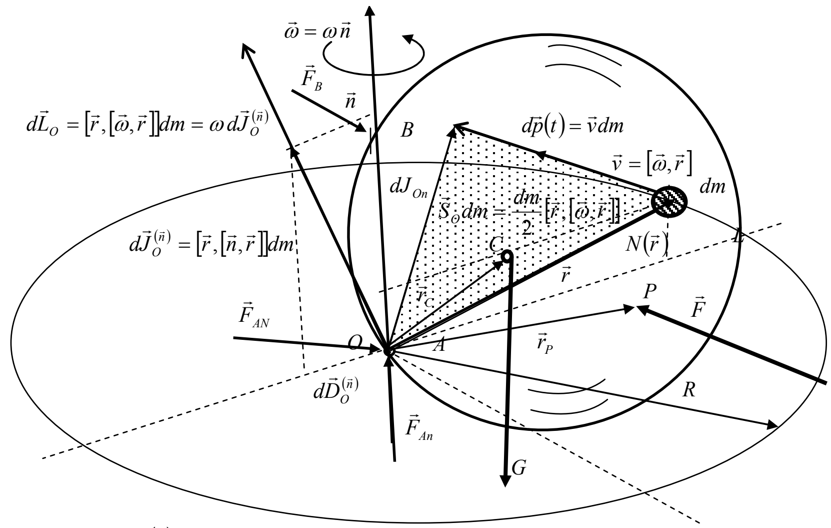
Kinetička energija sistema materijalnih tačaka za slučaj apsolutnog kretanja sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru kinetičke energije njegovog središta (spoljašnje kinetičke energije) i relativne kinetičke energije u odnosu na središte (unutrašnja kinetička energija).

Na osnovu prethodnih teorema i zaključaka možemo zaključiti i sledeće:

Svako kretanje sistema materijalnih tačaka se može predstaviti da se sastoji translatornog kretanja sistema brzinom njegovog središta i relativnog kretanja pojedinih njegovih tačaka u odnosu na središte sistema, koje u tom trenutku smatramo nepokretnim.

Obrtanje krutog tela oko nepomične ose

Označimo sa $\vec{r}$ vektor položaja te materijalne tačke elementarne mase materijalnog krutog tela u odnosu na momentnu tačku O, kroz koju prolazi i osa orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$ oko koje, *ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, rotira ta materijalna tačka elementarne mase. Brzina $\vec{v}_i$ kretanja te te materijalne tačke je jednaka vektorskom proizvodu te ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ i njenog vektora položaja $\vec{r}$: $\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] = \omega\left[\vec{n}, \vec{r}\right]$. Brzina $\vec{v}$ obrtnog kretanja materijalnog krutog tela i te njegove materijalne tačke elementarne mase dm je upravna na osu rotacije i njen vektor položaja, odnosno na vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$.



Vektor impulsa kretanja $d\vec{p}(t)$ materijalne tačke elementarne mase , koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O , je:

$$d\vec{p}(t) = \vec{v}dm = [\vec{\omega},\vec{r}]dm = \omega[\vec{n},\vec{r}]dm = \omega d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$d\vec{S}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} [\vec{n},\vec{r}]dm$$

i vektorsku definiciju za vektor $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O . To je i *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O .

Vektor impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ sistema materijalnih tačaka elementarne mase dm , koje čine jedno kruto materijalno telo, koje rotira pišemo pomoću vektorskog zbira vektora impulsa svih materijalnih tačaka elementarnih masa dm , koje su *elementarni delovi krutog materijalnog telo, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O , je:

$$\vec{p}(t) = \iiint_V \vec{v}dm = \iiint_V [\vec{\omega},\vec{r}]dm = \omega \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = \omega \vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm$$

vektorsku definiciju za vektor $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta maseb krutog materijalnog tela.*

Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O$ sistema materijalnih tačaka elementarne mase dm koje čine jedno kruto materijalno telo, koje rotira pišemo pomoću vektorskog zbira vektora momenata impulsa svih materijalnih tačaka elementarnih masa dm , koje su *elementarni delovi krutog materijalnog telo, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, oko nepokretne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O , je:

$$\vec{L}_O = \iiint_V d\vec{L}_O \overset{def}{=} \iiint_V [r, d\vec{p}] = \iiint_V [r,\vec{v}]dm = \iiint_V [\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]]dm = \omega \iiint_V [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm = \omega \iiint_V d\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \omega \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \iiint_V [\vec{r},[\vec{n},\vec{r}]]dm$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O . To je i *moment mase drugog reda* ili *kvadratni moment mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O .

Vektor *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O*, možemo razložiti u dve komponente, jednu* J_{On} *u pravcu ose* $\vec{n}$ *i drugu* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *upravnu na tu osu, a obe u devijacionoj ravni, koju čine vektori* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *i* $\vec{n}$ *i to možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$$

Kinetički pritisci i otpori veza

Na materijalno telo koje se obrće oko nepokretne ose dejstvuju, naprimer, dve aktivne sile: sila $\vec{F}$ sa napadnom tačkom u tački P tela, čiji je vector položaja $\vec{r}_P$ i sila težine $\vec{G} = -G\vec{k} = -G\vec{n}$, čija je napadna tačka u središtu masa tela, a vector položaja $\vec{r}_C$. Pretpostavimo da se u tački A nalazi neprokretno ležište (nepokretni oslonac) lakog vratila sa osom rotacije tela orjentisanom ortom $\vec{n}$, koje kao veza dejatvuje na telo i stvara otpor stacionarne veze, koji ima dve komponente, jednu u ravni upravnoj na osu rotacije $\overline{F}_{AN}$ i drugu komponentu u pravcu ose rotacije $\vec{F}_{An}$, drugo ležište vratila neka je klizno i neka je veza koja dejstvuje na telo stvarajući otpor samo u ravni upravnoj na osu vratila $\vec{F}_B$.

Sada koristimo teoremu o promeni sa vremenom impulsa kretanja materijalnog tela, koja je jednaka vektorskom zbiru sila koje dejstvuju na telo, kao i teoremu o promeni momenta impulsa kretanja materijalnog tela koja je jednaka momentu sila koje dejstvuju na materijalno telo za isti pol. Na osnovu tih teorema pišemo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \dot{\omega}\vec{S}_O^{(\vec{n})} + \omega\left[\vec{\omega},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = \dot{\omega}\vec{S}_O^{(\vec{n})} + \omega^2\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = \vec{F}_{AMN} + \vec{F}_{An} + \vec{F}_B + \vec{F} + \vec{G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\omega}\vec{J}_O^{(\vec{n})} + \omega\left[\vec{\omega},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \dot{\omega}\vec{J}_O^{(\vec{n})} + \omega^2\left[\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{r}_P,\vec{F}\right] + \left[\vec{r}_C,\vec{G}\right] + \left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

Kako je

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{n},\vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1$$

$$\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M[\vec{n},[\vec{n},\vec{r}_C]] = M\left\langle(\vec{n},\vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1$$

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n},\left[\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = J_{On}\vec{n} + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}$$

$$\left[\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n},J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n},\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}$$

gde su $\vec{u}_1$ i $\vec{w}_1$, kao i $\vec{u}$ i $\vec{w}$ dva para ortogonalnih ortova upravnih na osu rotacije i medjusobno i koji zajedno sa osom rotiraju uganom brzinom $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, te na sonovu prethodnog dobijamo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\left(\dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1\right) = \vec{F}_{AN} + \vec{F}_{An} + \vec{F}_B + \vec{F} + \vec{G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n} + \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\left(\dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w}\right) = \left[\vec{r}_P,\vec{F}\right] + \left[\vec{r}_C,\vec{G}\right] + \left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

Sada uvedimo kinematički vector $\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$ *odnosno* $\vec{\mathfrak{R}}_1 = \dot{\omega}\vec{u}_1 + \omega^2\vec{w}_1 = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_{01}$ *koji je upravan na osu rotacije orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, dok njegov intenzitet zavisi samo od ugaone brzine* ω *i ugaonog ubrzanja* $\dot{\omega}$

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

dok je $\vec{\mathfrak{R}}_{01}$*, odnosno* $\vec{\mathfrak{R}}_0$ *jedinični vector, koji je upravan na osu rotacije orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, i rotira oko ose obrtanja tela ugaonom brzinom* ω *i ugaonim ubrzanjem* $\dot{\omega}$.

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 = \vec{F}_{AN} + \vec{F}_{An} + \vec{F}_B + \vec{F} + \vec{G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\vec{n}+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}=\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right]+\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right]+\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]$$

Sada smo dobili dve vektorske jednačine sa nepoznatim otporima (veza) oslonaca vratila pri čemu znamo da su $\overline{F}_{AN}$ i $\vec{F}_B$ upravne na osu rotacije, dok je $\vec{F}_{An}$ u pravcu ose. Pomnožimo skalarno sa $\vec{n}$ drugu vektorsku jednačinu, te kako je:

$$\left(\vec{n},\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right]\right)=0 \qquad \left(\vec{n},\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right]\right)=0$$

to dobijamo:

$$\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)=\left(\vec{n},\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right]\right)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu rotacije tela oko nepomične ose. Istu možemo napisati i skalarno:

$$J_{On}^{(\vec{n})}\ddot{\varphi}=\mathfrak{M}_n$$

gde je $\ddot{\varphi}=\dot{\omega}$, odnosno φ ugaona (generalisana koordinata) rotacije tela oko ose *orjentisane jediničnim vektorom* $\vec{n}$*,* $J_{On}^{(\vec{n})}$ aksijalni moment inercije mase tela koje se obrće oko ose vratila i za osu rotacije, *dok je* $\mathfrak{M}_n$ moment aktivnih sila za osu rotacije.

Pomnožimo sada sa desne, pa sa leve vektorski ortom $\vec{n}$ orjentacije ose rotacije drugu vektorsku jednačinu pa dobijamo:

$$\dot{\omega}\left(\vec{J}_O^{(\vec{n})},\vec{n}\right)\left[\vec{n},\left[\vec{n},\vec{n}\right]\right]+\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right]\right]=\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right],\vec{n}\right]\right]$$

Kako je:

$$\left[\vec{n},\left[\vec{n},\vec{n}\right]\right]=0 \qquad \left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right]\right]=\vec{\mathfrak{R}} \qquad \left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_B,\vec{F}_B\right],\vec{n}\right]\right]=r_B\vec{F}_B$$

jer u prethodnim dvostrukim vektorskim proizvodima sa desne i leve strane jediničnim vektorom orjentacije ose $\vec{n}$ ostaju samo komponente upravne na tu osu orjedntisanu ortom $\vec{n}$ *(takav dvostruki vektorski proizvod ''propušta'' samo normalnu komponentu), pa sledi da je:*

$$\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}=\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]+r_B\vec{F}_B$$

odakle odredjujemo nepoznati otpor cilindričkog ležaja vratila:

$$\vec{F}_B=\frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}-\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right]-\frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Množenjem prve vektorske jednačine dinamičke ravnoteže rotora skalarno, pa zatim vektorski sa $\vec{n}$ dobijamo sledeće dve jednačine:

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\left(\vec{\mathfrak{R}}_1,\vec{n}\right)=\left(\vec{F}_{AN},\vec{n}\right)+\left(\vec{F}_{An},\vec{n}\right)+\left(\vec{F}_B,\vec{n}\right)+\left(\vec{F},\vec{n}\right)+\left(\vec{G},\vec{n}\right)$$

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\left[\vec{\mathfrak{R}}_1,\vec{n}\right]=\left[\vec{F}_{AN},\vec{n}\right]+\left[\vec{F}_{An},\vec{n}\right]+\left[\vec{F}_B,\vec{n}\right]+\left[\vec{G},\vec{n}\right]$$

Kako je:

$$\left(\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right)=0 \qquad \left(\vec{F}_{AN},\vec{n}\right)=0 \qquad \left(\vec{F}_B,\vec{n}\right)=0$$

To sledi da je:

$$\left(\vec{F}_{An},\vec{n}\right)+\left(\vec{F},\vec{n}\right)+\left(\vec{G},\vec{n}\right)=0 \qquad \text{odnosno} \qquad \vec{F}_{An}=-\vec{G}-\left(\vec{F},\vec{n}\right)\vec{n}$$

Sada i sa leve strane vektorski pomnožimo ortom $\vec{n}$ *prvu jednačinu pa dobijamo:*

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}}_1,\vec{n}\right]\right]=\left[\vec{n},\left[\vec{F}_{AN},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{F}_{An},\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{F}_B,\vec{n}\right]\right]+\left[\vec{n},\left[\vec{G},\vec{n}\right]\right]$$

Kako je

$$\left[\vec{n},\left[\vec{\mathfrak{R}},\vec{n}\right]\right]=\vec{\mathfrak{R}} \qquad \left[\vec{n},\left[\vec{F}_{AN},\vec{n}\right]\right]=\vec{F}_{AN} \qquad \left[\vec{n},\left[\vec{G},\vec{n}\right]\right]=0 \qquad \left[\vec{n},\left[\vec{F}_B,\vec{n}\right]\right]=\vec{F}_B$$

To sledi da je

$$\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1=\vec{F}_{AN}+\vec{F}_B+\left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

odnosno

$$\vec{F}_{AN}=\left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1-\vec{F}_B-\left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

Odnosno:

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

Sada možemo napisati redom sve nepoznate otpore veza koje dejstvuju na materijalno kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose sa dva ležišta (dve skleronomne veze) i koje smo odredili:

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G} - \left(\vec{F},\vec{n}\right)\vec{n}$$

$$\vec{F}_{AN} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Možemo da zaključimo da kinetički deo otpora oslonaca (otpora veza) zavisi od devijacionih svojstava rasporeda masa materijalnog tela u odnosu na nepokretnu osu oko koje (rotira) se obrće. Zato podelimo sabirke u izrazima za otpore veza, na one koji se javljaju kada telo ne rotira, već je u miru i delove koji potiču od rotacije:

$$\vec{F}_{An} = -\vec{G} - \left(\vec{F},\vec{n}\right)\vec{n}$$

$$\vec{F}_{AN} = \vec{F}_{AN(kin)} + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] + \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right] - \left[\vec{n},\left[F,\vec{n}\right]\right]$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{B(kin)} - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_P,\vec{F}\right],\vec{n}\right]\right] - \frac{1}{r_B}\left[\vec{n},\left[\left[\vec{r}_C,\vec{G}\right],\vec{n}\right]\right]$$

Kinetički pritisci. *Zato pretpostavimo da nema aktivnih sila i sile težine, već da postoje samo dinamički (kinetički) pritisci na ležišta vratila - dinamički otpori veza u nepokretnom i u pokretnom ležištu:*

$$\vec{F}_{An(kin)} = 0$$

$$\vec{F}_{AN(kin)} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

$$\vec{F}_{B(kon)} = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

Vidimo da se kinetički pritisak $\vec{F}_{AN(kin)}$ u nepokretnom ležištu A sastiji od dva dela, jedan deo koji je istog intenziteta, ali suprotnog smera od celokupnig kinetičkog pritiska $\vec{F}_{B(kin)}$ u pokretnom ležištu B i da zavise od devijacionog dela vektora momenta inercije mase rotirajućeg tela $\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|$ i od kinematičkog vektora $\vec{\mathfrak{R}} = \dot{\omega}\vec{u} + \omega^2\vec{w} = \mathfrak{R}\vec{\mathfrak{R}}_0$ *i da oba kinetička pritiska rotiraju oko ose rotacije ugaonom brzinom rotacije tela oko te ose. Te dve komponente čine jedan* ***devijacioni spreg*** $\vec{\mathfrak{M}}_{O(dev)} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$ *intenziteta* $\mathfrak{M}_{O(dev)} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\mathfrak{R}$ koji dejstvuje ‘’čupajuće’’ na ležišta vratila. Kod rotora velike brzine taj devijacioni spreg postaje velike snage i često i razarajuće snage i dejstva. Vidimo da je intenzitet proporcionalan proizvodu intenziteta devijacione komponente vektora momenata inercije masa rotirajućeg tela $\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|$ za pol u nepokretnom ležištu i inrenziteta kinematičkog vektora rotatora $\mathfrak{R} = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$.

Ako je osa oko koje se telo obrće i glavna osa inercije za tačku u kojoj je nepokretno ležište onda je devijacioni deo vektora momenta inercije mase tela za pol u nepokretnom ležištu i osu rotacije jednak nuli, pa je ovaj devijacioni spreg ne postoji, a delovi kinetičkih pritisaka su jednaki nuli. Ako je i središte masa tela na osi rotacije, onda su kinetički pritisci jednaki nuli.

Ako tražimo koordinmate kinetičkih pritisaka u pokretnom sistemu koordinata onda treba

$$\vec{F}_{AN(kin)} = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}_1 - \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

$$\vec{F}_{B(kon)} = \frac{1}{r_B}\left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{\mathfrak{R}}$$

Napisati pomoću odgovarajućih projekcija:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{n},\vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}\,'\eta_C + \xi_C\vec{j}\,'\right) = M\sqrt{\eta_C^{\;2} + \xi_C^{\;2}}\,\vec{u}_1$$

$$\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M\left[\vec{n},[\vec{n},\vec{r}_C]\right] = M\left\langle(\vec{n},\vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\eta_C & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}\,'\xi_C - \vec{j}\,'\eta_C\right) = M\sqrt{\eta_C^{\;2} + \xi_C^{\;2}}\,\vec{w}_1$$

Ako izaberemo osu u ravni središta sistema možemo dobiti odgovarajuća uprošćenja:

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = [\vec{n},\vec{r}_C]M = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi_C & 0 & \zeta_C \end{vmatrix} = M\left(\xi_C\vec{j}\,'\right) = M\xi_C\vec{j}$$

$$\left[\vec{n},\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = M\left[\vec{n},[\vec{n},\vec{r}_C]\right] = M\left\langle(\vec{n},\vec{r}_C)\vec{n} - \vec{r}_C\right\rangle = \left|\vec{S}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w}_1 = M\begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_C & 0 \end{vmatrix} = M\left(-\vec{i}\,'\xi_C\right)$$

$$\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})} = \vec{i}\,'D_{On\xi} + \vec{j}\,'D_{On\eta} = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{u}$$

$$\left[\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n}, J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left[\vec{n},\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right] = \left|\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}\right|\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ D_{On\xi} & D_{On\eta} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\,'D_{On\eta} + \vec{j}\,'D_{On\xi} = \sqrt{D_{On\xi}^{\;2} + D_{On\eta}^{\;2}}\,\vec{w}$$

te nije teško doći do traženih projekcija kinetičkih pritisaka na ležišta vratila rotora.

Kinetička energija rotacije tela oko nepokretne ose

Kinetička energija rotacije tela oko nepokretne ose je:

$$E_k = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}\iiint_V [\vec{\omega},\vec{r}]^2 dm = \frac{1}{2}\iiint_V \left([\vec{\omega},\vec{r}],[\vec{\omega},\vec{r}]\right)dm = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\vec{\omega},\left[\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]\right]\right)dm =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \iiint_v \left[\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]\right]dm\right) = \frac{1}{2}\omega^2\left(\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \iiint_v \left[\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]\right]dm\right) = \frac{1}{2}\omega^2\left(\vec{n},\vec{J}_O^{(\vec{n})}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 J_{On}^{(\vec{n})}$$

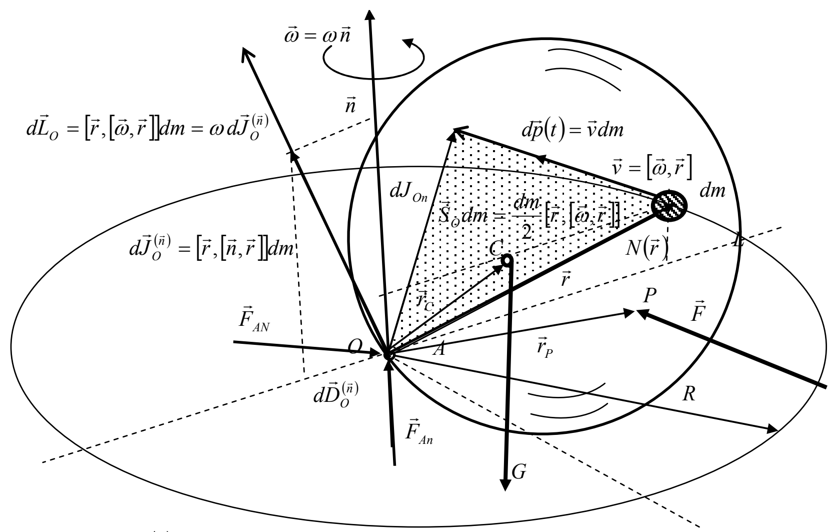
Postoje analogije izmedju translatornog kretanja materijalne tačke i rotacije krutog tela oko nepomične ose, kao i translatornog kretanja krutog tela i rotacije krutog tela oko nepomične ose. Napraviti tablicu analogija sa odgovarajućim crtežima i grafičkim prilozima i u vidu fajla pripremiti za ocenu. Za ovaj zadatak se može dobiti 3 poena.

Fizičko katno

Pozivaju se studenti da za domaći rad obrade F*izičko klatno i da u vidu Word dokumenta sa slikama u Wordu i jednačinama u Word equations dostave nastavniku odgovarajući fajl. Najbolji radovi u vidu eseja o fizičkom klatnu i kratkim podacuma o naučnicima (Kristijanu Hajgensu) mogu biti ocenjeni ocenom koja nosi do 5 bodova. Najbolji radovi će biti istaknuti na WEB prezentaciji predmeta Mehanika III - Dinamika.*

Obrtanje krutog tela oko nepomične tačke

Označimo sa $\vec{r}$ vektor položaja te materijalne tačke elementarne mase materijalnog krutog tela u odnosu na momentnu tačku O, kroz koju prolazi i osa orjentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja menja položaj, ali uvek prolazi kroz jednu fiksiranu tačku, koju smo izabrali da bude u polu O. Osa oko koje de obrće materijalno kruto telo i ta njegova materijalna tačka elementarne mase je trenutna osa rotacije, i tela, i te materijalne tačke elementarne mase dm. Neka oko te ose trenutne rotacije, koja menja orjentaciju, rotira, *ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, to telo i ta materijalna tačka elementarne mase dm, čiji je položaj u svakom trenutku odredjen njenim vektorom položaja $\vec{r}$ u odnosu na nepokretan pol u tački O. Brzina $\vec{v}$ kretanja te materijalne tačke elementarne mase dm je jednaka vektorskom proizvodu te ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ i njenog vektora položaja $\vec{r}$: $\vec{v} = [\vec{\omega},\vec{r}] = \omega[\vec{n},\vec{r}]$. Brzina $\vec{v}$ obrtnog kretanja materijalne tačke elementarne mase dm materijalnog krutog tela oko nepomične tačke O je upravna na osu trenutne rotacije i njen vektor položaja, odnosno na vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$.



Vektor impulsa kretanja $d\vec{p}(t)$ materijalne tačke elementarne mase , koja *rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko trenutne ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$d\vec{p}(t) = \vec{v}dm = [\vec{\omega},\vec{r}]dm = \omega[\vec{n},\vec{r}]dm = \omega d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$d\vec{S}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} [\vec{n},\vec{r}]dm$$

i vektorsku definiciju za vektor $d\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase prvog reda* ili *linearni moment mase* materijalne tačke elementarne mase dm u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O.

Vektor impulsa kretanja $\vec{p}(t)$ sistema materijalnih tačaka elementarne mase dm, koje čine jedno kruto materijalno telo, koje se obrće oko nepomićne tačke O, a koje se može predstaviti kao obrtanje oko ose trenutne rotacije orjentisane ortom $\vec{n}$, pišemo pomoću vektorskog zbira vektora impulsa kretanja svih materijalnih tačaka elementarnih masa dm, koje su *elementarni delovi krutog materijalnog telo, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu, nepokretnu, tačku O. Taj vektorski zbir je integral po zapremini tela te je:

$$\vec{p}(t) = \iiint_V \vec{v}dm = \iiint_V [\vec{\omega},\vec{r}]dm = \omega\iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm = \omega\vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

gde smo uveli oznaku

$$\vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V [\vec{n},\vec{r}]dm$$

i vektorsku definiciju za vektor $\vec{S}_O^{(\vec{n})}$ *statičkog momenta mase krutog materijalnog tela.*

Vektor momenta impulsa kretanja $\vec{L}_O$ sistema materijalnih tačaka elementarne mase dm koje čine jedno kruto materijalno telo, koje se obrće oko nepomične tačke O, a koje se može pretstaviti kao obrtanje oko trenutne ose rotacije orjentisane ortom $\vec{n}$, pišemo pomoću vektorskog zbira vektora momenata impulsa svih materijalnih tačaka elementarnih masa dm, koje su *elementarni delovi krutog materijalnog tela, koje rotira ugaonom brzinom* $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, oko ose orjentisane jediničnim vektorom $\vec{n}$, koja prolazi kroz momentnu tačku O, je:

$$\vec{L}_O = \iiint_V d\vec{L}_O \overset{def}{=} \iiint_V [r, d\vec{p}] = \iiint_V [r, \vec{v}]dm = \iiint_V [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]dm = \omega \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]dm = \omega \iiint_V d\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \omega \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

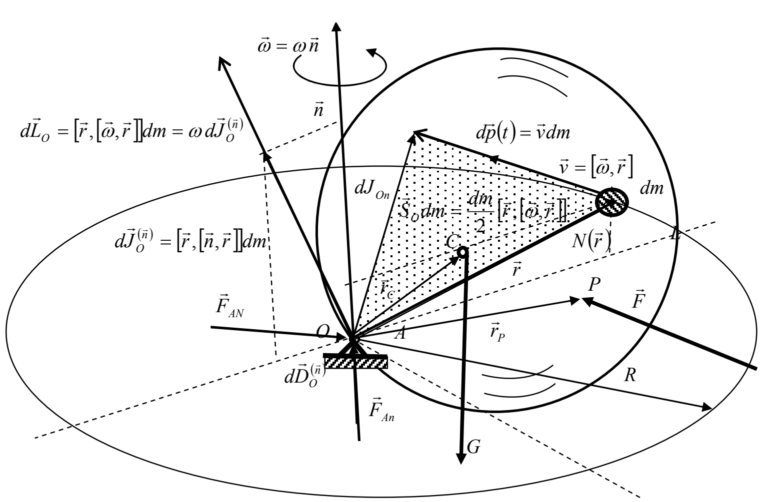
gde smo uveli oznaku

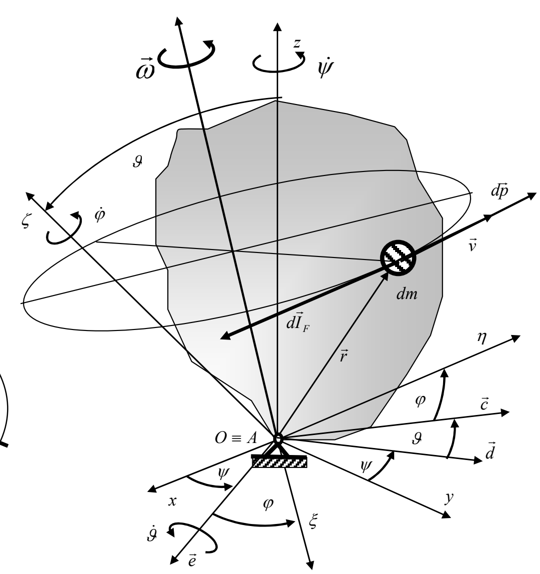
$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} \overset{def}{=} \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]dm$$

i vektorsku definiciju za vector $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *momenta inercije mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O. To je i *moment mase drugog reda* ili *kvadratni moment mase* materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku O i osu orjentisanu jediničnim vektorom $\vec{n}$, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku O.

Vektor *momenta inercije mase* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *krutog materijalnog tela u odnosu na momentnu tačku* O *i osu orjentisanu jediničnim vektorom* $\vec{n}$*, a koja prolazi kroz tu momentnu tačku* O*, možemo razložiti u dve komponente, jednu* J_{On} *u pravcu ose* $\vec{n}$ *i drugu* $\vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$ *upravnu na tu osu, a obe u devijacionoj ravni, koju čine vektori* $\vec{J}_O^{(\vec{n})}$ *i* $\vec{n}$ *i to možemo napisati u sledećem obliku:*

$$\vec{J}_O^{(\vec{n})} = \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)\vec{n} + \left[\vec{n}, \left[\vec{J}_O^{(\vec{n})}, \vec{n}\right]\right] = J_{On}\vec{n} + \vec{\mathfrak{D}}_O^{(\vec{n})}$$





Kako kruto telo, koje je zglobnom vezom vezano za nepokretnu tačku O, ima tri stepeni slobode kretanja, to za opisivanje tog kretanja možemo izabrati tri generalisane coordinate, to ćemo usvojiti Euler-ove uglove za opisivanje tog kretanja. Zato sada razmotrimo kinematiku obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke koristeći tri Euler-ova ugla ψ *-ugao precesije*, φ *- ugao rotacije* i ϑ *-ugao nutacije (vidi sliku)*.

Nepokretni pol O usvojimo za početak nepokretnog koordinatnopg sistema $xOyz$, kao i pokretnog, $\xi O\eta\zeta$, koji se obrće oko nepokretnog, a zajedničkog koordinatnog početka. Ako smo položaj pokretnog sistema koordinata odredili pomoću tri Euler-ova ugla ψ *-ugla precesije*, φ *- ugla rotacije* i ϑ *-ugla nutacije (vidi sliku) u odnosu na nepokretni sistem koordinata, onda smo definisali i to da taj koordinatni sistem nastaje pomoću tri rotacije oko nepokretnog koordinatnog početka*.

Znači da je položaj pokretnog sistema koordinata (trijedra osa) u odnosu na nepokretni sistem koordinata (trijedar) definisan pomoću tri *Euler-ova ugla*, ψ *-ugla precesije*, φ *- ugla rotacije* i θ *-ugla nutacije.*

To znači i da jedan sistem koordinata $xOyz$ možemo prevesti u drugi $\xi O\eta\zeta$ pomoću tri rotacije oko koordinatnog početka O, odnosno oko osa pojedinačno na sledeći način: Zamislimo da su se u početnom trenutku ose koordinatinih sistema poklapale, pa smo zatim pokretni sistem odvojili od nepokretnog $xOyz$ jednom rotacijom oko ose z za ugao ψ ***ugaonom brzinom precesije*** $\dot{\psi}$. Posle te prve rotacije osa koja se poklapala sa osom z je prešla u osu ζ, a osa koja se poklapala sa osom x prešla je u osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$, a osa koja se poklapala sa y osom prešla je u osu d orjentisanu ortom $\vec{d}$ i obe u istoj ravni Oxy i zaklapaju sa njima ugao precesije ψ. Ovu osu e orjentisanu ortom $\vec{e}$ nazvaćemo čvornom osom, Zatim nastavljamo sa obrtanjem koordinatnog sistema oko te čvorne ose, orjentisane ortom $\vec{e}$, za ugao ϑ, koji smo nazvali ugao nutacije, a obrtanje je izvršeno ugaonom brzinom $\dot{\vartheta}$ i ona je ***ugaona brzina nutacije***. Pri ovoj rotaciji osa, koja se poklapala sa z osom presla je u ζ osu, a osa d orjentisana ortom $\vec{d}$ prešla je u osu c rjentisanu ortom $\vec{c}$. Poslednja, treća rotacija koordinatnog sistema se izvodi oko ζ ose za ugao rotacije φ ***ugaonom brzinom rotacije*** $\dot{\varphi}$, čime je osa e prešla u osu ξ, a osa c u osu η. Tako smo pokazali da pomoću tri rotcije koristeći tri Euler-ova ugla ψ *-ugao precesije*, φ *- ugao rotacije* i ϑ *-ugao nutacije (vidi sliku)*, jedan koordinatni sistem čije se ose u početnom položaju poklapaju sa osama nepokretnog sistema možemo prevesti u sistem $\xi O\eta\zeta$.

Čvorna osa e orjentisana ortom $\vec{e}$, je presek koordinatnih ravni xOy i $\xi O\eta$ i kako smo naznačili orjentisana je jediničnim vektorom $\vec{e}$.

Imajući u vidu da je pokretni sistem koordinata $\xi O\eta$ vezan za kinematičko telo to znači da telo koje izvodi obrtanje oko nepomične ose može da se iz jednog položaja prevede u drugi pomoću tri rotacije na način kako je to prikazano sa koordinatnim sistemom.

Kako smo naznačili da svakoj rotaciji prema Euler-ovim uglovima ψ precesije, ϑ nutacije i φ rotacije, odgovara po jedna ugaona brzina: precesije $\dot{\psi}$ koja se vektorski može predstaviti $\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi}\vec{k}$ u pravcu orta $\vec{k}$ ose z, nutacije $\dot{\theta}$ oko čvorne ose $\vec{e}$ koja se kao vektor može predstaviti $\vec{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\vec{e}$, u tom pravcu orta $\vec{e}$ i rotacije i $\dot{\varphi}$ oko ose ζ koja se kao vektor može predstaviti $\vec{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{k}'$ u tom pravcu orta $\vec{k}'$. Na osnovu toga za vektor trenutne ugaone brzine obrtanja tela oko nepomične ose možemo da napišemo da je jednak zbiru tih komponentnih brzina:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{e} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

Ort čvorne ose $\vec{e}$ nastaje rotacijom orta $\vec{i}$ koordinatne ose Ox za ugao ψ oko ose orjentisane ortom $\vec{k}$, te na osnovu toga možemo napisati:

$$\vec{e} = \vec{i}\cos\psi + \left[\vec{k},\vec{i}\right]\sin\psi = \vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi$$

Ort $\vec{k}'$ ose $O\zeta$ nastaje rotacijom orta $\vec{k}$ koordinatne ose Oz za ugao ϑ oko čvorne ose orjentisane ortom $\vec{e}$, te na osnovu toga možemo napisati:

$$\vec{k}' = \vec{k}\cos\vartheta + \left[\vec{e},\vec{k}\right]\sin\vartheta = \vec{k}\cos\vartheta + \left[\vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi,\vec{k}\right]\sin\vartheta = \vec{k}\cos\vartheta + \left(-\vec{j}\cos\psi + \vec{i}\sin\psi\right)\sin\vartheta$$

Sada ugaonu brzinu obrtanja oko trenutne ose rotacije

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{e} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

možemo napisati u sledećem obliku:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\left(\vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi\right) + \dot{\psi}\vec{\vec{k}} + \dot{\varphi}\left\langle\vec{k}\cos\vartheta + \left(-\vec{j}\cos\psi + \vec{i}\sin\psi\right)\sin\vartheta\right\rangle$$

$$\vec{\omega} = \vec{i}\left(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta\right) + \vec{j}\left(\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta\right) + \vec{k}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)$$

Sada komponente ugaone brzine u nepokretnom sistemu koordinata $Oxyz$ možemo napisati u sledećem obliku:

$$\vec{\omega}_x = \vec{i}\left(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta\right)$$

$$\vec{\omega}_y = \vec{j}\left(\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta\right)$$

$$\vec{\omega}_z = \vec{k}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)$$

ili u skalarnom obliku

$$\omega_x = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi$$

$$\omega_y = \dot{\vartheta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta$$

Kako možemo posmatrati suprotnosmernu transformaciju ortova osa $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ i $\vec{k}'$ pokretnog sistema koordinata $O\xi\eta\zeta$ u ortove $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nepokretnog sistema koordinata $Oxyz$ pomoću tri Euler-ova ugla ($-\psi$) - *ugla precesije*, ($-\varphi$) - *ugla rotacije* i ($-\vartheta$) - *ugla nutacije, to o*rt čvorne ose $\vec{e}$ nastaje rotacijom orta $\vec{i}'$ koordinatne ose $O\xi$ pokretnog sistema koordinata za ugao $-\varphi$ oko ose orjentisane ortom $-\vec{k}'$, te na osnovu toga možemo napisati:

$$\vec{e} = \vec{i}'\cos(-\varphi) + \left[-\vec{k}',\vec{i}'\right]\sin(-\varphi) = \vec{i}'\cos\varphi + \vec{j}'\sin\varphi$$

Kako nastajanje orta $\vec{k}$ ose Oz možemo posmatrati u rezultatu rotacije orta $\vec{k}'$ koordinatne ose $O\zeta$ za ugao $-\vartheta$ oko čvorne ose orjentisane ortom $-\vec{e}$, te na osnovu toga možemo napisati:

$$\vec{k} = \vec{k}'\cos(-\vartheta) + \left[-\vec{e},\vec{k}'\right]\sin(-\vartheta) = \vec{k}'\cos\vartheta + \left[\vec{i}'\cos\varphi + \vec{j}'\sin\varphi,\vec{k}'\right]\sin\vartheta$$

$$\vec{k} = \vec{k}'\cos\vartheta + \left(\vec{j}'\cos\varphi - \vec{i}'\sin\varphi\right)\sin\vartheta$$

Sada u pokretnom sistemu koordinata možemo potražiti komponente trenutne ugaone rotacije:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{e} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

koju možemo napisati u sledećem obliku:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\left(\vec{i}'\cos\varphi + \vec{j}'\sin\varphi\right) + \dot{\psi}\left\langle\vec{k}'\cos\vartheta + \left(\vec{j}'\cos\varphi - \vec{i}'\sin\varphi\right)\sin\vartheta\right\rangle + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

$$\vec{\omega} = \vec{i}'\left(\dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta\right) + \vec{j}\left(\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta\right) + \vec{k}'\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right)$$

Komponente trenutne ugaone brzine u pokretnom sistemu koordinata je:

$$\vec{\omega}_\xi = \vec{i}'\left(\dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta\right)$$

$$\vec{\omega}_\eta = \vec{j}\left(\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta\right)$$

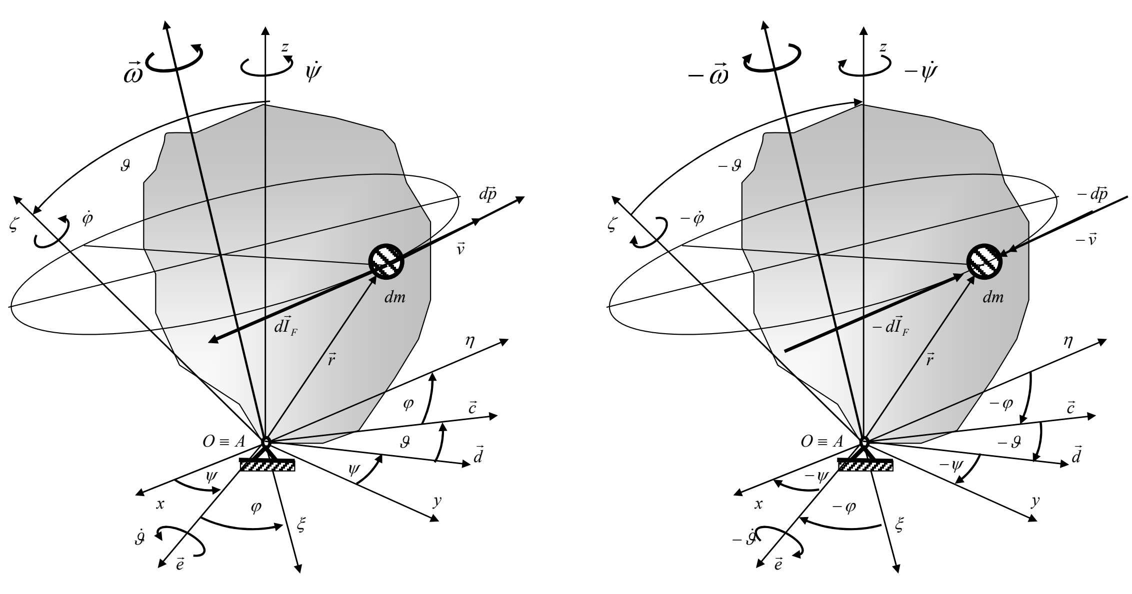
$$\vec{\omega}_\zeta = \vec{k}'\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right)$$

ili u skalarnom obliku

$$\omega_\xi = \dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$\omega_\eta = \dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta$$



Vektori impulsa kretanja i momenta impulsa kretanja krutog tela pri rotaciji tela oko nepomične tačke su:

$$\vec{p}(t) = \omega \iiint_V [\vec{n}, \vec{r}] dm = \omega [\vec{n}, \vec{r}_C] M = \omega \vec{S}_O^{(\vec{n})}$$

$$\vec{L}_O = \omega \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]] dm = \omega \vec{J}_O^{(\vec{n})}$$

i imajući u vidu da je $\vec{\omega} = \vec{i}'(\dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta) + \vec{j}(\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta) + \vec{k}'(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)$ možemo da napišemo:

$$\vec{p}(t) = \omega \iiint_V [\vec{n}, \vec{r}] dm = \omega \vec{S}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V \left[\omega_\xi \vec{i}' + \omega_\eta \vec{j}' + \omega_\zeta \vec{k}', \vec{r}\right] dm = \omega_\xi \vec{S}_O^{(\vec{i}')} + \omega_\eta \vec{S}_O^{(\vec{j}')} + \omega_\zeta \vec{S}_O^{(\vec{k}')}$$

$$\vec{L}_O = \omega \iiint_V [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]] dm = \omega \vec{J}_O^{(\vec{n})} = \iiint_V \left[\vec{r}, \left[\omega_\xi \vec{i}' + \omega_\eta \vec{j}' + \omega_\zeta \vec{k}', \vec{r}\right]\right] dm$$

$$\vec{L}_O = \omega_\xi \vec{J}_O^{(\vec{i}')} + \omega_\eta \vec{J}_O^{(\vec{j}')} + \omega_\zeta \vec{J}_O^{(\vec{k}')}$$

Kinetička energija rotacije tela oko nepokretne tačke

Kinetička energija rotacije tela oko nepokretne tačke je:

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_V [\vec{\omega}, \vec{r}]^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_V ([\vec{\omega}, \vec{r}], [\vec{\omega}, \vec{r}]) dm = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{\omega}, [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]) dm =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \iiint_v [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] dm\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \iiint_v [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] dm\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 J_{On}^{(\vec{n})}$$

Do ovog izraza možemo doći i na sledeći način:

$$\left(\vec{\omega}, \vec{L}_O\right) = \omega^2 \iiint_V (\vec{n}, [\vec{r}, [\vec{n}, \vec{r}]]) dm = \omega^2 \left(\vec{n}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right) = \omega^2 \iiint_V [\vec{n}, \vec{r}]^2 dm = \omega^2 J_{On}^{(\vec{n})} = 2E_k$$

Euler-ove jednačine dinamike krutog materijalnog tela za obrtanje oko nepomične tačke

Promena vektora impulsa kretanja jednaka je zbiru svih spoljašnjih sila i sila otpora oslonca, dok je promena momenta impulsa kretanja krutog tela pri rotaciji tela oko nepomične tačke jednaka zbiru momenata svih spoljašnjih sila i sila otpora oslonca za momentnu tačku i na osnovu tih teorema pišemo:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \dot{\omega}\vec{S}_O^{(\vec{n})} + \omega \overset{*}{\vec{S}}{}_O^{(\vec{n})} + \omega\left[\vec{\omega}, \vec{S}_O^{(\vec{n})}\right] = \sum_{k=1}^{S} \vec{F}_k + \vec{G} + \vec{F}_{AN} + \vec{F}_{An}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\omega}\vec{J}_O^{(\vec{n})} + \omega \overset{*}{\vec{J}}{}_O^{(\vec{n})} + \omega\left[\vec{\omega}, \vec{J}_O^{(\vec{n})}\right] = \sum_{k=1}^{S} \left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] + \left[\vec{r}_C, \vec{G}\right]$$

važi i

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overset{*}{\vec{L}}_O + \left[\vec{\omega}, \vec{L}_O\right] = \sum_{k=1}^{S} \left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] + \left[\vec{r}_C, \vec{G}\right] = \vec{\mathfrak{M}}_0$$

Iz prve vektorske jednačine se određuje otpor oslonca oko koga se kruto telo obrće, a druga vektorska jednačina predstavlja jednačinu rotacije, iz koje skalarnim množenjem sa ortovima koordinatnih osa dobijamo tri skalarne jednačine rotacije oko koordinatnih osa pokretnog sistema koordinata, jer proučavani sistem ima tri stepeni slobode kretanja.

Sada napišimo prethodne jednačine pomoću koordinata u pokretnom sistemu koordinata. Zato je potrebno da odredimo koordinate sledećih vektora i vektorskih izvoda:

$$\vec{L}_O = L_{O\xi}\vec{i}' + L_{O\eta}\vec{j}' + L_{O\zeta}\vec{k}'$$

$$\overset{*}{\vec{L}_O} = \dot{L}_{O\xi}\vec{i}' + \dot{L}_{O\eta}\vec{j}' + \dot{L}_{O\zeta}\vec{k}'$$

$$\left[\vec{\omega}, \vec{L}_O\right] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_{O\xi} & L_{O\eta} & L_{O\zeta} \end{vmatrix} = \vec{i}'\left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) + \vec{j}'\left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) + \vec{k}'\left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right)$$

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \vec{i}'\left(\dot{L}_{O\xi} + \omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) + \vec{j}'\left(\dot{L}_{O\eta} + \omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) + \vec{k}'\left(\dot{L}_{O\zeta} + \omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{S}\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right] + \left[\vec{r}_C, \vec{G}\right] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

Sada radi dobijanja jednačina dinamike obrtanja tela oko nepokretne tačke u skalarnom obliku, pomnožimo redom skalarno sa $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ i $\vec{k}'$ drugu vektorsku jednačinu, pa ćemo dobiti sledeće tri skalarne jednačine:

$$\dot{L}_{O\xi} + \omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta} = \sum_{k=1}^{S}\left(\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right]\vec{i}'\right) + \left(\left[\vec{r}_C, \vec{G}\right], \vec{i}'\right) = \left(\vec{\mathfrak{M}}_O, \vec{i}'\right) = \mathfrak{M}_{O\xi}$$

$$\dot{L}_{O\eta} + \omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta} = \sum_{k=1}^{S}\left(\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right], \vec{j}'\right) + \left(\left[\vec{r}_C, \vec{G}\right], \vec{j}'\right) = \left(\mathfrak{M}_O, \vec{j}'\right) = \mathfrak{M}_{O\eta}$$

$$\dot{L}_{O\zeta} + \omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi} = \sum_{k=1}^{S}\left(\left[\vec{r}_k, \vec{F}_k\right], \vec{k}'\right) + \left(\left[\vec{r}_C, \vec{G}\right], \vec{k}'\right) = \left(\vec{\mathfrak{M}}_O, \vec{k}'\right) = \mathfrak{M}_{O\zeta}$$

ili I sledećem obliku:

$$\dot{L}_{O\xi} + \omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta} = \mathfrak{M}_{O\xi}$$
$$\dot{L}_{O\eta} + \omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta} = \mathfrak{M}_{O\eta}$$
$$\dot{L}_{O\zeta} + \omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi} = \mathfrak{M}_{O\zeta}$$

Ove jednačine su ***Euler-ove jednačine dinamike krutog materijalnog tela koje se obrće oko nepokretne tačke.***

Ako za koordinatne ose pokretnog sistema koordinata uzmemo glavne ose momemata inercije mase tela koje se obrće oko nepomične tačke O onda su za te ose aksijalni momenti inercije masa su glavni momenti inercije masa J_{O1} , J_{O2} i J_{O3} dok je moment impulsa kretanja krutog tela oko nepokretne ose:

$$\vec{L}_O = \omega_1 J_{O1}\vec{i}' + \omega_2 J_{O2}\vec{j}' + \omega_3 L_{O3}\vec{k}'$$

i prethodne jednačine dinamike možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$\dot{\omega}_1 J_{O1} - \omega_2\omega_3\left(J_{O2} - J_{O3}\right) = \mathfrak{M}_{O1}$$
$$\dot{\omega}_2 J_{O2} - \omega_1\omega_3\left(J_{O2} - J_{O1}\right) = \mathfrak{M}_{O2}$$
$$\dot{\omega}_3 J_{O3} - \omega_1\omega_2\left(J_{O1} - J_{O2}\right) = \mathfrak{M}_{O3}$$

Vektor momenta impulsa kretanja možemo napisati u sledećem obliku:

$$\vec{L}_O = \omega_\xi \vec{J}_O^{(\vec{i}')} + \omega_\eta \vec{J}_O^{(\vec{j}')} + \omega_\zeta \vec{J}_O^{(\vec{k}')} = \omega_\xi\left(J_{O\xi}^{(\vec{i}')}\vec{i}' + \vec{\mathfrak{D}}_{O\xi}^{(\vec{i}')}\right) + \omega_\eta\left(J_{O\eta}^{(\vec{j}')}\vec{j}' + \vec{\mathfrak{D}}_{O\eta}^{(\vec{j}')}\right) + \omega_\zeta\left(J_{O\zeta}^{(\vec{k}')}\vec{k}' + \vec{\mathfrak{D}}_{O\zeta}^{(\vec{k}')}\right)$$

$$\vec{L}_O = \omega_\xi\left(J_{O\xi}^{(\vec{i}')}\vec{i}' - J_{O\xi\eta}^{(\vec{i}')}\vec{j}' - J_{O\xi\zeta}^{(\vec{i}')}\vec{k}'\right) + \omega_\eta\left(J_{O\eta}^{(\vec{j}')}\vec{j}' - J_{O\eta\xi}^{(\vec{j}')}\vec{i}' - J_{O\eta\zeta}^{(\vec{j}')}\vec{k}'\right) + \omega_\zeta\left(J_{O\zeta}^{(\vec{k}')}\vec{k}' - J_{O\zeta\xi}^{(\vec{k}')}\vec{i}' - J_{O\zeta\eta}^{(\vec{k}')}\vec{j}'\right)$$

$$\vec{L}_O = \vec{i}'\left(\omega_\xi J_{O\xi}^{(\vec{i}')} - \omega_\eta J_{O\eta\xi}^{(\vec{j}')} - \omega_\zeta J_{O\zeta\xi}^{(\vec{k}')}\right) + \vec{j}'\left(\omega_\eta J_{O\eta}^{(\vec{j}')} - \omega_\xi J_{O\xi\eta}^{(\vec{i}')} - \omega_\zeta J_{O\zeta\eta}^{(\vec{k}')}\right) + \vec{k}'\left(\omega_\zeta J_{O\zeta}^{(\vec{k}')} - \omega_\xi J_{O\xi\eta}^{(\vec{i}')} - \omega_\eta J_{O\eta\zeta}^{(\vec{j}')}\right)$$

ili u skalarnom obliku pomoću njegovih projekcija na koordinatne ose pokretnog sistema koordinata $O\xi\eta\zeta$:

$$L_{O\xi} = \omega_\xi J_{O\xi}^{(\vec{i}')} - \omega_\eta J_{O\eta\xi}^{(\vec{j}')} - \omega_\zeta J_{O\zeta\xi}^{(\vec{k}')}$$
$$L_{O\eta} = \omega_\eta J_{O\eta}^{(\vec{j}')} - \omega_\xi J_{O\xi\eta}^{(\vec{i}')} - \omega_\zeta J_{O\zeta\eta}^{(\vec{k}')}$$
$$L_{O\zeta} = \omega_\zeta J_{O\zeta}^{(\vec{k}')} - \omega_\xi J_{O\xi\eta}^{(\vec{i}')} - \omega_\eta J_{O\eta\zeta}^{(\vec{j}')}$$

Postoje tri poznata rešenja Euler-ovih jednačina dinamike krutog tela koje se obrće oko nepomične tačke:

Euler-ovo rešenje
Lagrange-ovo rešenje.
Rešenje Sofije Kovaljevske

Pozivaju se studenti da za domaći rad obrade *Euler-ovo rešenje, Lagrange-ovo rešenje i Rešenje Sofije Kovaljevske i da u vidu Word dokumenta sa slikama u Wordu i jednačinama u Word equations dostave nastavniku odgovarajući fajl. Najbolji radovi u vidu eseja o nabrojanim rešenjima i kratkim podacuma o naučnicima (Euler-u, Lagrange-u i Sofiji Kovaljevskoj) mogu biti ocenjeni ocenom koja nosi do 10 bodova. Najbolji radovi će biti istaknuti na WEB prezentaciji predmeta Mehanika III - Dinamika.*

Za stručni esej o čigri student movđe dobiti do 5 bodova.

Za stručni esej o giroskopskom efektu kosog ekscentrično nasađenog diska koji rotira oko nepokretne ose student može dobiti do 6 bodoba.

APPENDIX

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.

1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.
J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевъ. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - *Ensslin* - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - *Воронков* - *Минаков* - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - *Lowry H.* - *Hayden H.* - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - *Л. Люстерник* - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - *Webers* - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - *Newton* - *Gross* - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - *Scheffers* - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - *Pöschl* - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921

Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - *Cranz* - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Ẻléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:

- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Красловъ
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.