DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA

MEHANIKA III - DINAMIKA - KINETIKA

VII.3. DEVETA NEDELJA

Dinamika sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojmovi dinamike sistema materijalnih tačaka: Geometrija masa. Središte sistema masa i njegove osobine. Diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka. Teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka. Količina kretanja sistema materijalnih tačaka. Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka. Kinetička energija sistema. Koening-ova teorema o kinetičkoj energiji. Principi mehanike sistema materijalnih tačaka. D'Alamber-ov princip. Lagrange-ov princip. Lagrange-D'Alamber-ov princip. Lagrange-ove jednačine II vrste.

VIII. DESETA NEDELJA

Dinamika krutog tela

Osnovni pojmovi dinamike krutog tela: Momenti inercije mase tela. Definicije. Steiner-ova teorema. Elipsoid inercije. Translatorno kretanje tela. Količina kretanja tela. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija tela.

XI.1. JEDANAESTA NEDELJA

Obrtanje tela oko nekretne ose. Moment količine kretanja. Diferencijalna jednačina kretanja. Kinetička energija. Rad. Snaga.
Fizičko klatno. Kinetički pritisci.

XI.2. DVANAESTA NEDELJA

Ravansko kretanje tela. Količina kretanja. Moment količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja. Kinetička energija. Uslov kotrljanja bez klizanja.

Obrtanje tela oko nepkretne tačke. Kinetička energija. Moment količine kretanja. Euler-ove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. Regularna precesija.

XI.3 TRINAESTA NEDELJA

Sudar. Centralni upravni sudar. Centar udara. Charpy-jevo klatno.
Dinamika tela promenljive mase. Jednačina Mešćerskog. Kelijev problem. Jednačina Ciolkovskog.

Dinamika materijalnog sistema (nastavak)
Dinamika sistema materijalnih tačaka
Dinamika krutog tela

Uvod.

Iz opštih principa mehanike ili načela mehanike mogu se izvesti jednačine kretanja, i obrnuto iz jednačina kretanja sistema mogu se izvesti opšti principi mehanike. To smo pokazali za kretanje i dinamiku jedne materijalne tačke i tada naznačili da se isti mogu primeniti i na sistem sa konačnim brojem materijalnih tačaka, a takodje i na dinamiku materijalnih tela.

Opšti principi mehanike se dele u dve grupe u diferencijalne i integralne.

Diferencijalni principi omogućavaju da se iz njih izvedu diferencijalne jednačine kretanja.

Integralni principi pored toga što omogućavaju da se izvedu diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema, omogu.avaju i da se odrede i putanje materijalnih tačaka.

Diferencijalni principi su opštiji, jer se primenjuju na sve materijalne sisteme bez obzira kakve veze dejstvuju na materijalne tačke sistema, a to znači i holonomne i neholonomne i stacionarne i nestacionarne. Što se tiče integralnih principa oni se mogu primeniti samo na one materijalne sisteme u kojima se javlja dejstvo samo holonomnih veza, odnosno samo ako na materijalne tačke dejstvuju samo holonomne veze, a neholonomne veze ne dejstvuju.

Princip dinamičke ravnoteže u primeni na sistem materijalnih tačaka.

Materijalni sistem je u ***dinamičkoj ravnoteži*** *ako su zbirovi svih sila koje dejstvuju u pojedinim dinamičkim (materijalnim) tačkama tog tela jednaki nuli.*

Ovaj princip u primeni na materijalni sistem, kod koga na svaku materijalnu tačku mase m_ν, $\nu = 1,2,...,N$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_{\nu i}$, , $\nu = 1,2,...,N$, $i = 1,2,...,k_\nu$ *se može matematički iskazati u sledećem obliku:*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu i} = 0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu i}\right] = 0$$

Za materijalni sistem kod koga na svaku materijalnu tačku mase m_ν, $\nu = 1,2,...,N$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_{\nu i}$, , $\nu = 1,2,...,N$, $i = 1,2,...,k_\nu$, *formulacija Principa dinamičke ravnoteže je:*

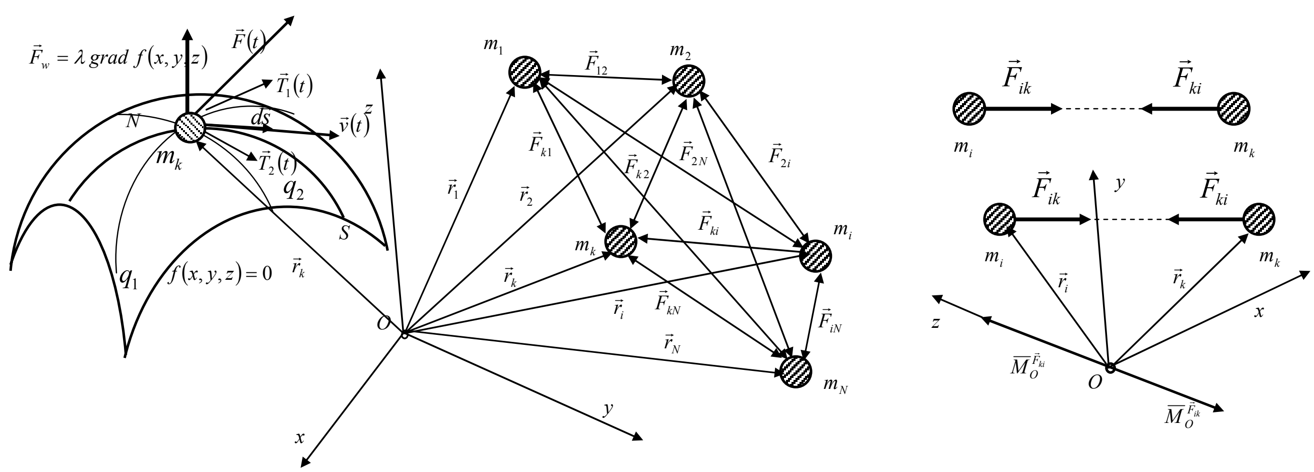
$$\sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu i} - \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu ie} = \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\vec{F}_{\nu ib} = 0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu i}\right] - \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu ie}\right] = \sum_{\nu=1}^{\nu=N}\sum_{i=1}^{i=k_\nu}\left[\vec{r}_\nu, \vec{F}_{\nu ib}\right] = 0$$

jer se unutrašnje sile i sile unutrašnjih veza koje dolaze u parovima poništavaju,

Za pokretni sistem materijalnih tačaka *zbir momenata svih sila, aktivnih i sila otpora veza za pol u koordinatnom početku je takodje jednak nuli.*

Prethodni sistem od dve vektorske jednačine je savremeni iskaz (izraz) i ***Dalamberovog principa*** koji glasi:

Kad u nekom sistemu materihalnih tačaka sile razložimo na efektivne i izgubljene, onda su ove poslednje u ravnoteži .



Dalamber (*Jean Le Rond d'Alambert* (1717-1783)) je napisavši fundamentalno delo "*Traite de Dynamique*", koje je publikovano 1743. godine i u njemu definisao princip dinamičke ravnoteže.

U izvornoj formulaciji ovog principa Dalamber ne govori o silama nego *o promeni količine kretanja* u kratkom vremenskom intervalu.

1740. godine ***Leonid Ojler*** u *''Komentarima Petrogradske akademije nauka'' postavio je princip koji se bitno ne razlikuje od Dalamberovog.* Formulacija tog njegovog principa je:

Za sistem materijalnih tačaka sistem efektivnih sila ekvivalentan je sistemu napadnih (aktivnih) sila.

Dalamberov princip se obično primenjuje u trećem obliku uvodeći ***pojam sile inercije***, kao što smo uradili definišući princip dinamičke ravniteže.

Koriste se i sledeće formulacije (iskazi) za ***Dalamberov princip:***

Za vreme kretanja materijalne tačke sila inercije stoji ''u ravnoteži'' sa svim silama koje dejstvuju na materijalnu tačku.

U sistemu materijalnih tačaka, koji je u kretanju, i sile inercije obrazuju sistem sila koji je ''u ravnoteži''.

Uloga i značaj ***Dalamberovog principa*** je velika, jer omogućava da se *dinamički problemi* rešavaju *statičkim metodama* ispitujući ravnotežu aktivnih sila, sila veze i sila inercije, pri kretanju sistema materijalnih tačaka. Pri tome ne treba gubiti iz vida da se svojstva dinamike sistema bitno razlikuju od svojstava statike sistema.

U sistemu materijalnih tačaka, koji je u kretanju, ativne spoljašnje i unutrašnje sile i sile inercije obrazuju sistem sila koji je ''u ravnoteži''.

Formulacija principa rada za sistem materijalnih tačaka

Kao što smo napomenuli, kada smo proučavali formulaciju principa rada u primeni na dinamiku jedne materijalne račke i radu sila koje desjtvuju na istu, postoje različite formulacije principa rada, ali suština principa rada je u osnovi svih tih različitih formulacija. Počevši od *Aristotela*, pa do danas je ostala ista. Znači da je s*uština principa rada* u stručnoj literaturi poznata još od *Aristotela* kao '*'zlatno pravilo mehanike''*, a kasnije kao '*'princip mogućih pomeranja*'', '*'princip mogućih varijacija*'', '*'fundamentalna osnovna jednačina mehanike*'', '*'princip virtuelnog rada*'', '*'Dalamber-Lagranžeov princip''* i drugi. Zaista, u delu *Galileo Galileja* '*'Quanto si guadagna di forza, tanto perdersi in velocita*'', Opera 2.p, 1830., navodi se ime Aristotela u vezi sa prasuštinom formulacije principa rada i kroz formulaciju '*'zlatnog pravila mehanike'',* kao i njegova formulacija *''principa mogućih pomeranja''. U literaturi se ovaj princip najčešće nalazi pod imenom: Lagrange-ov princip virtualnih pomeranja za sistem materijalnih tačaka*

Grupi ***diferencijalnih principa*** pripada i princip rada. Princip rada možemo iskazati na sledeći način:

Princip rada: *Ukupan rad svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku ili materijalni sistem ništavan je, a u prisustvu jednostrno zadržavajućih veza nije pozitivan.*

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \Delta A^{\vec{F}_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + \vec{F}_i + \vec{F}_{w,i}, \Delta\vec{r}_i \right) = 0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \Delta A^{\vec{F}_i} \le 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + F_i + \vec{F}_{w,i}, \Delta\vec{r}_i \right) \le 0$$

ili

a* Za slučaj zadržavajućih veza koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \delta A^{\vec{F}_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=N} \left(\vec{I}_{F,i} + \vec{F}_i + \vec{F}_{w,i}, \delta\vec{r}_i \right) = 0$$

b* Za slučaj nezadržavajućih veza koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \delta A^{\vec{F}_i} \le 0$$

Princip rada sila se može iskazati i u obliku: ***Ukupan rad svih sila na svim nezavisnim mogućim pomeranjima jednak je nuli, a za sistem sa jednostrano dejstvujućim vezama nije pozitivan.***

Kada je i-ta materijalna tačka sistema materijalnih tačaka, koja je slobodna ili kada na nju dejstvuiju veze, u ravnoteži tada je zadovoljen uslov da je zbir svih sila koje na nju dejstvuju u ravnoteži, uključujući i spoljašnje i unutrašnje sile i otpore veza, što matenatički, na osnovu principa dinamičke ravnoteže, izražavamo sledećim sistemom vektorskih jednačina:

$$\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik} = 0, \; i = 1,2,...,N \qquad \text{- za slobodne materijalne tačke}$$

$$\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s\le 3} \vec{F}_{wN\nu i} = 0 \; i = 1,2,...,N \quad \text{- za materijalne tačke podvrgnute vezama}$$

Kada je i-ta materijalna tačka iz sistema materijalnih tačaka u miru i ravnoteži, njena brzina $\vec{v}_i$ je jednaka nuli $\vec{v}_i = 0$. Ako na tu i-tu materijalnu tačku iz sistema materijalnih tačaka dejstvuje nestacuinarna veza $f_i(q_1, q_2, q_3, t) = 0$ onda mora da je zadovoljen uslov za brzinu:

$$\left(\vec{v}_{i,} gradf_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

a koja je $\vec{v}_i = 0$, jer je materijalna tačka u miru, to sledi da je: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Na osnovu toga zaključujemo da je uslov da bi i-ta materijalna tačka iz sistema materijalnih tačaka bila u miru potrebno je da veza koja dejstvuje na istu bude skleronomna. Ako veza nije skleronomna onda ne može ta materijalna tačka da miruje. Da bi ceo sistem bio u položaju ravnoteže i u dinamičkom stanju - mirovanju sve veze koje desjtvuju na pojedine materijalne tačke sistema treba da su skleronomne i stacionarne. Za taj slučaj , kada su veze koje dejstvuju na materijalne tačke skleronomne svako stvarno pomeranje je jednovremeno i moguće. Ako veze nisu skleronomne, svako moguće pomeranje nije i stvarno pomeranje materijalne tačke.

Označimo sa $\delta\vec{s}_i = \delta\vec{r}_i$, $i = 1,2,...,N$ zamišljeno, - virtualno pomeranje i njime skalarno pomožimo

$$\left(\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si}, \delta\vec{r}_i\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik}, \delta\vec{r}_i\right) = 0, \qquad \text{- za suistem slobodnih materijalnih tačaka}$$

odakle zaključujemo:

$$\delta\mathbf{A}_i + \sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{uki} = 0, i = 1,2,...,N \qquad \text{- za suistem slobodnih materijalnih tačaka}$$

gde su $\delta\mathbf{A}_i$ i $\delta\mathbf{A}_{uik}$ virtualni (zamišljeni) radovi spoljašnjih i unutrašnjih sila sistema koje dejstvujući na i-tu materijalnu tačku iz sistema materijalnih tačaka mogu da se izvrše pri njenom zamišljenom pomeranju $\delta\vec{s}_i = \delta\vec{r}_i$.

$$\left(\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si}, \delta\vec{r}_i\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{uik}, \delta\vec{r}_i\right) + \left(\sum_{\nu=1}^{s\leq 3} \vec{F}_{wN\nu i},, \delta\vec{r}_i\right) = 0,\ i = 1,2,...,N \quad \text{- za sistem materijalnih tačaka koje}$$

su podvregnute vezama,

odakle zaključujemo:

$$\delta\mathbf{A}_i + \sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{uki} + \sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{wN\nu i} = 0, i = 1,2,...,N \quad \text{- za sistem materijalnih tačaka koje su podvregnute}$$

vezama,

Kako je $\sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{wN\nu i} = 0$, jer je virtualno pomeranje upravno na otporu idealne veze, te sledi da je:

$$\delta\mathbf{A}_i + \sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{uki} = 0, i = 1,2,...,N \quad \text{- za sistem materijalnih tačaka koje su podvregnute vezama,}$$

Ako veze nisu obostrano zadržavajuće, nego jednostrane iako idealne, onda će virtualno pomeranje graditi ugao manji od devedeset stepeni u odnosu na normalu na odgovarajuću površ veze, te kako materijalna tačka može da napusti vezu na onu stranu na koju je napravljen otpor idealne veze to je $\left(\sum_{\nu=1}^{s\leq 3} \vec{F}_{wN\nu i},, \delta\vec{r}_i\right) \geq 0$, odnosno, $\sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{wN\nu i} \geq 0$ što znači da virtualni rad sila otpora idealnih veza nije jednak nuli. To znači da za slučaj jednatranih, nezadržavajućih veza ukupan rad aktivnih spoljašnjih sila i unutrašnjih sila, koje dejstvuju na jednu materijalnu tačku sistema, ne može biti pozitivan: $\delta\mathbf{A}_i + \sum_{k=1}^{N} \delta\mathbf{A}_{uki} \leq 0$.

Iz ove analize zaključujemo i sledeće:

Rad normalnih otpora idealnih veza koje dejstvuju na materijalnu tačku sistema je jednak nuli ako su veze obostrano zadržavajuće, ili pozitivan ako su jednistrano zadržavajuće.

Kada se sistem sastoji od N materijalnih tačaka onda možemo da napišemo sledeći iskaz principa virtualnog rada:

* za sistem materijalnih tačaka čija ni jedna materijalna tačka nije podrvrgnuta jednostranim nezadrržavajućim vezama:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si},\delta\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik},\delta\vec{r}_i\right)=0$$

* za sistem materijalnih tačaka čija je bar jedna materijalna tačka podrvrgnuta dejstvu bar jedne jednostrano nezadrržavajuće veze:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si},\delta\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik},\delta\vec{r}_i\right)\leq 0$$

Ovo je i iskaz Lagrange-ovog principa mogućih ili virtualnih pomeranja:

U slučaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila za virtualna pomeranja koja dopuštaju veze koje dejstvuju na materijalne tačke sistema, ne može biti pozitivan.

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\delta\mathbf{A}_i+\sum_{k=1}^{N}\delta\mathbf{A}_{uki}\right)\leq 0$$

Za slučaj idealnih obostrano zadržavajućih veza taj rad je jednak nuli,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\delta\mathbf{A}_i+\sum_{k=1}^{N}\delta\mathbf{A}_{uki}\right)=0$$

jer je tada rad otpora idealnih veza jednak nuli.

U slučaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka, koje su podvrgnute dejstvu idealnih obostrano zadržavajućih veza, zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila za virtualna pomeranja koja dopuštaju veze koje dejstvuju na materijalne tačke sistema je jednak nuli.

U slučaju ravnoteže krutog tela, koje je podvrgnuto dejstvu idealnih veza, zbir radova svih spoljašnjih sila na virtualnim pomeranjima koja dopuštaju veze, nije pozitivan. U slučaju ravnoteže krutog tela zbir virtualnih radova unutrašnjih sila je jednak nuli.

$$\sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{A}_i=0 \text{ jer je i } \sum_{k=1}^{N}\delta\mathbf{A}_{uki}=0$$

Lagrange-ov princip mogućih ili virtualnih pomeranja osnovni je princip statike sistema u ravnoteži i igra značajnu ulogu u rešavanju zadataka ravnoteže i mirovanja sistema.

Polazeći od ovog principa možemo uspostaviti vezu sa pojmom stepeni slobode kretanja i njihovim brojem sa brojem uslova ravnoteže materijalnog sistema u miru.

Broj stepeni slobode kretanja nekog materijalnog sistema jednak je broju potrebnih uslova za ravnotežu tog sistema.

U broj tih uslova ubrajaju se i uslovi za sprečavanje pomeranja i obrtanja materijalnog sistema, ili nekih njegovih delova.

Kako su sile težine aktivne sile, odnosno spoljašnje sile koje dejstvuju na materijalni sistem, a i kako se u tehničkoj praksi javljaju najčešće kao opterećenja konstrukcija to se princip virtualnog rada može izraziti u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{A}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{G}_i,\delta\vec{r}_i\right)=0$$

Kako sile težine dejstvuju u vertikalnom pravcu, to možemo prethodni iskaz uprostiti:

$$\sum_{i=1}^{N}\delta\mathbf{A}_i=\sum_{i=1}^{N}G_i\delta z_i=z_C\sum_{i=1}^{N}G_i=z_C G=0$$

gde je z_C koordinata središta siistema ili težišta. Ovo je iskaz *Toričelijevog principa* (Evangelista Torricelli, 1608-1647):

Materijalni sistem pod dejstvom sila težina je u ravnoteži ako se ne menja visina njegovog težišta (središta masa) za ma koje virtualno pomeranje koje dopuštaju veze čijem je dejstvu sistem podvrgnut.

Kada bi se središte sistema materijalnih tačaka spustilo rad sila težina bi bio pozitivan, te se ne bi mogla ostvariti ravnoteža.

***Lagrange-Dalamber-ov opšti princip mehanike sistema materijalnih tačaka*.**

Ako princip virtualnog rada primenimo na princip dinamičke ravnoteže, dobićemo uopštenje oba principa u sledećem matermatičkom iskazu:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}+\vec{I}_{Fi},\delta\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik},\delta\vec{r}_i\right)\le 0$$

ili

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}-m_i\vec{a}_i,\delta\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_{uik},\delta\vec{r}_i\right)\le 0$$

Na osnovu prethodnog možemo formulisati sledeći iskaz opšteg principa virtualnog rada za slučaj dinamičke ravnoteže sistema materijalnih tačaka:

Zbir radova aktivnih sila i sila inercije na svim virualnim pomeranjima, koja dopuštaju veze kojima je podvrgnut sistem, ne može biti pozitivan. U slučaju kada su veze idealne i obostrano zadržavajuće taj rad je jednak nuli.

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si}-m_i\vec{a}_i,\delta\vec{r}_i\right)=0$$

To je opšti princip mehanike u literaturi poznat pod imenom ***Lagrange-Dalamber-ov opšti princip mehanike sistema materijalnih tačaka***.

Iz ove formulacije principa virtualnog rada lako se mogu izvesti teoreme o promeni impulsa (količine) kretanja, kao i promeni momenta impulsa (količine) kretanja sistema materijalnih tačaka. (Pripremljen tekst sa slikama i predat u Word fajlu, nosi do 3 poena).

Lagrange-ove jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka

Lagrange-ove jednačine (prve vrste) kretanja sistema materijalnih tačaka

Posmatramo materijalni sistem koji sadrži N materijalnih tačaka masa $m_i, i=1,2,3,....,N$, čiji je položaj u prostoru određen vektorom položaja $\vec{r}_i$ i neka je svaka od materijalnih tačaka podvrgnura dejstvu idealnih veza $f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)=0, i=1,2,3,....,N$, $\nu=1,..s_i\le 3$ i neka je brioj svih veza koje dejstvuju na sistem preko pojedinih njegovih materijalnih tačaka $s=\sum_{i-1}^{N}s_i\le 3N$, onda je broj stepeni slobode kretanja takvog sistema $n=3N-s$. Ukupan broj koordinata kojima je odredjena konfiguracija (položaj) materijalnih tačaka sistema je $3N$. Na osnovu principa dinamičke ravnoteže za svaku od materijalnih tačaka možemo da napišemo:

$$\vec{I}_{Fi}+\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si}+\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik}=0,\ i=1,2,...,N$$ - za slobodne materijalne tačke

$$\vec{I}_{Fi}+\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si}+\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik}+\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\vec{F}_{wN\nu i}=0\ i=1,2,...,N$$ - za materijalne tačke podvrgnute vezama

ili

$$m_i\vec{a}_i=\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si}+\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik},\ i=1,2,...,N$$ - za slobodne materijalne tačke

$m_i\vec{a}_i = \sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i),\ i = 1,2,...,N$ - za materijalne tačke podvrgnute vezama. $(\vec{v}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)) = 0$.

Prethodni sistem vektorskih jednačina je sistem Lagrange-ovih jednačina prve vreste, kojim se opisuje kretanje sistema materijalnih tačaka. U njima su nepoznati vektori položaja materijalnih tačaka i Lagrange-ovi množioci veza $\lambda_{\nu i}$.

Prethodne jednačine sabiranjem po indeksu i, odnosno vektorskim množenjem sa odgovarajućim vektorom položaja $\vec{r}_i$ i-te materijalne tačke i sabiranjem po indeksu i i korišćenjem teorema o kretanju središta sistema materijalnih tačaka daje:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} = \vec{F}_R$$, - za sistem slobodnih materijalnih tačaka

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] + \sum_{k=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_{uik}]\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] = \vec{\mathfrak{M}}_O ,$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] = \vec{\mathfrak{M}}_O$$ - za sistem slobodnih materijalnih tačaka

$$(\vec{v}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)) = 0$$

odnosno - za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{uik} + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si} + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)\right) = \vec{F}_R + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)$$

i

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] + \sum_{k=1}^{N}[\vec{r}_i, \vec{F}_{uik}] + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}[\vec{r}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}[\vec{r}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)]\right) = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

ili

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \vec{F}_R + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}\, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}[\vec{r}_i, \vec{F}_{si}] + \sum_{\nu=1}^{s_i\le 3}\lambda_{\nu i}[\vec{r}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)]\right) = \vec{\mathfrak{M}}_O$$

$$(\vec{v}_i, grad\ f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i)) = 0$$

- za sistem materijalnih tačaka u kome su materijalne tačke podvrgnute dejstvu konačnih geometrijskih veza.

Lagrange-ove jednačine (druge vrste) kretanja sistema materijalnih tačaka

Posmatramo materijalni sistem koji sadrži N materijalnih tačaka masa $m_i, i = 1,2,3,....,N$, čiji je položaj u prostoru određen vektorom položaja $\vec{r}_i$ i neka je svaka od materijalnih tačaka podvrgnura dejstvu idealnih veza $f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i) = 0$, $i = 1,2,3,....,N$, $\nu = 1,..s_i \le 3$ i neka je brioj svih veza koje dejstvuju na sistem preko pojedinih njegovih materijalnih tačaka $s = \sum_{i-1}^{N} s_i \le 3N$, onda je broj stepeni slobode kretanja takvog sistema $n = 3N - s$. Ukupan broj koordinata kojima je odredjena konfiguracija (položaj) materijalnih tačaka sistema je $3N$. Ako sada izaberemo od tih $3N$ koordinata n nezavisnih koordinata za generalisane koordinate sistema materijalnih tačaka i obeležimo ih sa q_k, $k = 1,2,3,...,n(= 3N - s)$, onda koristeći veze $f_{\nu i}(x_i, y_i, z_i) = 0$, $i = 1,2,3,....,N$, $\nu = 1,..s_i \le 3$, možemo preostalih s koordinata da izrazimo preko generalisanih (nezavisnih) q_k. Tada su vektori položaja materijalnih tačaka funkcije generalisanih koordinata i vremena:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t)$$

te je virtualno pomeranje:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

dok je brzina i-te materijalne tačke:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Potražimo sada parcijalni izvod brzine po izvodu generalisane koordinate te dobijemo da važi relacija:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Sada koristimmo iskaz principa rada i relaciju rada sila na virtualnim pomeranjima materijalnih tačaka sistema pišemo u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} \left(\vec{F}_{si} - m_i \vec{a}_i, \delta\vec{r}_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} \left(\vec{F}_{si} - m_i \vec{a}_i, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i-1}^{N} m_i \left(\vec{a}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i-1}^{N} m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j = 0$$

Kako je:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{\vec{v}_i^2}{2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \frac{\vec{v}_i^2}{2}}{\partial q_j}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j}$$

jer je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{\vec{v}_i^2}{2}}{\partial\dot{q}_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i,\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)=\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt},\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)+\left(\vec{v}_i,\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)=\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt},\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)+\left(\vec{v}_i,\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=$$

$$=\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt},\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)+\left(\vec{v}_i,\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right)=\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt},\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)+\frac{\partial\left(\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right)}{\partial q_j}$$

kao i oznaku

$$E_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{v}_i^2}{2}$$

za kinetičku energiju dinamike sistema materijalnih taćaka, to sledi da je:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_j}\right]-\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right\}\delta q_j=0$$

Ako uvedemo oznaku

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=Q_j$$

onda prethodna jednačina skalarne invarijante – virtualnog rada dobija oblik:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_j}\right]-Q_j\right\}\delta q_j=0$$

Kako su virtualna pomeranja $\delta\vec{r}_i$ proizvoljna, a δq_i nezavisna to izrazi u velikim zagradama treba da su jednaki nuli, te sledi sistem od n skalarnih diferencijalnih jednačina:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_j}\right]-Q_j=0\,,\ \ j=1,2,3,...,n(=3N-s)$$

Ovaj dobijeni sistem jednačina predstavlja ***Lagrange-ove diferencijalne jednačine druge vrste*** *i opisuje kretanje sistema materijalnih tačaka u sistemu generalisanih (nezavisnih) koordinata. Ima tih jednačina onoliki broj koliki je i broj nezavisnih koordinata materijalnog sisteme, odnosno jednak je broju stepeni slobode kretanja materijalnohg sistema materijalnih tačaka. Taj sistem diferencijalnih jednačina važi i za sistem materijalnih tela za koji su izabrane odgovarajuće generalisane koordinate i pomoću njih izražene Kinetička energija i generalisane sile.*

Za formiranje ovog sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_j}-Q_j=0\,,\ \ j=1,2,3,...,n(=3N-s)$$

potrebno je prethodno odrediti generalisane sile koje dejstvuju na system i koje odgovaraju generalisanim koordinatama.

Generalisane sile se odredjuju iz relacije:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=Q_j$$

ili pak direkno preko izraza za rad sila koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka na njihovim mogućim – virtualnim pomeranjima i rada generalisanih sila na generalisanim varijacijama:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{S_i}\left(\vec{F}_{si},\delta\vec{r}_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i}\vec{F}_{si},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j$$

i izjednačavanjem koeficijenata poslednjih dveju suma sledi:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{S_i} \vec{F}_{si}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

Kinetičku energiju takodje treba izraziti pomoću nezavisnih, generalisanih koordinata. Zato u izraz za kinetičku energiju:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}$$

unesemo izraz za brzinu izraženu generalisanim koordinatama u obliku

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

te sledi da je izraz za kinetičku energiju u sledećem obliku:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j \dot{q}_k + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

Ako sada uvedemo sledeće oznake za inercione koeficijrnte)koeficijente inercionih svojstava materijalnog sistema, koje mogu biti mase, akio su generalisane koordinate pomeranja, a momenti inercije masa ako su generalisana pomeranja uglovi):

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

koji zavise od generalisanih koordinata i vremena, onda izraz za kinetičku energiju sistema materijalnih tačaka možemo napisati u sledećem obliku:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} B_j \dot{q}_j + \frac{1}{2}C$$

Ako sada uvedemo jednu dodatnu, $(n+1)$-vu koordinatu q_0 koju ćemo nazvati *reonomna koordinata*, i birati u formi u kojoj se u reonomnim, neskleronomnim vezama javljaju fnnkcije vremena u obliku $q_0 = q_0(t)$, a sledeće oznake za inercione koeficijrnte transformišemo i usvojimo u obliku:

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

$$\widetilde{B}_{0j} = B_{j0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_0}\right) = A_{j0} = A_{0j}$$

$$\widetilde{C}_{00} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_0}\right)^2 = A_{00}$$

Onda kinetičku energiju i za reonomni system možemo napisati u obliku kvadratene forme skupa od $(n+1)$-ne koordinate: n generalisanih i jedne reonomne koordinate q_0 :

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} A_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k$$

U slučaju da su veze koje dejstvuju na materijalne tačke sistema skleronomne kada su su vektori položaja materijalnih tačaka eksplicitne funkcije samo generalisanih koordinata, a ne i vremena:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n)$$

inercioni koeficijenti sistema se uprošćavaju i postaju:

$$A_{jk} = a_{jk}(q_1, q_2, ..., q_n) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$B_j = 0 \ \text{ i } \ C = 0$$

i tada se izraz za kinetičku energiju sistema materijalnih tačaka uprošćava i dobija u vidu homogene kvadratne forme:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Kada su sile koje dejstvuju na materijalne tačke sistema konzervativne i imaju funkciju sile i mogu da se napišu kao

$$\vec{F}_{si} = gradU_{si}(\vec{r}_i)$$

generalisane sile se odredjuju iz relacije za rad sila koje dejstvuju na sistem materijalnih tačaka na njihovim mogućim – virtualnim pomeranjima i rada generalisanih sila na generalisanim varijacijama:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} (\vec{F}_{si}, \delta\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_i} gradU_{si}(\vec{r}_i), \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_i} \frac{\partial U_{si}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$$

i izjednačavanjem koeficijenata poslednjih dveju suma sledi:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_i} \frac{\partial U_{si}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} U_{si}}{\partial q_j} = \frac{\partial U(q_1, q_2, ..., q_n)}{\partial q_j}$$

Gde smo uveli oznaku za uopštenu funkciju generalisanih sila u obliku:

$$U(q_1, q_2, ..., q_n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} U_{si}$$

Sada Lagrange-ove jednačine za sistem materijalnih tačaka na koje dejstvuju samo konzervativne sile može da se napiše u obliku:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \ \ j = 1,2,3,...,n(= 3N - s)$$

ili pak preko potencijalne energije ako je:

$$E_p = -U(q_1, q_2, ..., q_n) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_i} U_{si}$$

u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \ \ j = 1,2,3,...,n(= 3N - s)$$

Dinamika krutog tela

APPENDIX

LITERATURA

Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika,* III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika,* X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
Andjelić P. Tatomir, *Tenzori,* Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
Newton Isaak, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
Vujićić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
Vujićić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
Harlamov Pavel P. Подвиг Галилея*, Институт прикладной математики и механики*, 1999.
Harlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*,НАНУ, Донетск, ,1993.
Harlamov Pavel P. *Очерки об основании механики*, Наукова Думка, Киев,1995.
Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика, Москва*, 1983.стр. 450.
БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
Халфман Р. Л., *Динамика,* Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
Djurić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
Raičević Vladimir, Mehanika - Statika, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.
Katica (Stevanović) Hedrih: The vector method of the heavy rotor kinetic parameter anayzsis and nonlinear dynamics, University of Niš, 2001, p. 248.
.

LITERATURA - KLASIČNA

C. J. Coe - Theoretical Meshanics. A vectorial Treatement - New York, 1938.
G. Hamel - Theoretische Mechanik. Berlin, 1949.
1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik.
Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. THaimerding.
Art 3. Kinematik. Von A. Schoenflies.
2. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik.
Kapitel 5. Geometrie der Bewegungen. Von H. Alt.
H.. Hertz - Die Prinzipien der Mechanik. Lepzing. 1894.
Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменуту чланак
G. Prange - Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.
P. Appell - Traité de méchanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes. Méchanique analytique. Paris. Више издања.
И. Арновљевић - Основе теоријске механике I-VI. Београд. 1947-49.

J. Chazy - Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systémes matériels. Paris. 1948.
T. Levi - Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. Vol. II Parte seconda Bologna 1927.
Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье - Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва., Ленинград. 1948.
P. Painlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.
Г. К. Сусловъ - Основы аналитической механики. М. I. Часть III. Динамика системы. Киевъ. 1912.
Г. К. Сусловъ - Теоретичеслая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.
Apell - Traité de Mécanique rationnelle. T. II. Paris, 1931
Арновљевић И. - Оанови теоријске механике, I и III део. Београд, 1947
Aufenrieth - Ensslin - Technische Mechanik. Berlin, 1922
Билимовић А. - Рационална механика I. Београд, 1939 и 1950
Born M. - Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin, 1922
Bouligand G. - Lecons de Géométrie vectorielle, Paris, 1936
Brill A. - Voriesungen über algemeine mechanik. München, 1928
Брусић М. - Балистика, Београд, 1927
Бухгольц - Воронков - Минаков - Сборник задач по Теоретической механике. Москва, 1949
Coe C. J. - Theoretical mechanics a vectorial treatment. New York, 1938
Dobrovolný B. - Tehnická Mechanika. Praha, 1946
Фармаковски В. - Витас Д. - Локомотиве. Београд, 1941
Finger J. - Elemente der Reinen Mechanih.
Galilei G. - Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leiden, 1638
Geary A - Lowry H. - Hayden H. - Advanced mathematich for technical students. I. London, 1947
Goursat E. - Cours d`analyse mathématuque. III. Paris, 1942
Gray A. and J. - Treatise on Dynamics. London, 1911
Хайкин С. - Механика. Москва, 1947
Handbuch der Physik. Band III. Berlin, 1928
Hortog J.P. der: - Mechanical vibrations. New York, 1934 and 1947
Hort W. - Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922
Кашанин Р. - Виша математика I и II. Београд, 1949-1950
Kommerell V. und K. - Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin, 1931
Kowalewski G. - Grose Mathematiker. Berlin, 1939
М. Лаврентъев - Л. Люстерник - Основы вариационного исчисления. I. Москва, 1935
Lagally M. - Vektor-rechnung. Leipzig, 1934
Lamb H. - Dinamics. Cambridge, 1929
Lamb H. - Higher Mechanics. Cambridge, 1929
Marcolongo R. - Theoretische Mechanik - II Dynamik (bearb. von Timerding). Leipzig, 1912
Menge E. - Mechanik-Aufgaben III. Leipzig, 1938
Мещердкий И. В. - Сборник задач по теоретической Механике. 21 изд. Москва, 1955
Машћерски И - Збирка задатака из Теориске Механике (Превод М. Вречка) 2 изд, Београд, 1947
Миланковић М. - Небеска механика. Београд, 1935
Müller W. - Die Fahrdynamik der Verkehrsmittel. Berlin, 1940
Некрасов И. А. - Курс Теоретической Механики, II - Динамика. Москва, 1946
Обрадовић Н. - Основи науке о струјању. Београд, 1937
Ossgood W. L. - Mechanich. New Yor, 1937
Pöschl Th. - Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930, 1949
Prandtl L. - Strömungslehre. Braunschweig, 1942
Prescott J. - Mechanics of particles and rigid bodies. london, 1923
Riemann - Webers - Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig, 1297
Rosser - Newton - Gross - Mathematical theory of rocker flight. New York, 1947
Routh E. J. - Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I und II. Leipzig, 1898
Serret - Scheffers - Lehrbuch der Differ. und Integralrechnung. Leipzig, 1924
Sommerfeld A. - Mechanik. Leipzig, 1943
Суслов К. J. - Теоретическая Механика.Москва, 1946
Суслов К. J. - Теория потенциала и гидродинамика. Том I. Теория потенциала Киев, 1940
Timoshenko S. - Young D. - Advanced Dynamocs. New York, 1948
Timoshenko S. - Engineering mechanics. New York, 1951
Webster A. G. - The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig, 1925
Websteŕ A G. - Partial differential equations of Mathematical physics. Leipzig, 1927
Whittaker E. T. - A treatise on the Analitical dynamics. Cambrigde, 1937
Wittenbauer - Pöschl - Aufgaben aus der Technischen Mechanik I und III. Berlin, 1929, 1921
Wolf K. - Lehrbuch der Tech. Mechanik starrer Systeme, Wien, 1947
Zech - Cranz - Aufgabensammlung zur Theoretischen Mehanik. Stuttgart. 1920
Зернов Д. С. - Прикладная механика. Ленинград, 1925
Ценов И. - Аналитична механика. София, 1923
Жардецки В. - Пснови теориске физике. Београд, 1941

Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројати ова:

Ἀρχιμίδης (287-212 пр. Хр.) - Περί ἐπιπέδών σορροπικών, ή κέντρα βαρών (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824.
G. Galilei (1564-1642) - Discorsi e dimonstracioni matematiche.
Leiden 1638. Има ума у немачком преводу у збирци Klassiker- Bibliothek Ostwald'a.
I. Newton (1642-1726). - Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено на више језика.
L. Euler (1707-1783) - Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.
- Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немачки превод тих књига од J. Wolfers'a.
J.D'Alembert (1717-1783) - Tratié de dynamique. Paris 1743.
J. L. Lagrange (1736-1813) - Mécanique analytique. Paris 1788.
P. S. Laplace (1749-1827) - Mécanique céleste. Paris 1799-1825.
L. Poinsot (1777-1859) - Èléments de statique. Paris 1804.
C. G. J. Jacobi (1804-1851) - Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.
W. R. Hamilton (1805-1865) - Lectures on quaternions. London 1853.
H. Grassmann (1809-1881) - Ausdehnungslehre. Stettin 1844.
H. Poincaré (1854-1912) - Lecons de mécanique céleste. Paris 1905-10.
Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:
- *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901-1935.
- *Handbuch* der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.
Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):
P. Appell - Tratié de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Виша издања.
И. Арновљевић - Основи теориске механике. I. 1947.
Д. Бобылевъ. - Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С. - Петербургъ 1885. II. Часть кинематическая. Выоускъ первый: Механика метерьяльной точки. С. - Петербургъ 1888.
T. Levi-Civita e U. Amaldi - Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libereta. Parte prima. Bologna 1922-27.
R. Marcolongo - Meccanica razionale. Milano. 1905. Немачки превод H. Timerding'a - Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.
J. Nielsen - Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.
P. Panlevé - Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.
С. Г. Петровичъ - Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С. - Петербургъ 1912.
Часть II. Динамика точки. С. - Петербургъ 1913.
К. Стојановић - Механика. Београд 1912.
Г. К. Условъ - Основы аналитической механики. Изд. 2. Кіевъ 1911.
Г. К. Суслов - Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.
E. T. Whittaker - A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.